МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт механики и энергетики

Кафедра электроснабжения и эксплуатации электрооборудования

Методические указания
по выполнению и защите курсовой работы по дисциплине
«Теория и практика инженерного исследования»
для студентов очной и заочной форм обучения
направления подготовки
13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника»
(профиль «Электроснабжение»)

Ставрополь 2026

Содержание

1. Цели и задачи работы …………………………………………........…....3

2. Рекомендуемые темы курсовых работ ……………..………....……....5

3. Требования к структуре работы ……………………………...……......7

4. Требования к оформлению работы...…………………………………..…8

5. Список рекомендованных основных и дополнительных источников литературы……………………………………………………………………11

6. Требования к защите работы ……………..……………………….…..11

7. Критерии оценки работы………………………………………….....12

Приложения……………..………………………………………….……..……15

1. Цели и задачи работы

Целью курсовой работы является систематизация, закрепление и расширение теоретических и практических знаний по дисциплине «Теория и практика инженерного исследования», а также применение этих знаний для решения конкретных практических задач. В процессе выполнения курсовой работы студент должен продемонстрировать умение, используя стандартные методики, математические методы планирования экспериментов в значительной степени исключить интуитивный, волевой подход и заменить его научно-обоснованной программой проведения экспериментальных исследований, содержащей объективную оценку полученных результатов.

Курсовая работа позволяет оценить уровень усвоения студентом учебного материала, его способность к самостоятельной работе, умение логически мыслить и аргументировать свою точку зрения. Она является важным этапом в подготовке будущего специалиста, поскольку формирует навыки, необходимые для успешной профессиональной деятельности.

Цели выполнения курсовой работы:

- развитие способности применять теоретические знания для решения практических задач;

- освоение прикладных математических методов путем решения практических задач;

- приобретение опыта поиска оптимальных решений при организации эксплуатации электросетевого оборудования.

Конкретные задачи, решаемые обучающимися при написании курсовой работы, состоят в следующем:

- изучить обработку экспериментальных данных путем выполнения линейной и нелинейной аппроксимации;

- определение относительной погрешности результатов измерения физических величин;

- проведение корреляционного анализа экспериментальных данных;

- обработка результатов многофакторного эксперимента;

- провести анализ полученных результатов, разработать предложения по улучшению параметров системы эксплуатационного обслуживания.

В процессе написания курсовой работы студент учится самостоятельно планировать свою деятельность, выбирать методы и инструменты для достижения поставленных целей. Он приобретает навыки работы с учебной и научной литературой, умение отбирать, анализировать и систематизировать информацию, а также оформлять результаты своей работы в соответствии с установленными требованиями.

Курсовая работа позволяет студенту продемонстрировать свои знания и навыки, полученные в ходе изучения учебной дисциплины, а также применить их для решения конкретных практических задач. Успешное выполнение курсовой работы свидетельствует о готовности студента к проведению самостоятельных исследований и решению профессиональных задач в будущем.

В конечном итоге, курсовая работа является не только формой контроля знаний студента, но и важным инструментом его профессионального развития. Она позволяет ему приобрести необходимые навыки и опыт для успешной работы в выбранной сфере деятельности, а также способствует формированию его как компетентного и ответственного специалиста.

2. Рекомендуемые темы курсовых работ

Курсовая работа выполняется на тему «Теория и практика инженерного исследования», многовариантность заданий формируется различными исходными данными, вносимыми преподавателем в бланк задания индивидуально для каждого студента. Ниже приведен бланк задания на курсовую работу.

Задание

на курсовую работу по дисциплине «Теория и практика инженерного исследования »
магистранту электроэнергетического факультета СтГАУ

1. Цифровым прибором было проведено 11 замеров тока нагрузки в распределительном устройстве частного домовладения. Результаты замеров представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты замеров тока нагрузки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Определить относительную погрешность результатов измерений

2. В результате измерения электрического сопротивления неизолированного провода r при различной температуре t получены данные, приведенные в столбцах 2 и 3 таблицы 2. Выполнить линейную аппроксимацию экспериментальных данных.

Таблица 2 – Результаты измерения электрического сопротивления

i	t_i °C	r_i, Ом	t_i^2	$t_i r_i$	$r(t_i)$	Δr_i
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
Сумма						

3. Процесс изменения амплитуды тока короткого замыкания в электрической сети с течением времени τ при некоторых допущениях можно описать убывающей экспоненциальной функцией вида $\varphi = \varphi_0 e^{-\delta\tau}$, где φ – амплитуда тока короткого замыкания; φ_0 – амплитуда тока в начальный момент времени; δ – коэффициент затухания; τ – время. Результаты экспериментального исследования изменения амплитуды тока короткого замыкания представлены в столбцах 2 и 3 таблицы 3.

Таблица 3 – Изменение амплитуды тока короткого замыкания при проведении эксперимента

i	τ_i, мс	φ_i, А	τ_i^2	$\ln \varphi_i$	$\tau_i \ln \varphi_i$
1					
2					
3					
4					
5					

6					
7					
8					
9					
10					
11					
Сумма					

Выполнить нелинейную аппроксимацию экспериментальной кривой.

4. На основании экспериментальных данных о длительности (τ) и амплитуде (u) импульсных напряжений в электрической сети, представленных в таблице 4, оценить тесноту связи между этими параметрами.

Таблица 4 – Экспериментальные данные о длительности и амплитуде импульсных напряжений

N п/п	τ_i, мкс	u_i, кВ	$\tau_i - \overline{\tau}$	$u_i - \overline{u}$	$(\tau_i - \overline{\tau})^2$	$(u_i - \overline{u})^2$	$(\tau_i - \overline{\tau})(u_i - \overline{u})$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
Среднее							

5. Проведен трехфакторный эксперимент по исследованию освещенности на рабочем месте. В качестве управляемых факторов рассматривались: мощность осветительного прибора (x_1), напряжение питания (x_2), высота подвеса осветительного прибора (x_3).

Уровни факторов приняты следующими:

Факторы	Уровень факторов			
	0_{x_i}	μ_i	+ 1	– 1
x_1	150	50	200	100
x_2	220	20	240	200
x_3	75	25	100	50

Для оценки линейности уравнения регрессии выход y_0 на нулевом уровне определялся три раза, получены значения y_0 = 157,1; 139,1; 165,4.

В процессе проведения эксперимента выполнено три серии опытов (k = 3). Результаты параллельных опытов приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Значения выходного параметра при параллельных опытах

Номер опыта	Уровень фактора				Расчетные показатели				Выходной параметр			
									y_m^{I}	y_m^{II}	y_m^{III}	$\overline{y}_m$
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												

8												

Провести обработку полученных данных.

Задание выдал

Задание получил

3. Требования к структуре работы

Структура курсовой работы должна включать следующие элементы:

- титульный лист (Приложение 1);
- содержание (оглавление);
- введение;
- основную часть;
- заключение с указанием основных результатов работы;
- список использованных источников литературы;
- приложения (при необходимости).

Важным этапом подготовки курсовой работы является разработка плана курсовой работы. Основной задачей плана является структурирование работы, формулировка заголовков глав и разделов курсовой работы. Названия глав формулируются на основании вопросов, подлежащих разработке. Подобный подход обеспечивает выполнение требования к курсовой работе о соответствии ее содержания теме. Аналогичный подход применим к формулировке разделов глав, которые должны раскрывать содержание каждой главы по тому заголовку, в котором они сформулированы. Практика показывает, что наиболее характерными ошибками при разработке плана являются:

1. Совпадение названия глав (разделов) с темой курсовой работы (главы).

2. Названия глав (разделов) не раскрывают реального содержания темы курсовой работы (главы) и относятся к другой области знаний (дисциплине).

Обе ошибки недопустимы, особенно вторая, поскольку она приводит к несоответствию содержания курсовой работы ее теме.

4. Требования к оформлению работы

Курсовая работа оформляется в соответствии с общими правилами оформления научно-исследовательских работ.

Титульный лист курсовой работы содержит следующие элементы: полное наименование вышестоящего органа (Министерство сельского хозяйства Российской Федерации), университета (федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ставропольский государственный аграрный университет» института / факультета и кафедры, название дисциплины; тему курсовой работы; сведения об исполнителе (Ф.И.О. обучающегося, группа, подпись); сведения о преподавателе (Ф.И.О., ученая степень, ученое звание); наименование места и год выполнения; сведения о регистрации на кафедре, количество баллов (по БРС) и оценка (переведенная в пятибалльную систему), даты и подпись ведущего преподавателя.

Содержание (Оглавление) включает порядковые номера и наименование структурных элементов курсовой работы с указанием номера страницы, на которой они помещены.

Ниже представлен образец оформления содержания.

Содержание		
	Аннотация	2
	Введение	3
1	Расчет параметров многоканальной СМО	5
2	Расчет параметров многофазной СМО	10
3	Расчет оптимального количества запасных изделий для формирования резервного фонда	15
4	Составление оптимального плана проведения подготовительных работ при ремонте ЛЭП	20
	Заключение	27
	Список использованных источников литературы	30

Введение характеризует:

- актуальность темы - обоснование теоретической и практической важности существующей проблемы;

- цель и задачи курсовой работы - краткая и четкая формулировка цели выполнения работы и нескольких задач, решение которых необходимо для достижения поставленной цели;

- структуру работы - краткое содержание глав основной части работы.

Последовательность рубрик должна соответствовать приведенному перечню, наименование каждой рубрики выделяется в тексте жирным шрифтом.

Основная часть курсовой работы может содержать следующие части: главы; разделы (параграфы); пункты; подпункты.

Основная часть курсовой работы состоит из четырех глав, каждая из которых посвящена решению отдельной задачи в соответствии с индивидуальным заданием.

В приложении 3 кратко изложены методики, в соответствии с которыми рекомендуется выполнять основную часть курсовой работы.

Заключение - краткое изложение основных, наиболее существенных результатов, сформулированных в виде выводов, соответствующих цели и поставленным во введении задачам.

В списке использованных источников литературы должны быть представлены основные источники по теме:

- нормативно-правовые документы (ГОСТы, кодексы, стандарты, законы);

- учебники и учебные пособия;

- отраслевые периодические издания;

- научные статьи, монографии и материалы научных конференций;

- интернет-ресурсы (официальные сайты организаций, базы данных и т.д.)

Список должен содержать не менее 10 современных источников, изученных обучающимися (преимущественно даты издания не более 5 лет относительно года написания курсовой работы, кроме исторических вопросов).

На основные приведенные в списке источники должны быть ссылки в тексте курсовой работы. Они проставляются в квадратных скобках с указанием номера источника, под которым он значится в списке литературы.

Курсовая работа должна быть напечатана на стандартном листе писчей бумаги в формате А4 с соблюдением следующих требований:

- поля: левое - 30 мм, правое - 15 мм, верхнее - 20 мм, нижнее - 20 мм;
- шрифт размером 14 пт, гарнитурой Times New Roman;
- межстрочный интервал - полуторный;
- отступ красной строки - 1,25;
- выравнивание текста - по ширине.

Рекомендуемый общий объем курсовой работы не менее 25 страниц. Рекомендуемый объем введения: 2-3 страницы, заключения: 1-2 страницы, остальной объем страниц составляет основная часть работы.

Использование обучающимся технологий искусственного интеллекта для генерации текста и / или повышения его оригинальности признается некорректным заимствованием за исключением случаев, когда в рамках выбранной темы по согласованию с ведущим преподавателем предусматривается возможность использования технологий искусственного интеллекта при выполнении курсовой работы. При этом, обучающийся обязан: указать во введение, в каких разделах курсовой работы и в связи с чем были использованы технологии искусственного интеллекта; в тексте курсовой работы сделаны сноски с указанием, что материал был подготовлен с использованием технологий искусственного интеллекта.

5. Список рекомендованных основных и дополнительных источников литературы

1. Плескунов М.А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / М. А. Плескунов – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2022. – 264 с.
2. Яворский В. А. Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных / В. А. Яворский. – М.: Московский физико-технический институт (Государственный университет), 2006.
3. Хорольский В. Я. Прикладные методы для решения задач электроэнергетики и агроинженерии / В. Я. Хорольский, М. А. Таранов, В. Н. Шемякин, С. В. Аникуев. – Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2020. – 176 с.
4. Журнал «Механизация и электрификация сельского хозяйства».
5. Журнал «Вестник аграрной науки Дона»
6. Портал агроинженерный - https://agroengineering.ru

6. Требования к защите работы

В целях выполнения требований по хранению курсовых работ законченная и оформленная в соответствии с установленными требованиями курсовая работа и сопроводительный материал предоставляется преподавателю для защиты в распечатанном виде.

Курсовая работа допускается к защите при выполнении следующих условий:

- степень оригинальности текста курсовой работы не ниже 25% для работ, выполненных обучающимися по образовательным программам бакалавриата и специалитета, не ниже 35% - по образовательным программам магистратуры;

- наличия рецензии преподавателя, принимающего курсовую работу (Приложение 2).

Защита курсовых работ относится к промежуточной аттестации и проводится в конце семестра. Защита курсовых работ назначается кафедрой, дирекцией/деканатом вносится в расписание промежуточной аттестации и отражается в расписании учебных занятий.

Защиту курсовых работ проводит ведущий преподаватель, а в случае возникновения спорных ситуаций создается комиссия, в состав которой входит заведующий кафедрой и преподаватели кафедры.

Защита работы проходит в форме публичного выступления (5-7 мин.) с представлением результатов работы в виде презентации (5-7 слайдов) и ответов на вопросы преподавателя/комиссии (5 мин).

Для защиты курсовой работы обучающийся готовит текст доклада. В тексте выступления отражается:

- актуальности выбранной темы;
- цели и основные задачи курсовой работы;
- основное содержание курсовой работы;
- основные выводы и практические рекомендации.

7. Критерии оценки работы

Выполненная и защищенная курсовая работа оценивается в соответствии с учетом балльно-рейтинговой системы оценивания и критериями оценки, которые указаны в рабочей программе дисциплины.

В соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе оценки знаний студентов, обучающихся по образовательным программам высшего образования курсовую работу необходимо оценить по следующим критериям с учетом установленных максимальных баллов:

Критерий	Максимальное значение в баллах	Набранных баллов
Оформление курсовой работы	10	
Содержание курсовой работы	60	
Защита курсовой работы	30	
ИТОГО	**100**	

Содержание критериев оценки курсовой работы:

1. Оформление курсовой работы:

-10 баллов - курсовая работа соответствует всем требованиям к ее оформлению. При оформлении курсовой работы использовались современные средства визуализации информации.

-5 баллов - курсовая работа частично соответствует требованиям к ее оформлению, представленный материал проиллюстрирован не качественно. При оформлении курсовой работы современные средства визуализации информации не использовались.

2. Содержание курсовой работы:

-60 баллов - в курсовой работе подобраны необходимые информационные источники, информация использована корректно, все вопросы и разделы освещены полностью, для выводов приведены достаточные обоснования;

-40 баллов - в курсовой работе подобраны не все необходимые информационные источники, информация использована не везде корректно, не все вопросы и разделы освещены полностью, для выводов не приведены достаточные обоснования;

-20 баллов - в курсовой работе отсутствуют некоторые разделы, или их название не отвечает содержанию.

3. Защита курсовой работы:

-30 баллов - студент продемонстрировал полное понимание всех положений защищаемой работы, четкость и правильность изложения ответов на все вопросы, заданные преподавателем;

-20 баллов - студент продемонстрировал понимание основных положений защищаемой работы, четкость и правильность изложения ответов на большую часть вопросов, заданных преподавателем;

-10 баллов - студент дал недостаточно полные ответы на вопросы, на некоторые из них дал ошибочные ответы или не ответил.

Перевод оценки из 100-бальной в пятибалльную систему оценки знаний осуществляется следующим образом:

-89-100 - оценка «отлично»,

-77 - 88 баллов - оценка «хорошо»,

-65 - 76 баллов - оценка «удовлетворительно»,

-менее 64 баллов - оценка «неудовлетворительно».

При неудовлетворительной оценке курсовой работы обучающийся имеет право на повторную защиту после доработки и внесения исправлений.

У обучающегося, не сдавшего в установленный срок курсовую работу и/или не защитившего её по неуважительной причине, образуется академическая задолженность.

Оценка за курсовую работу фиксируется в зачетной книжке обучающегося и в электронной ведомости. Распечатанный и подписанный оригинал ведомости храниться в деканате факультета/института в соответствии со номенклатурой дел и сроками хранения документов 5 лет.

Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт механики и энергетики

Кафедра электроснабжения и эксплуатации электрооборудования

Курсовая работа

по дисциплине «Теория и практика инженерного исследования»

Тема: «Обработка экспериментальных данных»

Выполнил:
Студент __ курса ____ группы
ФИО
Направление подготовки: _________
Форма обучения: _______

Проверил:
____
уч. степень, должность
ФИО___________________

Зарегистрирована
«____» _________________20_____г.

Критерий	**Максимальное значение в баллах**	**Набранных баллов**
Оформление курсовой работы (проекта)	10	
Содержание курсовой работы (проекта)	60	
Защита курсовой работы (проекта)	30	
ИТОГО	**100**	

Оценка «____________» Дата _______________ Подпись ______________

Ставрополь, 20____

Приложение 2

Кафедра: электроснабжения и эксплуатации электрооборудования

РЕЦЕНЗИЯ
на курсовую работу

Тема_________________________________
Обучающийся (Ф.И.О.)________________
Курс_______ Группа___________________

Преподаватель (Ф.И.О.)_________________

Выполнение общих требований к курсовой работе (проекту)

1	Объем работы соответствуют установленным требованиям	Да/нет
2	Степень оригинальности курсовой работы (проекта) соответствует установленным требованиям	Да/нет *(указать %)*

Критерии оценивания курсовой работы (проекта)

Критерии	**Количество баллов**	**Содержание критерия оценки**	**Итоговый балл**
Оформление курсовой работы (проекта)	**10**	Курсовая работа соответствует всем требованиям к ее оформлению. При оформлении курсовой работы использовались современные средства визуализации информации.	
	5	Курсовая работа частично соответствует требованиям к ее оформлению, представленный материал проиллюстрирован не качественно. При оформлении курсовой работы (проекта) современные средства визуализации информации не использовались.	
Содержание курсовой работы (проекта)	**60**	В курсовой работе подобраны необходимые информационные источники, информация использована корректно, все вопросы и разделы освещены полностью, для выводов приведены достаточные обоснования.	
	40	В курсовой работе подобраны	

		не все необходимые информационные источники, информация использована не везде корректно, не все вопросы и разделы освещены полностью, для выводов не приведены достаточные обоснования.	
	20	В курсовой работе отсутствуют некоторые разделы, или их название не отвечает содержанию.	
Защита курсовой работы (проекта)	**30**	Студент продемонстрировал полное понимание всех положений защищаемой работы, четкость и правильность изложения ответов на все вопросы, заданные преподавателем.	
	20	Студент продемонстрировал понимание основных положений защищаемой работы, четкость и правильность изложения ответов на большую часть вопросов, заданных преподавателем.	
	10	Студент дал недостаточно полные ответы на вопросы, на некоторые из них дал ошибочные ответы или не ответил.	
ИТОГО:			*Указывается итоговый балл по всем критериям*

Рекомендации:

___

___

___

Ведущий преподаватель_____________ ___________________________/___________________________

(ФИО) *(подпись)*

Методические рекомендации по выполнению основной части работы

Переход высшей школы на систему образования с подготовкой бакалавров и магистров диктует необходимость создания методического обеспечения для разработки магистерских диссертаций. Среди различных дисциплин, обеспечивающих выполнение такой задачи, важное место принадлежит экспериментальным исследованиям.

В процессе организации экспериментальных исследований решается широкий круг задач, связанных с постановкой исследования, разработкой программы его проведения, оценкой полученных результатов. В ряде случаев эксперименты выполняются в условии действия случайных факторов, и обработка результатов таких экспериментов связана с использованием методов теории вероятностей и математической статистики.

Основное теоретическое содержание пособия составляют вопросы, связанные с оценкой погрешности измерений, аппроксимацией экспериментальных кривых, корреляционно-регрессионным анализом экспериментальных данных, планированием экспериментов.

В пособии даются методические рекомендации по предварительной обработке экспериментальных данных и оценке погрешности прямых измерений.

Значительное внимание уделено сглаживанию эмпирических зависимостей методом наименьших квадратов. Помимо линейной аппроксимации, довольно часто используемой в практике экспериментальных исследований, приводится материал по нелинейной аппроксимации, поскольку электротехнические процессы в ряде случаев описываются экспоненциальной и другими нелинейными кривыми.

Внедрение математических методов планирования экспериментов позволяет в значительной степени исключить интуитивный, волевой подход и заменить его научно-обоснованной программой проведения экспериментальных исследований, содержащей объективную оценку полученных результатов. При этом осуществляется управление процессов проведения эксперимента с минимальным числом опытов. Известно, что методы планирования экспериментов базируются на теоретических положениях корреляционно-регрессионного анализа.

Авторы надеются, что методические рекомендации, изложенные в данном пособии, будут также полезны студентам и аспирантам других направлений, работающим над магистерскими и кандидатскими диссертациями.

1 Рекомендации по выполнению курсовой работы

1.1 Примерное содержание и последовательность выполнения курсовой работы

Курсовой проект должен включать следующие разделы:

1. Определение относительной погрешности результатов измерения физических величин.
2. Обработку экспериментальных данных путем выполнения линейной и нелинейной аппроксимации.
3. Проведение корреляционного анализа экспериментальных данных.
4. Обработку результатов многофакторного эксперимента

В процессе выполнения курсового проекта рекомендуется соблюдать предложенный порядок выполнения расчетов.

1.2 Указания по оформлению расчетно-пояснительной записки

Исходными данными для выполнения курсового проекта являются материалы, накопленные на факультете в процессе проведения различного рода экспериментов и задаваемые преподавателем.

Курсовой проект должен содержать расчетно-пояснительную записку (15-20 с) формата А4 (210 х 297). Необходимые рисунки, получаемые в результате расчетов, размещаются по тексту и выполняются в одном из графических редакторов.

Расчетно-пояснительная записка должна быть написана или набрана на ПК на листах белой бумаги с одной стороны с оставлением полей: с левой стороны – не менее 35 мм; с правой – 10 мм; сверху и снизу – 20 мм. Межстрочный интервал – 1,5. Страницы должны быть пронумерованы. Записку следует подписать и поставить дату окончания работы. В конце записки приводятся выводы, список использованных источников, содержание.

Титульный лист оформляется в соответствии с принятой на факультете формой.

2 Методические указания по выполнению курсовой работы

2.1 Предварительная обработка экспериментальных данных

Прежде чем выполнить оценку погрешности проведенных измерений необходимо провести предварительную обработку полученных данных для ускорения дальнейших расчетов и предупреждения ошибок.

Во-первых, необходимо правильно записать полученный цифровой материал. Экспериментальные данные могут быть представлены в символьной форме, в виде таблиц, графиков, осциллограмм, рисунков. В дальнейшем будем рассматривать цифровую форму представления данных, как наиболее универсальный и широко распространенный метод представления информации.

После проведения измерений и вычислений не менее важно грамотно округлить и записать конечный результат. Для этого существуют правила, которые регламентируются стандартом СЭВ 547-77 при представлении нормативно-технической и технологической документации. Существо рекомендаций сводится к следующему.

Запись цифр материала необходимо осуществлять так, чтобы все нули, стоящие справа и слева в данном числе и обозначающие десятичные разряды, представлялись в виде целых положительных чисел или степеней десяти. Например, интенсивность отказов электротехнического изделия $\lambda = 0{,}006\,ч^{-1}$ следует записывать $\lambda = 6 \cdot 10^{-3}\,ч^{-1}$.

Числовые значения величин должны указываться с одинаковым числом разрядов:

– правильная запись: 21,0 ± 0,2; 15,13 ± 0,20;

– неправильная запись: 21 ± 0,2; 15,13 ± 0,2.

Числовое значение величины и ее погрешность (отклонение) необходимо записывать с указанием одной и той же физической величины.

Округление числа заключается в отбрасывании значащих цифр справа до определенного разряда с возможностью изменения цифры этого разряда. Например, округление числа 163,92 до четырех значащих цифр дает 163,9. При этом следует учитывать, что если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не меняется. Округление цифры 15,61 до трехзначной позволяет записать 15,6. Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на 1. При округлении цифры 13,86 до трехзначной цифры мы получим 13,9. Округление следует выполнять сразу до желаемого количества значащих цифр. Например, число 239,44 может быть округлено до 239 или до 239,4. Поэтапное округление с изменением нескольких разрядов не допустимо, то есть нельзя число 239,44 вначале округлить до 239,4, а затем до 239.

Прежде чем рассматривать параметры, характеризующие полученную совокупность экспериментальных данных, необходимо проверить имеющийся массив на наличие так называемых выскакивающих значений (промахов). Они являются, как правило, следствием какой-либо грубой ошибки в проведении данных измерений, незамеченной экспериментатором. Речь может вестись о величинах, существенно отличающихся от остальных, например в несколько раз. Причины таких ошибок могут быть сбои в аппаратуре, ложное проставление экспериментатором результатов из-за невнимательности или усталости. Промахи нужно исключить, однако руководствоваться только эмоциями некорректно.

Методы, обычно применяемые при выявлении выскакивающих значений, довольно громоздки. Однако существует достаточно быстрый способ, позволяющий решить задачу с приемлемой точностью [1]. Метод основан на оценке различий крайних значений рассматриваемой совокупности экспериментальных данных. Рассмотрим конкретный пример обработки данных. Пусть в результате эксперимента получен следующий массив результатов измерений: 1,06; 1,03; 1,07; 1,01; 1,29; 1,05; 1,04; 1,12.

Расположим полученные данные в порядке возрастания и пронумеруем их

1	2	3	4	5	6	7	8
1,01	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,12	1,29

Рассмотрение полученного ряда показывает, что выскакивающим значением является величина под номером 8. Обозначим приведенные данные через x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и укажем их номера в виде индекса, например выскакивающее значение x_8.

Рассчитав отношение $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$, получим

$$\frac{x_8 - x_7}{x_8 - x_1} = \frac{1{,}29 - 1{,}12}{1{,}29 - 1{,}01} = 0{,}61.$$

Полученное значение оценим с использованием данных, приводимых в Приложении А. В таблице Приложения А для числа экспериментальных данных $n = 8$ и уровня достоверности 99 % указано пограничное значение отношения $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ равное 0,59. Так как вычисленное значение больше табличного, мы в праве рассматривать вариант 8 в качестве промаха и исключить его из дальнейшего рассмотрения.

Вместе с тем возможен случай, когда отношение $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ будет находиться в диапазоне достоверности от 95 до 99 %. В этом случае мы не имеем права говорить о безоговорочном исключении выскакивающего значения, можно говорить только о значительной вероятности грубой ошибки. В такой ситуации лучше провести дополнительное измерение, но при условии, что найденное в опыте значение $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ меньше пограничного уровня достоверности 95 %, тогда предположение об исключении выскакивающего значения является безоговорочным.

В Приложении А приводятся также другие возможные варианты появления выскакивающих значений в массиве экспериментальных данных, это отношение $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$, когда выскакивающими являются наибольшее и наименьшее значения измеряемого параметра и отношение $\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}}$, когда выскакивающими являются сразу два наибольших значения.

2.2 Оценка случайной погрешности прямых измерений

При прямых измерениях числовые значения измеряемой величины получают сразу из показаний прибора, с помощью которого выполняются измерения. Результат каждого прямого измерения включает случайную ошибку, которая зависит от большого числа случайных факторов.

При проведении n измерений одной и той же величины получаются результаты x_1, x_2, …, x_n. В математической статистике доказано, что при отсутствии систематических погрешностей (или после устранения их) наилучшим приближением к измеряемой величине является среднее статистическое значение результатов измерения.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i . \qquad (2.1)$$

Разности между средним значением измеряемой величины $\bar{x}$ и значениями x_1, x_2, …, x_n, полученными при отдельных измерениях, называются абсолютными ошибками

$$\Delta x_1 = \bar{x} - x_1,\ \Delta x_2 = \bar{x} - x_2,\ ...,\ \Delta x_n = \bar{x} - x_n . \qquad (2.2)$$

Рассматриваемые значения абсолютных ошибок могут быть как положительными, так и отрицательными.

В основе теории погрешностей лежат два предположения, подтверждаемые опытом.

1. При большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака, то есть погрешности, как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения, встречаются одинаково часто.

2. Большие (по абсолютной величине) погрешности встречаются реже, чем малые, то есть вероятность появления погрешностей уменьшается с ростом величины погрешности.

Для определения средней абсолютной ошибки результата измерений берут среднее арифметическое абсолютных значений отдельных ошибок

$$\Delta\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \,. \qquad (2.3)$$

Если число измерений достаточно велико (строго говоря, при $n \to \infty$), то согласно предположению 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 0 \,. \qquad (2.4)$$

Из теории ошибок известно, что плотность распределения случайных ошибок зависит от их величины и выражается формулой нормального распределения (закон Гаусса)

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\overline{x}-x_i)^2}{2\sigma^2}} \,, \qquad (2.5)$$

где $\overline{x}$ – истинное (среднеарифметическое значение измеряемой величины;

σ^2 – дисперсия;

σ – средняя квадратическая погрешность.

Дисперсия генеральной совокупности для n полученных значений случайной величины x_1, x_2, …, x_n определяется по формуле

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2 \,. \qquad (2.6)$$

Она характеризует степень разброса x_i вокруг $\overline{x}$.

Стандартное отклонение (среднеквадратическую ошибку) отдельного опыта находят по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}\,. \qquad (2.7)$$

Кривая плотности нормального распределения показана на рисунке 1.1.

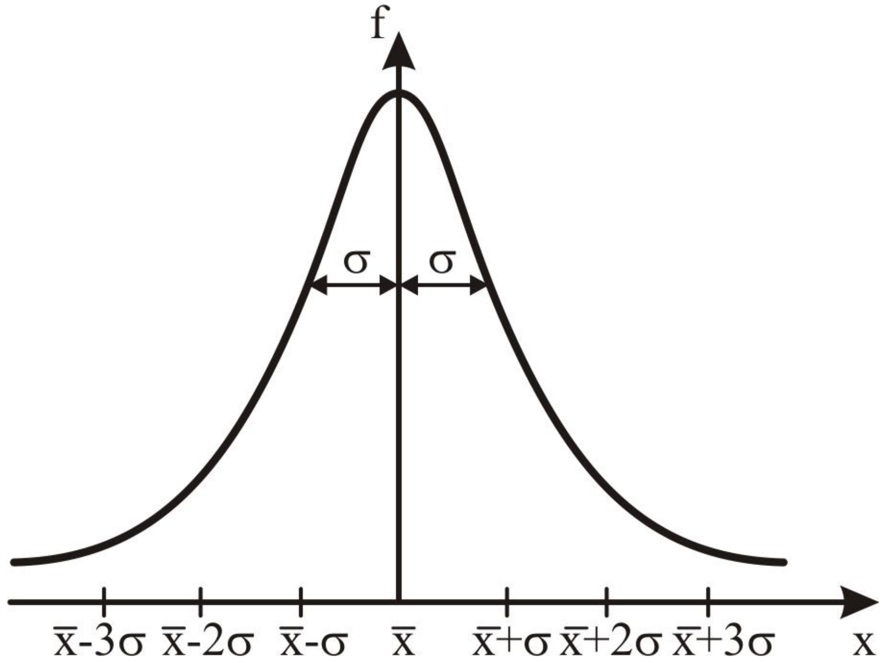

Рисунок 1.1 – Кривая плотности нормального распределения

Кривая плотности распределения случайной величины x характеризует частоту попадания измеряемой величины x_i в интервалы $\bar{x}+\sigma$; $\bar{x}+2\sigma$; $\bar{x}+3\sigma$ и аналогично для отрицательных значений $\bar{x}-\sigma$; $\bar{x}-2\sigma$; $\bar{x}-3\sigma$.

В принципе цифры перед σ могут быть и дробными, поэтому используют общее обозначение в виде безразмерного коэффициента k_α.

Из приведенной на рисунке 1.1 кривой можно установить важную закономерность: в диапазон $\bar{x}+\sigma$ попадает 68 % всех измеренных величин, в диапазон $\bar{x}+2\sigma$ – 95 %, а в диапазон $\bar{x}+3\sigma$ – 99,7 %.

Для полноты описания случайной погрешности необходимо уметь указывать вероятность α попадания результата измерения x_i в любой заданный интервал полуширины Δx кривой распределения случайных ошибок $(\bar{x} - \Delta x) < x_i < (\bar{x} + \Delta x)$. При этом Δx удобно выражать через σ и коэффициент k_α, то есть

$$\Delta x = k_\alpha \sigma. \qquad (2.8)$$

Интервал, в котором с заданной вероятностью находится истинное значение измеряемой величины, называется доверительным интервалом, а соответствующая вероятность α – доверительной вероятностью этого интервала. Зависимость доверительной вероятности от коэффициента k_α приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Зависимость доверительной вероятности от коэффициента k_α

$k_\alpha = \dfrac{\Delta x}{\sigma}, \quad k_\alpha = \dfrac{\Delta x}{\sigma_{\bar{x}}}$	Доверительная вероятность α
1,0	0,680
2,0	0,950
2,6	0,990
3,0	0,997

Вероятность α в ряде случаев называется надежностью.

Задавшись α, мы по таблице 1.1 можем определить величину k_α и, зная σ, определить Δx. Указанные рассуждения справедливы при большом числе измерений ($n \to \infty$). На практике обычно выполняется ограниченное число измерений. В этом случае величина $\bar{x}$ называется выборочным средним (в отличие от генерального среднего, получаемого при $n \to \infty$). Выборка означает, что из бесконечного множества (генеральной совокупности) берется наугад n значений случайной величины x_i.

Если истинное значение x неизвестно, оценка дисперсии σ^2 является так называемая выборочная дисперсия или дисперсия выборки

$$\Delta S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n-1}. \tag{2.9}$$

При ограниченном числе измерений n величина ΔS_n^2 является лишь оценкой дисперсии σ^2, а не равна ей, то есть при ограниченном числе измерений мы можем непосредственно определить лишь величину ΔS_n^2, а не σ^2.

Корень квадратный из выборочной дисперсии определяет выборочную среднюю квадратическую погрешность

$$\Delta S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n-1}}. \tag{2.10}$$

Покажем теперь, как найти оценку погрешности результата серии измерений. Если мы проведем несколько серий, каждая из которой будет состоять из n измерений, то мы будем получать после обработки каждый раз различное значение $\overline{x}$, то есть среднее арифметическое значение измеряемой величины для каждой серии само является случайной величиной и описывается нормальным законом распределения с дисперсией $\sigma_{\overline{x}}^2$.

При ограниченном числе измерений и нескольких сериях k приблизительным выражением $\sigma_{\overline{x}}^2$ будет $\Delta S_{\overline{x}}^2$

$$\Delta S_{\overline{x}}^2 = \frac{\Delta S_n^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}. \tag{2.11}$$

Отсюда среднеквадратическая погрешность результата серии измерений равна

$$\Delta S_{\overline{x}} = \sqrt{\Delta S_{\overline{x}}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}. \tag{2.12}$$

Математическая статистика предлагает в качестве среднего значения случайной погрешности использовать именно величину $\Delta S_{\overline{x}}$. Эту величину называют среднеквадратическим отклонением среднего значения. Число $\Delta S_{\overline{x}}$ характеризует точность определения искомой величины x путем вычисления среднестатистического значения $\overline{x}$ от истинного значения x. Не случайно, ГОСТ 8.201–76 регламентирует доверительную вероятность именно для этого показателя. Согласно этого ГОСТ в технических измерениях следует принимать доверительную вероятность $\alpha = 0{,}95$, а в научных исследованиях $\alpha = 0{,}68$.

Оценки дисперсий σ^2 и $\sigma_{\overline{x}}^2$ являются предельными. Они справедливы при $n \to \infty$, то есть при большом числе n. При малых значениях n эти оценки сами являются случайными величинами и в лучшем случае определяют лишь порядок величины дисперсии. В силу этого при нахождении границы доверительного интервала для величины x при малых значениях n (n < 20) мы не можем пользоваться коэффициентом $k_\alpha = \dfrac{\Delta x}{\sigma_{\overline{x}}}$, поскольку величина $\sigma_{\overline{x}}$ нам неизвестна.

Для получения границ доверительного интервала в этом случае нам необходимо ввести новый коэффициент t_α. Этот коэффициент был предложен 1908 году английским математиком и химиком Госсетом, публиковавшем свои работы под псевдонимом «Стьюдент» – студент, и получил в последствии название коэффициента Стьюдента. При $n \to \infty$ (практически при n > 20) распределение Стьюдента переходит в нормальное распределение с единичной дисперсией.

Распределение Стьюдента позволяет оценить величину надежности α по заданному значению Δx или наоборот, по заданной величине надежности α найти величину погрешности Δx. Таким образом, при недостаточно большом числе измерений (практически при n < 20) при расчетах Δx с учетом заданной надежности α необходимо вводить вместо коэффициентов k_α коэффициент Стьюдента t_α, зависящий от числа произведенных измерений и от величины надежности α

$$t_\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta S_{\bar{x}}} = \frac{\Delta x}{\Delta S_n / \sqrt{n}}, \qquad (2.13)$$

где $\Delta S_{\bar{x}}$ – определяется по формуле (2.12), а ΔS_n, соответственно по формуле (2.10).

При $n \to \infty$ коэффициенты t_α переходят в коэффициенты k_α.

В Приложении Б приводятся значения коэффициентов Стьюдента t_α для разных значений надежности α и различных значениях n.

Согласно математической статистике для корректного представления результата измерений следует в начале задаться его надежностью (доверительной вероятностью α). Зная вероятность того, что истинное значение измеряемой величины x попадает в доверительный интервал, то есть, другими словами, задавая надежность α, равную определенной величине (например, α = 0,99) по числу проведенных измерений (например, n = 8) по таблице Приложения Б для числа степеней свободы f = n – 1 можно установить значение коэффициента Стьюдента. В нашем случае оно равно 3,50. Тогда, определив предварительно $\Delta S_{\bar{x}}$, использую формулу (2.13), удается найти погрешность Δx по формуле

$$\Delta x = t_\alpha \Delta S_{\bar{x}}. \qquad (2.14)$$

После этого результат измерения можно записать в виде $(\bar{x} - \Delta x) < x_i < (\bar{x} + \Delta x)$ или $x = (\bar{x} \pm \Delta x)$, что означает, что истинное значение величины x попадает в доверительный интервал $[(\bar{x} - \Delta x), (\bar{x} + \Delta x)]$ с надежность, равной α.

Данный метод оценки погрешности среднего измерения годен для любого числа измерений.

Часто при обработке результатов экспериментальных исследований целесообразно кроме абсолютной погрешности использовать относительную погрешность измеряемой величины. Относительной погрешностью измеряемой величины x называется отношение абсолютной погрешности Δx к истинному значению x.

В качестве наилучшей оценки относительной погрешности ε обычно используется отношение Δx к среднестатистическому значению $\bar{x}$

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \qquad (2.15)$$

Относительная погрешность является безразмерной величиной и ее часто выражают в процентах.

Таким образом, изложенный теоретический материал позволяет сформулировать следующий алгоритм математической обработки результатов прямых измерений.

1. Записывается массив полученных экспериментальных данных.

2. Полученные данные располагаются в порядке возрастания и нумеруются.

3. Делается оценка наличия выскакивающих данных и при их наличии они отбрасываются.

4. Определяется среднее арифметическое значение измеряемой величины $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

5. Вычисляются погрешности отдельных измерений $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$.

6. Определяются квадраты погрешностей отдельных измерений $\Delta x_i^2 = \left(\bar{x} - x_i\right)^2$.

7. Рассчитывается средняя квадратическая погрешность результата серии измерений $\Delta S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i\right)^2}{n(n-1)}}$.

8. Задается значение надежности α.

9. Определяется коэффициент Стьюдента t_α для выбранной надежности α и числа проведенных измерений по таблице Приложения Б.

10. Находятся границы доверительного интервала по формуле $\Delta x = t_\alpha \Delta S_{\bar{x}}$.

11. Если величина погрешности результата измерений, определенная по п. 10, окажется сравнимой с величиной погрешности прибора, то в качестве границы доверительного интервала следует взять величину

$$\Delta x = \sqrt{t_\alpha^2 \Delta S_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{t_\alpha(\infty)}{3}\right)^2 \delta^2},$$

где δ – величина погрешности прибора.

12. Окончательный результат записывается в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x$.

13. Выполняется оценка относительной погрешности результата серии измерений $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100$ %.

2.3 Аппроксимация экспериментальных кривых

Одним из наиболее распространенных методов, используемых при обработке экспериментальных данных, является метод наименьших квадратов.

Линейная аппроксимация. Метод наименьших квадратов в большинстве случаев применяется, если исследуемая функция является линейной или ее можно свести к линейной с помощью элементарных преобразований.

Широкое применение линейной аппроксимации обусловлено возможностью разложения любой гладкой функции в ряд Тейлора. При этом такое разложение имеет хорошую точность в некотором интервале значений аргумента.

Итак, мы полагаем, что между величинами x и y существует линейная зависимость (хотя бы на определенном интервале значений x). Тогда функцию y = f(x) можно записать в следующем виде

$$y = \alpha + \beta x, \tag{2.16}$$

где α и β – некоторые постоянные коэффициенты.

Коэффициенты α и β будем определять, пользуясь экспериментальными данными с применением метода наименьших квадратов.

Для начала в выражении (2.16) заменим неизвестные постоянные α и β на переменные a и b. Сумма квадратов для линейной функции (2.16) приобретет вид

$$q = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y_i)^2. \tag{2.17}$$

Рассматривая функциональную зависимость (2.17) мы видим, что величина q является функцией двух аргументов a и q, так как значения x_i и y_i нами получены из опыта. Следовательно, необходимо варьировать переменными a и b до тех пор, пока величина q, не достигнет минимума. После этого для постоянных коэффициентов α и β линейной зависимости (2.16) можно взять найденные значения переменных a и b, которые минимизируют выражение (2.17) при заданных значениях x_i и y_i.

Отыскание минимума функции двух переменных $q = f(a, b)$ представляет собой типичную задачу математического анализа. В точке экстремума первые частные производные q, взятые по a и b обращаются в нуль

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 0, \frac{\partial q}{\partial b} = 0. \tag{2.18}$$

Это условие дает нам систему двух уравнений для определения двух неизвестных a и b.

Дифференцирование правой части уравнения (2.17) и алгебраические преобразования приводят систему уравнений (2.18) к стандартной форме

$$\begin{aligned} &a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ &an + \sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Фактически мы получаем систему двух линейных алгебраических уравнений для двух неизвестных величин a и b.

Решение такой системы уравнений можно записать в виде

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{2.20}$$

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{2.21}$$

Как следует из выражения (2.17) данная квадратичная зависимость всегда будет положительной.

Частным случаем линейной зависимости является пропорциональная зависимость

$$y = \beta_0 x. \tag{2.22}$$

Применяя метод наименьших квадратов, заменим β_0 на b_0, получим уравнение

$$q = \sum_{i=1}^{n} (b_0 x_i - y_i). \tag{2.23}$$

Производную $q(b_0)$ по параметру b_0 приравняем нулю, получим уравнение

$$2\sum_{i=1}^{n} (b_0 x_i - y_i) x_i = 0. \tag{3.41}$$

Из полученного уравнения выразим величину b_0 через результаты эксперимента

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{2.24}$$

Нелинейная аппроксимация. Нелинейную аппроксимацию можно применить для квадратичной зависимости тип $y = a + bx + cx^2$ [10], а также некоторых случаев нелинейных зависимостей, например, для уравнения типа $y = \alpha e^{-\gamma\tau}$, довольно часто используемого в электротехнике.

Рассмотрим этот вопрос применительно к последней зависимости более подробно. В этом случае целесообразно искать не минимум суммы квадратов функции $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha e^{-\gamma\tau_i}\right)^2$, а минимум суммы квадратов отклонений логарифмов этих функций $\sum_{i=1}^{n} \left[\ln y_i - \ln\left(\alpha e^{-\gamma\tau_i}\right)\right]^2$.

В результате мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} (\ln y_i - \ln\alpha + \gamma\tau_i) = 0; \\ &\sum_{i=1}^{n} (\ln y_i - \ln\alpha + \gamma\tau_i)\tau_i = 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

После преобразования система уравнений будет выглядеть следующим образом

$$-\gamma\sum_{i=1}^{n}\tau_i + n\ln\alpha = \sum_{i=1}^{n}\ln y_i;$$

$$-\gamma\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\tau_i\ln\alpha = \sum_{i=1}^{n}\tau_i\ln y_i. \tag{2.26}$$

Решение системы алгебраических уравнений позволяет определить параметры γ и $\ln\alpha$

$$\gamma = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln y_i\right) - n\sum_{i=1}^{n}\tau_i\ln y_i}{n\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)^2}; \tag{2.27}$$

$$\ln\alpha = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\ln y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}\tau_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)^2}. \tag{2.28}$$

2.4 Корреляционный анализ экспериментальных данных

Корреляционный анализ имеет своей целью количественное определение тесноты связи между признаками.

Простейшей, но достаточно информативной характеристикой тесноты связи двух величин x и y является коэффициент корреляции. В теории вероятностей этот показатель определяется с помощью других вероятностных характеристик.

Линейный коэффициент корреляции был впервые введен в 40-х годах XIX столетия Пирсоном, Эджвортом и Велдоном. На практике применяются различные модификации формул для расчета коэффициента корреляции.

Наилучшим приближенным значением коэффициента корреляции, который можно вычислить с помощью результатов измерений, является величина r_{xy}, определяемая по формуле

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}, \tag{2.29}$$

где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Таким образом. Численное значение коэффициента корреляции характеризует близость к линейной зависимости между исследуемыми величинами x и y. Целесообразность применения коэффициента корреляции обусловлена в том случае, если близость к линейной зависимости обоснована теоретически и связана с тем, что в первом приближении многие сложные зависимости полагаются линейными.

Линейный коэффициент корреляции имеет большое значение при исследовании процессов и явлений, распределение которых близко к нормальному.

Коэффициент корреляции имеет ряд важных свойств:

1. Абсолютное значение коэффициента корреляции не превышает 1 $(|r_{xy}| \le 1)$. Линейный коэффициент корреляции изменяется в пределах от (– 1) до (+ 1).

2. Легко доказывается, что равенство $r_{xy} = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы величины x и y были независимы.

3. Если $r_{xy} = 1$, то это означает, что все точки (x и y) находятся на прямой и зависимость между x и y является функциональной ($y = kx + b$, k и b – постоянные величины).

4. Коэффициент корреляции однозначно определяет характер зависимости $y = f(x)$. Если $r_{xy} > 0$, то величины x и y одновременно возрастают или убывают (с точностью до случайных погрешностей). Если $r_{xy} < 0$, то с ростом x величина y убывает, а с уменьшением x – величина y растет.

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе t-критерия Стьюдента. При этом выдвигается и проверяется гипотеза H_0 о равенстве коэффициента корреляции нулю ($r_{xy} = 0$). При проверке этой гипотезы используется t-статистика

$$t_p = \sqrt{\frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}}(n-2)} = \frac{|r_{xy}|}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}}\sqrt{n-2}\,. \tag{2.30}$$

При выполнении H_0 t-статистика имеет распределение Стьюдента с входными параметрами (α, $f = n - 2$). Если расчетное значение t_p больше табличного значения t_α, то гипотеза H_0 отвергается, что свидетельствует о значимости линейного коэффициента корреляции, а, следовательно, о статистической существенности зависимости между x и y.

Рассматриваемый критерий используется при числе наблюдений $n < 50$. При числе наблюдений $n > 100$ можно применить другую форму t-статистики

$$t_p = \frac{|r_{xy}|}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}} \sqrt{n}\,. \qquad (2.31)$$

Необходимо отметить также, что если по предварительным теоретическим исследованиям связь между величинами в принципе нелинейна, то использование коэффициента корреляции в представленном виде является не корректным. В таких случаях анализ нелинейной связи следует проводить с помощью так называемых корреляционных отношений. Метод их применения дается в специальной литературе по статистике.

2.5 Обработка результатов многофакторного эксперимента

В отличие от достаточно широко распространенного однофакторного эксперимента, когда изучается действие каждого фактора в отдельности, существует метод, позволяющий осуществлять эксперимент при варьировании несколькими факторами сразу. Это способствует повышению эффективности экспериментальных исследований, так как интересующий экспериментатора параметр определяется с меньшей ошибкой, то есть при увеличении числа факторов повышается точность экспериментов.

План многофакторного эксперимента выполняется в несколько этапов:

- выбор уравнения регрессии;
- определение необходимого числа опытов;
- составление плана многофакторного эксперимента;
- расчет коэффициентов регрессии;
- расчет дисперсии воспроизводимости и дисперсии коэффициентов регрессии;
- оценка значимости коэффициентов регрессии;
- проверка адекватности модели.

Выбор уравнения регрессии. Математическая задача планирования эксперимента может быть записана в следующем виде

$$r = f(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (2.32)$$

где r – выход процесса, то есть параметр, который изучается;

x_1, x_2, …, x_n – переменные факторы, которыми можно варьировать.

В общем случае мы не располагаем полным знанием механизма изучаемого явления и, следовательно, вид функции r нам не известен. В этом случае пользуются разложением функции в степенной ряд.

Точность, с которой степенной ряд описывает процесс, зависит от порядка (степени) ряда, то есть от того с какими показателями степени представлены последние члены ряда. Если описать какой-либо процесс в узком интервале переменных, то почти всегда можно воспользоваться частью степенного ряда, отбросив члены высших порядков. Только для описания оптимальной области может возникнуть необходимость использования ряда, содержащего члены второго, а иногда и третьего порядка.

Пользуясь результатами эксперимента можно получить лишь оценки модели, представленной уравнением (2.32). В зависимости от числа изучаемых факторов, определяющих условия прохождения процесса, можно записать в общем виде уравнение регрессии без членов высших порядков:

– для двух факторов

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{1,2}x_1x_2; \qquad (2.33)$$

– для трех факторов

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{1,2}x_1x_2 + b_{1,3}x_1x_3 + b_{2,3}x_2x_3 + b_{1,2,3}x_1x_2x_3, \qquad (2.34)$$

где $\hat{y}$ – выборочная оценка для выходного параметра;

x_1, x_2, … – значения факторов;

b_0 – свободный член, равный выходу процесса при $x = 0$;

b_1, b_2, b_3 – коэффициенты регрессии соответствующих факторов, указывающие на влияние того или иного фактора на изучаемый процесс;

$b_{1,\,2}$, $b_{1,\,3}$, $b_{2,\,3}$ – коэффициенты регрессии при произведениях факторов, свидетельствующие о наличии двойного взаимодействия между факторами;

$b_{1,\,2,\,3}$ – коэффициент регрессии, указывающий на тройное взаимодействие факторов.

Аналогично записывается уравнение для четырех и более факторов.

Определение необходимого числа опытов. При составлении плана проведения экспериментальных исследований для каждого фактора выбирается определенное число уровней варьирования. Поэтому необходимое число опытов устанавливается числом возможных комбинаций уровней варьирования независимых переменных, а также количеством повторных опытов. В большинстве случаев планирование экспериментов осуществляется по схеме полного факторного эксперимента. Она предусматривает варьирование всех исследуемых факторов на двух уровнях:

- верхнем, имеющему максимальное значение рассматриваемого фактора;
- нижнем, соответствующему минимальному значению фактора.

В этом случае необходимое число опытов определяется по формуле

$$m = 2^{i}, \tag{2.35}$$

где i – число рассматриваемых факторов.

Варьирование переменными на двух уровнях позволяет значительно уменьшить объем экспериментальной и счетной работы.

Значения (уровни) факторов удобно задавать в кодированных величинах: верхний уровень фактора (+ 1), нижний (– 1), средний или основной (условный нулевой) уровень 0_{x_i}.

Условный нулевой уровень – это такое значение переменных x_i, в области которых начинается изучаемый процесс. Обычно нулевой уровень выбирается достаточно близко к центру факторного пространства. При отсутствии каких-либо теоретических или практических соображений этот уровень выбирается произвольно.

Основное преимущество многофакторного эксперимента заключается в том, что в процессе его проведения варьируются одновременно все факторы. Это приводит к тому, что дисперсия при оценке коэффициентов регрессии оказывается в m раз меньше ошибки опыта.

Кроме выбора уровней необходимо установить единицы варьирования, то есть величины, на которые в сторону увеличения или уменьшения мы будем изменять данный фактор от нулевого уровня. Обозначим значение единицы варьирования через μ_i. Указанный параметр нельзя выбирать слишком малым, чтобы не получить результат ниже ошибки измерения. При большом значении μ_i возникает опасность получения уравнения, не содержащего членов второй, третьей и других более высоких степеней. Таким образом, в каждом конкретном опыте единицы варьирования нужно задавать исходя из опыта и интуиции исследователя.

Обычно выбирают μ_i = 0,5 … 0,3 от значения области определения фактора.

Основное требование к интервалу варьирования состоит в том, чтобы он не превышал удвоенную квадратичную ошибку опыта. Это требование связано с тем, что интервал между двумя соседними уровнями должен значимо (не случайно) влиять на выходной параметр. Обычно интервал варьирования выбирается на основании априорной информации (или интуитивно), а затем уточняется (если он выбран неудачно) после получения математической модели. Удачно выбранный интервал варьирования факторов гарантирует получение достоверной математической модели. Определенные сведения о нулевых уровнях и интервалах варьирования могут быть получены на этапе предварительного эксперимента.

Уровни (0_{x_i} – μ_i) и (0_{x_i} + μ_i) обозначим в кодированном виде соответственно (– 1) и (+ 1). После этого можно приступать к составлению матрицы планирования эксперимента.

Составление плана многофакторного эксперимента. План эксперимента удобно задавать таблицей, называемой матрицей планирования эксперимента, включающей в себя последовательность проведения опытов, значения факторов и эффектов и их взаимодействий, а также значения исследуемой функции. При этом должны быть исчерпаны все возможные значения комбинаций факторов, варьируемых на верхнем и нижнем уровнях.

Условия эксперимента представляются в виде таблицы – матрицы планирования, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы – значениям факторов. Матрица планирования обычно записывается не в физических, а в кодированных переменных.

Для двухфакторного эксперимента матрица планирования, включающая четыре опыта, имеет вид (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Матрица планирования эксперимента для двух факторов

Номер опыта	Уровень фактора			Расчетные показатели	Выходной параметр
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	$\bar{y}_m$
1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	$\bar{y}_1$
2	+ 1	+ 1	– 1	– 1	$\bar{y}_2$
3	+ 1	– 1	+ 1	– 1	$\bar{y}_3$
4	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	$\bar{y}_4$

Во втором столбце таблицы 2.2 даются значения фиктивной переменной $x_0 = 1$, вводимой формально для расчета b_0, в третьем и четвертом столбцах – значения переменных x_1 и x_2 (эти две переменные являются управляемыми и определяют собственно планирование). В пятом (расчетном столбце) приводится значение произведения x_1x_2, вводимого в матрицу планирования для вычисления в последующем коэффициентов регрессии $b_{1,2}$, а в шестом – значения результатов наблюдения в каждом из четырех опытов. Первая строка матрицы соответствует первому варианту опыта, в котором обе переменные x_1 и x_2 находятся на нижнем уровне, вторая строка – второму варианту опыта, в котором первая переменная находится на верхнем уровне, а вторая – на нижнем уровне и т. д.

Этот план соответствует уравнению регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{1,2}x_1x_2$.

Для трехфакторного эксперимента матрицу планирования можно получить из матрицы для двух факторов, повторив ее дважды – один раз при значениях x_3 на нижнем уровне, а второй раз – при значениях x_3 на верхнем уровне. В результате мы получим следующую таблицу (таблица 2.3).

Таблица 2.3 – Матрица планирования трехфакторного эксперимента

Номер опыта	Уровень фактора				Расчетные показатели				Выходной параметр
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$\bar{y}_m$
1	+	–	–	–	+	+	+	–	$\bar{y}_1$
2	+	+	–	–	–	–	+	+	$\bar{y}_2$
3	+	–	+	–	–	+	–	+	$\bar{y}_3$
4	+	+	+	–	+	–	–	–	$\bar{y}_4$
5	+	–	–	+	+	–	–	+	$\bar{y}_5$
6	+	+	–	+	–	+	–	–	$\bar{y}_6$
7	+	–	+	+	–	–	+	–	$\bar{y}_7$
8	+	+	+	+	+	+	+	+	$\bar{y}_8$

В том случае, если необходимо учесть четыре фактора, матрица планирования эксперимента будет содержать 16 наблюдений. Строится она в такой последовательности. Сначала берется матрица для двух факторов (без их произведений), затем она повторяется дважды при $x_3 = -1$ и $x_3 = +1$. Полученная матрица для трех факторов снова повторяется дважды для $x_4 = -1$ и $x_ч = +1$. Кроме столбцов, содержащих уровни факторов, в матрицу добавляются значения произведений факторов x_1x_2, x_1x, x_2x_3, $x_1x_2x_3$, и т. д.

Аналогичный подход может быть использован для составления матрицы планирования эксперимента при наличии пяти и более факторов. Однако на практике при постановке многофакторного эксперимента рассмотрение четырех и более факторов производится крайне редко, так как это не дает большого выигрыша в получении информации от эксперимента, а лишь приводит к повышенным затратам средств и времени на реализацию опытов.

Обычно в многофакторном эксперименте важно оценить эффект влияния и направление действия того или иного фактора, а также возможность взаимодействия между ними. Два-три фактора вполне обеспечивают выполнение такого условия.

Рассматривая планы полного факторного эксперимента для двух и трех факторов, нетрудно установить общую определенную закономерность получения таких планов. В первом столбце матрицы для переменной x_1 знаки меняются в каждой строке, во втором столбце для переменной x_2 – через две строки, а для i – переменной знаки будут меняться через $2^i – 1$ строки.

Матрица планирования эксперимента показывает, в каких точках факторного пространства необходимо производить измерение отклика, т. е. произвести опыты. Каждый опыт состоит в установке нужных значений факторов и в измерении отклика. Требуемые значения кодированных факторов устанавливаются варьированием или принятием соответствующих значений физических переменных.

После построения матрицы планирования эксперимента приступают непосредственно к эксперименту. Обычно матрицу представляют в виде, удобном для реализации опытов, – все кодированные значения факторов заменяют натуральными. Такую матрицу планирования называют рабочей.

Поскольку на изменение выходного параметра влияют помехи, план чаще всего реализуют несколько раз, получая k параллельных значений переменной состояния. Число k выбирается по результатам предварительного эксперимента или с помощью специально поставленных опытов. Матрица планирования эксперимента с несколькими параллельными опытами представлена в таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Матрица планирования двухфакторного эксперимента при наличии нескольких серий опытов

<table>
<tr><td rowspan="2">Номер опыта</td><td colspan="3">Уровень факторов</td><td rowspan="2">Расчетный показатель x_1x_2</td><td colspan="4">Выходной параметр</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>y'_m</td><td>y''_m</td><td>y'''_m</td><td>$\bar{y}_m$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

В таблице 2.4 величины y', y'', y''' показывают значения выходного параметра в трех параллельных сериях опытов.

Расчет коэффициентов регрессии. Для двухфакторного эксперимента в соответствии с уравнением (2.33) необходимо вычислить коэффициенты регрессии для уравнения, содержащего четыре члена – свободный член b_0, два линейных эффекта b_1x_1 и b_2x_2 и взаимодействие факторов $b_{1,\,2}x_1x_2$. Что касается трехфакторного плана эксперимента, то здесь уже, согласно выражения (2.34), необходимо вычислить коэффициенты для уравнения, содержащего 8 членов.

Расчет коэффициентов регрессии выполняется по следующим формулам

$$b_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_m x_0^m, \tag{2.36}$$

$$b_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_m x_i^m, \tag{2.37}$$

$$b_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_m x_i^m x_j^m, \tag{2.38}$$

где $m = 2^i$ – число вариантов в матрице планирования эксперимента;

$\bar{y}_m$ – среднее значение выходного параметра в m – м варианте;

x_i^m – значение данного фактора в m – м варианте;

$x_i^m x_j^m$ – значение произведения факторов в m – м варианте.

Таким образом, для нахождения b_0 необходимо вычислить сумму произведений $\bar{y}_m$ на значение фиктивной переменной и разделить полученный результат на m = 4 в двухфакторной схеме и m = 8 в трехфакторной схеме эксперимента. Например, для двухфакторного эксперимента

$$b_0 = \frac{1}{m}\left(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4\right). \tag{2.40}$$

Иными словами, b_0 не что иное как средняя арифметическая величина выходного параметра, когда факторы находятся на нулевом уровне.

Для нахождения b_i необходимо вычислить сумму произведений $\bar{y}_m$ на значения +1 или –1 фактора в соответствующем столбце матрицы планирования эксперимента и разделить результат на $m = 2^i$. Например, для двухфакторного эксперимента

$$b_1 = \frac{1}{m}\left[\bar{y}_1(-1) + \bar{y}_2(+1) + \bar{y}_3(-1) + \bar{y}_4(+1)\right], \tag{2.41}$$

$$b_2 = \frac{1}{m}\left[\bar{y}_1(-1) + \bar{y}_2(-1) + \bar{y}_3(+1) + \bar{y}_4(+1)\right]. \tag{2.42}$$

С физической точки зрения коэффициенты b_1 и b_2 показывают насколько изменяется выходной параметр процесса при изменении соответственно x_1 и x_2 от нуля до $\pm 1\mu_i$.

При вычислении коэффициентов регрессии для взаимодействующих факторов значения $x_i x_j$ берутся в расчетных столбцах матрицы планирования эксперимента. Так, для двухфакторного эксперимента

$$b_{1,2} = \frac{1}{m}\left[\bar{y}_1(+1) + \bar{y}_2(-1) + \bar{y}_3(-1) + \bar{y}_4(+1)\right]. \tag{2.43}$$

В зависимости от значения коэффициента $b_{1,2}$ судят о степени взаимодействия между факторами.

После нахождения величины коэффициентов регрессии записывается уравнение регрессии, и переходят к статистическому анализу уравнения регрессии. Анализ состоит из 3 этапов: оценки дисперсии воспроизводимости (оценки ошибки опыта), определения значимости коэффициентов уравнения регрессии и проверки адекватности модели.

Расчет дисперсии воспроизводимости и дисперсии коэффициентов регрессии. Известно, что ошибка опыта $S^2(y)$ оценивается по параллельным опытам. Перед расчетом ошибки опыта необходимо убедиться в том, что рассеяние в каждой точке факторного пространства не превышает некоторой величины, т. е. проверить однородность построчных дисперсий. Для этого рассчитываются построчные дисперсии $S^2(y_m^k)$. Расчет проводится по формуле

$$S^2\left(y_m^k\right) = \sum\left(\bar{y}_m - y_m^k\right)^2 / (k-1), \tag{2.44}$$

где k – число параллельных опытов.

Понятие однородность нескольких оценок дисперсий означает, что все они являются оценками одной и той же дисперсии $S^2(y_m^k)$, которая называется дисперсией воспроизводимости или дисперсией опытов. В этом случае различие между оценками объясняется их случайным характером.

Проверить однородность дисперсий $S^2(y_m^k)$ можно по критерию Кохрена. Критерий Кохрена для проверки однородности построчных дисперсий применяется, когда число параллельных опытов во всех строках постоянно $k = const$.

Расчетное значение критерия Кохрена определяется следующим образом

$$G_p = S^2(y_m^k)_{max} / \sum S^2(y_m^k), \tag{2.45}$$

где $S^2(y_m^k)_{max}$ – наибольшая построчная дисперсия.

Полученная величина G_p сравнивается со значением G_n, определяемым по таблице Приложения В. С величиной G_n связаны два параметра: $f_1 = k - 1$ – число степеней свободы суммы стоящей в знаменателе и $f_2 = m$. По значению чисел f_1 и f_2 и уровню значимости γ (обычно $\gamma = 0,05$) из распределения Кохрена находят G_n.

Гипотеза об однородности дисперсий принимается, если выполняется неравенство $G_p < G_n$. При $G_p > G_n$ дисперсии признаются неоднородными и принимаются меры для достижения их однородности.

Если условие $G_p < G_n$ не выполняется, то одним из решений является увеличение числа параллельных опытов, то есть еще один раз или несколько раз необходимо реализовать матрицу планирования эксперимента.

Если увеличение числа параллельных опытов не дает результата, то следует изменить метод контроля выходного параметра, увеличив его точность. Иногда прибегают к масштабированию функции отклика - вводится некоторая математическая функция от y (например, квадратный корень или логарифм).

Выполнив требование однородности построчных дисперсий $S^2(y_m^k)$ можно перейти к определению дисперсии воспроизводимости, как среднего арифметического значения построчных дисперсий

$$S^2(y) = \sum S^2(y_m^k)/m. \tag{2.46}$$

Затем необходимо определить дисперсию среднего значения

$$S^2(\bar{y}) = \sum S^2(y)/k. \tag{2.47}$$

И только после этого можно установить дисперсию коэффициентов регрессии по выражению

$$S^2(b_i) = S^2(\bar{y})/m. \tag{2.48}$$

Зная $S^2(\bar{y})$, можно определить ошибку коэффициентов регрессии

$$S(b_i) = \sqrt{S^2(b_i)}. \tag{2.49}$$

В ряде случаев в процессе исследований ставится всего один эксперимент вместо нескольких параллельных опытов. Если $k = 1$, то есть, повторяемости опытов нет, то дисперсия среднего значения совпадает с дисперсией метода измерения, который может быть определен по результатам предварительных исследований. При этом $S^2(b_i) = S^2/m$ и $S(b_i) = S/\sqrt{m}$.

Таким образом, ошибка коэффициентов регрессии в $\sqrt{m}$ раз меньше ошибки используемого метода, что является одним из достоинств многофакторного эксперимента.

Проверка значимости коэффициентов регрессии. Различные факторы могут по-разному влиять на выходной показатель – один больше, другой меньше. Для оценки этого влияния используют проверку значимости каждого коэффициента регрессии. С этой целью составляется неравенство

$$b_i > S(b_i)t_\alpha(f). \qquad (2.50)$$

Значения коэффициента Стьюдента приводятся в таблице Приложения Б для заданной достоверности α и числа степеней свободы $f = m(k - 1)$.

Если для какого либо фактора условие (2.50) не выполняется, то соответствующий фактор можно признать не значимым и исключить его из уравнения регрессии. Однако нужно быть осторожным и всегда помнить, что при проведении предварительных экспериментов уже отсеивались незначимые факторы. Нельзя утверждать со 100 % уверенностью, что оказавшийся не значимым фактор не влияет на процесс.

Обычно отсутствие значимости коэффициента регрессии может быть обусловлено следующими причинами:

- соответствующий фактор (или взаимодействие) не имеют функциональной связи с откликом y;
- дисперсия воспроизводимости $S^2(y)$ слишком велика, т. е. на фоне помех выделить влияние данного фактора не возможно.

Таким образом, установление не значимости фактора может являться следствием неудачно выбранного интервала варьирования (он был выбран слишком малым). Более правильным в этом случае является решение повторить эксперимент при расширенном значении единицы варьирования с увеличенным числом параллельных опытов. Безусловно, при этом число опытов, а также время эксперимента возрастают. Иногда количество опытов можно уменьшить, если единицу варьирования добавлять только в одном направлении, а другой уровень оставлять неизменным. Если фактор остается не значимым после повторной серии экспериментов и всех необходимых расчетов, то его (или их) отбрасывают и переходят к оценке адекватности полученной математической модели.

Проверка адекватности модели предусматривает проверку принятой гипотезы о линейности системы и включает два этапа – оценку возможности описания выхода процесса уравнением без квадратичных членов и возможности использования уравнения без парных членов.

Первый этап – оценка значимости коэффициентов регрессии при членах высших порядков. Для выполнения рассматриваемой оценки нужно повторить опыт на нулевом уровне несколько раз и по полученным результатам вычислить среднее значение выходного параметра $\bar{y}_0$. Разность $|\bar{y}_0 - b_0|$, если она не значима, указывает на возможность использования уравнения без квадратичных членов.

Значение величины $|\bar{y}_0 - b_0|$ определяется по формулам

$$|\bar{y}_0 - b_0| > \sqrt{\tilde{S}^2}\sqrt{(m+v)/vm}\, t_\gamma(f), \tag{2.51}$$

$$\tilde{S}^2 = \frac{(m-1)S^2(b_i) + (v-1)S^2(\bar{y}_0)}{m+v-2}, \tag{2.52}$$

$$S^2(\bar{y}_0) = \sum(\bar{y}_0 - y_0)^2 / v(v-1), \tag{2.53}$$

где b_0 – свободный член в уравнении регрессии, определяемый после постановки многофакторного эксперимента;

$\tilde{S}^2$ – средневзвешенное значение из двух дисперсий;

v – количество серий опытов с переменными x_1, x_2, …, находящимися на нулевом уровне;

$t_\gamma(f)$ – коэффициент Стьюдента для выбранного уровня достоверности и числа степеней свободы $f = (m + v - 2)$;

$S^2(\bar{y}_0)$ – дисперсия среднего значения выходного параметра при значениях всех факторов на нулевом уровне.

Если неравенство (2.51) выполняется, это свидетельствует о значимости разности $|\bar{y}_0 - b_0|$ и о невозможности отбросить квадратичные члены в уравнении регрессии. Указанная ситуация свидетельствует о значительной кривизне поверхности отклика вблизи оптимума. В этой ситуации необходима постановка факторного эксперимента с меньшими единицами варьирования.

Если же проведенные расчеты показывают обратный результат, то принятое предположение о возможности описания выхода процесса без членов высших порядков в уравнении регрессии справедливо. В этом случае для упрощения модели процесса желательно также проверить возможность описания выходного параметра уравнением с линейными членами без их парных взаимодействий.

Второй этап – проверка описания процесса линейной моделью. В этом случае необходимо преобразовать матрицу планирования эксперимента: исключить выходы эксперимента при повторных опытах и дополнить матрицу выходным параметром $\hat{y}_m$ процесса, рассчитанным по уравнению регрессии без парных взаимодействий. Для двухфакторного эксперимента такая матрица будет иметь вид, представленный в таблице 2.5.

Таблица 2.5 – Преобразованная матрица для проверки описания процесса линейной моделью

№ варианта	x_1	x_2	$\bar{y}_m$	$\hat{y}_m = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$	$\hat{y}_m$	$\bar{y}_m - \hat{y}_m$	$(\bar{y}_m - \hat{y}_m)^2$
1	–	–	$\bar{y}_1$	$\hat{y}_1 = b_0 + b_1(-1) + b_2(-1)$			
2	+	–	$\bar{y}_2$	$\hat{y}_2 = b_0 + b_1(+1) + b_2(-1)$			
3	–	+	$\bar{y}_3$	$\hat{y}_3 = b_0 + b_1(-1) + b_2(+1)$			
4	+	+	$\bar{y}_4$	$\hat{y}_4 = b_0 + b_1(+1) + b_2(+1)$			

Выполнив необходимые расчеты, можно определить дисперсию неадекватности модели без парных взаимодействий

$$S_a^2 = \sum (\bar{y}_m - \hat{y}_m)^2 / (m - i - 1), \tag{4.34}$$

где m – число вариантов при проведении многофакторного эксперимента, равное 2^i;

(m – i – 1) – число отброшенных взаимодействий;

i – число факторов.

Получив значение S_a^2 его сравнивают с дисперсией воспроизводимости $S^2(y)$, определяя $F_{расч} = S_a^2 / S^2(y)$.

Далее по критерию Фишера $F_{расч} > F(f_1; f_2)$ можно оценить возможность отбрасывания членов парных взаимодействий.

Значение критерия Фишера $F(f_1; f_2)$ для степеней свободы f_1 и f_2 определяется по таблице Приложения Г. При этом $f_1 = m - i - 1$, $f_2 = k - 1$.

Если $F_{расч} > F(f_1; f_2)$, то мы не можем отбросить парные взаимодействия и должны констатировать, что линейное приближение не адекватно. Если $F_{расч} \le F(f_1; f_2)$, то парные взаимодействия из уравнения регрессии можно исключить и уравнение регрессии будет адекватно полностью линейной модели.

Приложения

Приложение А. Критерии для исключения выскакивающих значений

n	Уровень достоверности					
	95 %			99 %		
	отношения					
	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ $\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$ $\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_2}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$ $\frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ $\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$ $\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_2}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$ $\frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}$
3	0,941	1,000	1,000	0,988	1,000	1,000
4	0,765	0,955	0,967	0,889	0,991	0,992
5	0,642	0,807	0,845	0,780	0,916	0,929
6	0,560	0,689	0,736	0,698	0,805	0,836
7	0,507	0,610	0,661	0,637	0,740	0,778
8	0,468	0,554	0,607	0,590	0,683	0,710
9	0,437	0,512	0,565	0,555	0,635	0,667
10	0,412	0,477	0,531	0,527	0,597	0,632
11	0,392	0,450	0,504	0,502	0,566	0,603
12	0,376	0,428	0,481	0,482	0,541	0,579
15	0,338	0,381	0,430	0,438	0,486	0,522
20	0,300	0,334	0,372	0,391	0,430	0,464
24	0,281	0,309	0,347	0,367	0,400	0,434
30	0,260	0,283	0,322	0,341	0,369	0,402

Приложение Б. Коэффициенты Стьюдента t_α

Число степеней свободы f	Уровень достоверности		Число степеней свободы f	Уровень достоверности		Число степеней свободы f	Уровень достоверности	
	95 %	99 %		95 %	99 %		95 %	99 %
1	12,71	63,66	12	2,18	3,06	23	2,07	2,81
2	4,30	9,92	13	2,16	3,01	24	2,06	2,80
3	3,18	5,84	14	2,14	2,98	25	2,06	2,79
4	2,78	4,60	15	2,13	2,95	26	2,06	2,78
5	2,57	4,03	16	2,12	2,92	27	2,05	2,77
6	2,45	3,71	17	2,11	2,90	28	2,05	2,76
7	2,36	3,50	18	2,10	2,88	29	2,04	2,76
8	2,31	3,36	19	2,09	2,86	30	2,04	2,75
9	2,26	3,25	20	2,09	2,84	40	2,02	2,70
10	2,23	3,17	21	2,08	2,83	60	2,00	2,66
11	2,20	3,11	22	2,07	2,82	120	1,98	2,62

Приложение В. Квантели распределения Кохрена G_n для уровня достоверности 95 %

f_2	f_1										
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	7977	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2768	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0780	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Примечание: все квантили G_n меньше 1, поэтому в таблице приведены лишь десятичные знаки, следующие после запятой, перед которой при пользовании таблицей нужно ставить ноль целых. Например, при $f_2 = 6$, $f_1 = 3$ имеем $G_{0,95} = 0,5321$.

Приложение Г. Квантели распределения Фишера для уровня достоверности 95 %

f_2	f_1								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Приложение Д. Квантили распределения χ^2- Пирсона

Число степеней свободы f	Значение вероятности P_f							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,336	3,66
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,2	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,0	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,4	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5

Продолжение Приложения Д

Число степеней свободы f	Значение вероятности P_f							
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,8
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	10,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,8	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,3	37,0	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	40,0	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,4	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,8	46,0	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,2	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,6	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	46,9	50,0	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,3	61,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,6	53,0	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,3	56,0	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	53,7	57,5	59,7

Приложение Е. Приведенная функция Лапласа

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	X	$\Phi_0(x)$
0,00	0,000	0,58	0,304	1,16	0,566	2,10	0,843
0,02	0,110	0,60	0,314	1,18	0,574	2,15	0,853
0,04	0,021	0,62	0,324	1,20	0,582	2,20	0,862
0,06	0,032	0,64	0,334	1,22	0,589	2,25	0,871
0,08	0,043	0,66	0,344	1,24	0,597	2,30	0,879
0,10	0,054	0,68	0,354	1,26	0,604	2,35	0,887
0,12	0,064	0,70	0,363	1,28	0,612	2,40	0,894
0,14	0,075	0,72	0,373	1,30	0,619	2,45	0,901
0,16	0,086	0,74	0,382	1,32	0,626	2,50	0,908
0,18	0,096	0,76	0,392	1,34	0,634	2,55	0,914
0,20	0,107	0,78	0,401	1,36	0,641	2,60	0,921
0,22	0,118	0,80	0,410	1,38	0,648	2,65	0,926
0,24	0,128	0,82	0,420	1,40	0,665	2,70	0,931
0,26	0,139	0,84	0,429	1,42	0,662	2,75	0,936
0,28	0,149	0,86	0,438	1,44	0,668	2,80	0,941
0,30	0,160	0,88	0,447	1,46	0,675	2,85	0,945
0,32	0,171	0,90	0,456	1,48	0,682	2,90	0,949
0,34	0,181	0,92	0,465	1,50	0,688	2,95	0,953
0,36	0,192	0,94	0,474	1,55	0,704	3,00	0,957
0,38	0,202	0,96	0,483	1,60	0,719	3,20	0,969
0,40	0,212	0,98	0,491	1,65	0,734	3,40	0,978
0,42	0,223	1,00	0,500	1,70	0,748	3,60	0,984
0,44	0,233	1,02	0,508	1,75	0,762	3,80	0,989
0,46	0,244	1,04	0,516	1,80	0,775	4,00	0,993
0,48	0,259	1,06	0,525	1,85	0,787	4,20	0,995
0,50	0,264	1,08	0,534	1,90	0,800	4,40	0,997
0,52	0,274	1,10	0,542	1,95	0,811	4,60	0,998
0,54	0,284	1,12	0,550	2,00	0,822	4,80	0,999
0,54	0,294	1,14	0,558	2,05	0,833	5,00	0,999