

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт механики и энергетики

Кафедра электроснабжения и эксплуатации электрооборудования

**Методические указания**  
**по выполнению и защите курсовой работы по дисциплине**  
**«Прикладные методы решения задач электроэнергетики»**  
**для студентов очной и заочной форм обучения**  
**направления подготовки**  
**13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника»**  
**(программа «Электроснабжение»)**

Ставрополь 2025

## Содержание

1. Цели и задачи работы .....	3
2. Рекомендуемые темы курсовых работ .....	5
3. Требования к структуре работы .....	6
4. Требования к оформлению работы.....	7
5. Список рекомендованных основных и дополнительных источников литературы.....	10
6. Требования к защите работы .....	10
7. Критерии оценки работы.....	11
Приложения.....	14

## 1. Цели и задачи работы

Целью курсовой работы является систематизация, закрепление и расширение теоретических и практических знаний по дисциплине «Прикладные методы решения задач электроэнергетики», а также применение этих знаний для решения конкретных практических задач. В процессе выполнения курсовой работы студент должен продемонстрировать умение, используя стандартные методики, обосновать такие параметры системы эксплуатационного обслуживания, как число ремонтного персонала, вероятность нахождения системы в исправном состоянии, резервный запас элементов в ремонтном фонде, а также продемонстрировать умение делать выводы и оформлять результаты своей работы в соответствии с установленными требованиями.

Курсовая работа позволяет оценить уровень усвоения студентом учебного материала, его способность к самостоятельной работе, умение логически мыслить и аргументировать свою точку зрения. Она является важным этапом в подготовке будущего специалиста, поскольку формирует навыки, необходимые для успешной профессиональной деятельности.

Цели выполнения курсовой работы:

- развитие способности применять теоретические знания для решения практических задач;
- освоение прикладных математических методов путем решения практических задач;
- приобретение опыта поиска оптимальных решений при организации эксплуатации электросетевого оборудования.

Конкретные задачи, решаемые обучающимися при написании курсовой работы, состоят в следующем:

- изучить основные понятия теории массового обслуживания и классификацию систем массового обслуживания;
- используя математический аппарат теории массового обслуживания, определить оптимальное количество ремонтного персонала при организации

эксплуатации электрических сетей, а также вероятность нахождения эксплуатируемой системы в исправном состоянии;

- изучить методические подходы к формированию резервного фонда запасных изделий;

- рассчитать оптимальное число запасных элементов для формирования резервного фонда;

- приобрести навык построения оптимального плана перевозок электро сетевого оборудования на этапе проведения подготовительных работ по ремонту электрических сетей;

- провести анализ полученных результатов, разработать предложения по улучшению параметров системы эксплуатационного обслуживания.

В процессе написания курсовой работы студент учится самостоятельно планировать свою деятельность, выбирать методы и инструменты для достижения поставленных целей. Он приобретает навыки работы с учебной и научной литературой, умение отбирать, анализировать и систематизировать информацию, а также оформлять результаты своей работы в соответствии с установленными требованиями.

Курсовая работа позволяет студенту продемонстрировать свои знания и навыки, полученные в ходе изучения учебной дисциплины, а также применить их для решения конкретных практических задач. Успешное выполнение курсовой работы свидетельствует о готовности студента к проведению самостоятельных исследований и решению профессиональных задач в будущем.

В конечном итоге, курсовая работа является не только формой контроля знаний студента, но и важным инструментом его профессионального развития. Она позволяет ему приобрести необходимые навыки и опыт для успешной работы в выбранной сфере деятельности, а также способствует формированию его как компетентного и ответственного специалиста.

## 2. Рекомендуемые темы курсовых работ

Курсовая работа выполняется на тему «Решение прикладных задач электроэнергетики», многовариантность заданий формируется различными исходными данными, вносимыми преподавателем в бланк задания индивидуально для каждого студента. Ниже приведен бланк задания на курсовую работу.

СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт механики и энергетики

Кафедра электроснабжения и эксплуатации электрооборудования

Задание № \_\_\_\_\_

на курсовую работу «Решение прикладных задач электроэнергетики»

студенту \_\_\_\_\_

**Задание №1.** Рассматривается многоканальная система массового обслуживания (СМО) с неограниченной очередью со следующими исходными данными:

- поток аварийных отключений электрических сетей за смену (8 ч) – \_\_\_\_\_ шт.
- средняя продолжительность устранения повреждения \_\_\_\_\_ ч.

Определить количество ремонтных бригад, при которых очередь не будет расти до бесконечности, оптимальное число ремонтных бригад и характеристики СМО. Оптимизацию

провести по критерию  $C_{opt} = \frac{n}{\lambda} + 3\bar{t}_{ov}$ .

**Задание №2.** Имеется многофазная СМО. Для устранения аварийной ситуации в электрической сети были направлены оперативно-выездная бригада (для отключения линии) и две ремонтные бригады электромонтеров. Определить вероятности состояний и показатели эффективности СМО. Интенсивность потока отключений электрической сети  $\lambda =$  \_\_\_\_\_ 1/ч, среднее время подготовки к ремонту  $\bar{t}_{под} =$  \_\_\_\_\_ ч, среднее время ремонта  $\bar{t}_{рем} =$  \_\_\_\_\_ ч.

**Задание №3.** Методом наискорейшего спуска решить оптимизационную задачу: электроэнергетическая установка состоит из трех последовательно включенных агрегатов. Вероятности безотказной работы агрегатов на заданном интервале времени и стоимость этих агрегатов соответственно равны:

Номер агрегата	1	2	3
Вероятность безотказной работы (P)			
Стоимость (с), у.е.			

Определить оптимальное число резервных элементов для каждого из агрегатов, обеспечив максимальное значение вероятности безотказной работы при условии, чтобы стоимость резервированной электроэнергетической установки не превысила \_\_\_\_\_ у.е.

**Задание №4.** Определить минимальные транспортные расходы по доставке опор на реконструируемую ЛЭП при следующих исходных данных: заказ на изготовление опор размещен на трех заводах ж/б изделий  $A_1, A_2, A_3$  в следующих количествах:  $a_1 =$  \_\_\_\_,  $a_2 =$  \_\_\_\_,  $a_3 =$  \_\_\_\_.

По трассе ЛЭП намечено 4 пункта, куда будут поставляться опоры. В пункт  $B_1$  должно быть доставлено  $b_1 =$  \_\_\_\_, в пункт  $B_2 - b_2 =$  \_\_\_\_, в пункт  $B_3 - b_3 =$  \_\_\_\_ и в пункт  $B_4 - b_4 =$  \_\_\_\_. Транспортные расходы в у.е, связанные с перевозкой каждой опоры указаны в таблице.

Завод ж/б изделий	Пункты назначения			
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	$C_{11} =$	$C_{12} =$	$C_{13} =$	$C_{14} =$
$A_2$	$C_{21} =$	$C_{22} =$	$C_{23} =$	$C_{24} =$
$A_3$	$C_{31} =$	$C_{32} =$	$C_{33} =$	$C_{34} =$

Задание выдал: \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

Подпись / Ф.И.О.

Задание получил: : \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

Подпись / Ф.И.О.

### 3. Требования к структуре работы

Структура курсовой работы должна включать следующие элементы:

- титульный лист (Приложение 1);
- содержание (оглавление);
- введение;
- основную часть;
- заключение с указанием основных результатов работы;
- список использованных источников литературы;
- приложения (при необходимости).

Важным этапом подготовки курсовой работы является разработка плана курсовой работы. Основной задачей плана является структурирование работы, формулировка заголовков глав и разделов курсовой работы. Названия глав формулируются на основании вопросов, подлежащих разработке. Подобный подход обеспечивает выполнение требования к курсовой работе о соответствии ее содержания теме. Аналогичный подход применим к формулировке разделов глав, которые должны раскрывать содержание каждой главы по тому заголовку, в котором они сформулированы. Практика показывает, что наиболее характерными ошибками при разработке плана являются:

1. Совпадение названия глав (разделов) с темой курсовой работы (главы).

2. Названия глав (разделов) не раскрывают реального содержания темы курсовой работы (главы) и относятся к другой области знаний (дисциплине).

Обе ошибки недопустимы, особенно вторая, поскольку она приводит к несоответствию содержания курсовой работы ее теме.

#### 4. Требования к оформлению работы

Курсовая работа оформляется в соответствии с общими правилами оформления научно-исследовательских работ.

Титульный лист курсовой работы содержит следующие элементы: полное наименование вышестоящего органа (Министерство сельского хозяйства Российской Федерации), университета (федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ставропольский государственный аграрный университет» института / факультета и кафедры, название дисциплины; тему курсовой работы; сведения об исполнителе (Ф.И.О. обучающегося, группа, подпись); сведения о преподавателе (Ф.И.О., ученая степень, ученое звание); наименование места и год выполнения; сведения о регистрации на кафедре, количество баллов (по БРС) и оценка (переведенная в пятибалльную систему), даты и подпись ведущего преподавателя.

Содержание (Оглавление) включает порядковые номера и наименование структурных элементов курсовой работы с указанием номера страницы, на которой они помещены.

Ниже представлен образец оформления содержания.

Содержание		
	Аннотация	2
	Введение	3
1	Расчет параметров многоканальной СМО	5
2	Расчет параметров многофазной СМО	10
3	Расчет оптимального количества запасных изделий для формирования резервного фонда	15
4	Составление оптимального плана проведения подготовительных работ при ремонте ЛЭП	20
	Заключение	27
	Список использованных источников литературы	30

Введение характеризует:

- актуальность темы - обоснование теоретической и практической важности существующей проблемы;

- цель и задачи курсовой работы - краткая и четкая формулировка цели выполнения работы и нескольких задач, решение которых необходимо для достижения поставленной цели;

- структуру работы - краткое содержание глав основной части работы.

Последовательность рубрик должна соответствовать приведенному перечню, наименование каждой рубрики выделяется в тексте жирным шрифтом.

Основная часть курсовой работы может содержать следующие части: главы; разделы (параграфы); пункты; подпункты.

Основная часть курсовой работы состоит из четырех глав, каждая из которых посвящена решению отдельной задачи в соответствии с индивидуальным заданием.

В приложении 3 кратко изложены методики, в соответствии с которыми рекомендуется выполнять основную часть курсовой работы.

Заключение - краткое изложение основных, наиболее существенных результатов, сформулированных в виде выводов, соответствующих цели и поставленным во введении задачам.

В списке использованных источников литературы должны быть представлены основные источники по теме:

- нормативно-правовые документы (ГОСТы, кодексы, стандарты, законы);

- учебники и учебные пособия;

- отраслевые периодические издания;

- научные статьи, монографии и материалы научных конференций;

- интернет-ресурсы (официальные сайты организаций, базы данных и т.д.)

Список должен содержать не менее 10 современных источников, изученных обучающимися (преимущественно даты издания не более 5 лет относительно года написания курсовой работы, кроме исторических вопросов).

На основные приведенные в списке источники должны быть ссылки в тексте курсовой работы. Они проставляются в квадратных скобках с указанием номера источника, под которым он значится в списке литературы.

Курсовая работа должна быть напечатана на стандартном листе писчей бумаги в формате А4 с соблюдением следующих требований:

- поля: левое - 30 мм, правое - 15 мм, верхнее - 20 мм, нижнее - 20 мм;
- шрифт размером 14 пт, гарнитурой Times New Roman;
- межстрочный интервал - полуторный;
- отступ красной строки - 1,25;
- выравнивание текста - по ширине.

Рекомендуемый общий объем курсовой работы не менее 25 страниц. Рекомендуемый объем введения: 2-3 страницы, заключения: 1-2 страницы, остальной объем страниц составляет основная часть работы.

Использование обучающимся технологий искусственного интеллекта для генерации текста и / или повышения его оригинальности признается некорректным заимствованием за исключением случаев, когда в рамках выбранной темы по согласованию с ведущим преподавателем предусматривается возможность использования технологий искусственного интеллекта при выполнении курсовой работы. При этом, обучающийся обязан: указать во введении, в каких разделах курсовой работы и в связи с чем были использованы технологии искусственного интеллекта; в тексте курсовой работы сделаны сноски с указанием, что материал был подготовлен с использованием технологий искусственного интеллекта.

## **5. Список рекомендованных основных и дополнительных источников литературы**

1. Плескунов М.А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / М. А. Плескунов – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2022. – 264 с..
2. Хорольский В. Я. Прикладные методы для решения задач электроэнергетики и агроинженерии / В. Я. Хорольский, М. А. Таранов, В. Н. Шемякин, С. В. Аникуев. – Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2020. – 176 с.
3. Журнал «Механизация и электрификация сельского хозяйства».
4. Журнал «Вестник аграрной науки Дона»
5. Портал агроинженерный - <https://agroengineering.ru>

## **6. Требования к защите работы**

В целях выполнения требований по хранению курсовых работ законченная и оформленная в соответствии с установленными требованиями курсовая работа и сопроводительный материал предоставляется преподавателю для защиты в распечатанном виде.

Курсовая работа допускается к защите при выполнении следующих условий:

- степень оригинальности текста курсовой работы не ниже 25% для работ, выполненных обучающимися по образовательным программам бакалавриата и специалитета, не ниже 35% - по образовательным программам магистратуры;

- наличия рецензии преподавателя, принимающего курсовую работу (Приложение 2).

Защита курсовых работ относится к промежуточной аттестации и проводится в конце семестра. Защита курсовых работ назначается кафедрой, дирекцией/деканатом вносится в расписание промежуточной аттестации и отражается в расписании учебных занятий.

Защиту курсовых работ проводит ведущий преподаватель, а в случае возникновения спорных ситуаций создается комиссия, в состав которой входит заведующий кафедрой и преподаватели кафедры.

Защита работы проходит в форме публичного выступления (5-7 мин.) с представлением результатов работы в виде презентации (5-7 слайдов) и ответов на вопросы преподавателя/комиссии (5 мин).

Для защиты курсовой работы обучающийся готовит текст доклада. В тексте выступления отражается:

- актуальности выбранной темы;
- цели и основные задачи курсовой работы;
- основное содержание курсовой работы;
- основные выводы и практические рекомендации.

## 7. Критерии оценки работы

Выполненная и защищенная курсовая работа оценивается в соответствии с учетом балльно-рейтинговой системы оценивания и критериями оценки, которые указаны в рабочей программе дисциплины.

В соответствии с Положением о балльно-рейтинговой системе оценки знаний студентов, обучающихся по образовательным программам высшего образования курсовую работу необходимо оценить по следующим критериям с учетом установленных максимальных баллов:

<b>Критерий</b>	<b>Максимальное значение в баллах</b>	<b>Набранных баллов</b>
Оформление курсовой работы	10	
Содержание курсовой работы	60	
Защита курсовой работы	30	
<b>ИТОГО</b>	<b>100</b>	

Содержание критериев оценки курсовой работы:

1. Оформление курсовой работы:

-10 баллов - курсовая работа соответствует всем требованиям к ее оформлению. При оформлении курсовой работы использовались современные средства визуализации информации.

-5 баллов - курсовая работа частично соответствует требованиям к ее оформлению, представленный материал проиллюстрирован не качественно. При оформлении курсовой работы современные средства визуализации информации не использовались.

## 2. Содержание курсовой работы:

-60 баллов - в курсовой работе подобраны необходимые информационные источники, информация использована корректно, все вопросы и разделы освещены полностью, для выводов приведены достаточные обоснования;

-40 баллов - в курсовой работе подобраны не все необходимые информационные источники, информация использована не везде корректно, не все вопросы и разделы освещены полностью, для выводов не приведены достаточные обоснования;

-20 баллов - в курсовой работе отсутствуют некоторые разделы, или их название не отвечает содержанию.

## 3. Защита курсовой работы:

-30 баллов - студент продемонстрировал полное понимание всех положений защищаемой работы, четкость и правильность изложения ответов на все вопросы, заданные преподавателем;

-20 баллов - студент продемонстрировал понимание основных положений защищаемой работы, четкость и правильность изложения ответов на большую часть вопросов, заданных преподавателем;

-10 баллов - студент дал недостаточно полные ответы на вопросы, на некоторые из них дал ошибочные ответы или не ответил.

Перевод оценки из 100-балльной в пятибалльную систему оценки знаний осуществляется следующим образом:

-89-100 - оценка «отлично»,

-77 - 88 баллов - оценка «хорошо»,

-65 - 76 баллов - оценка «удовлетворительно»,

-менее 64 баллов - оценка «неудовлетворительно».

При неудовлетворительной оценке курсовой работы обучающийся имеет право на повторную защиту после доработки и внесения исправлений.

У обучающегося, не сдавшего в установленный срок курсовую работу и/или не защитившего её по неуважительной причине, образуется академическая задолженность.

Оценка за курсовую работу фиксируется в зачетной книжке обучающегося и в электронной ведомости. Распечатанный и подписанный оригинал ведомости храниться в деканате факультета/института в соответствии со номенклатурой дел и сроками хранения документов 5 лет.

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
**Институт механики и энергетики**

**Кафедра электроснабжения и эксплуатации электрооборудования**

# Курсовая работа

по дисциплине «Прикладные методы решения задач электроэнергетики»

Тема: «Решение прикладных задач электроэнергетики»

Выполнил:

Студент \_\_ курса \_\_\_\_ группы

ФИО \_\_\_\_\_

Направление подготовки: \_\_\_\_\_

Форма обучения: \_\_\_\_\_

Проверил:

\_\_\_\_\_  
 уч. степень, должность

ФИО \_\_\_\_\_

Зарегистрирована

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

Критерий	Максимальное значение в баллах	Набранных баллов
Оформление курсовой работы (проекта)	10	
Содержание курсовой работы (проекта)	60	
Защита курсовой работы (проекта)	30	
<b>ИТОГО</b>	<b>100</b>	

Оценка « \_\_\_\_\_ » Дата \_\_\_\_\_ Подпись \_\_\_\_\_

Ставрополь, 20 \_\_\_\_

Кафедра: электроснабжения и эксплуатации электрооборудования

**РЕЦЕНЗИЯ**  
на курсовую работу

Тема \_\_\_\_\_

Обучающийся (Ф.И.О.) \_\_\_\_\_

Курс \_\_\_\_\_ Группа \_\_\_\_\_

Преподаватель (Ф.И.О.) \_\_\_\_\_

**Выполнение общих требований к курсовой работе (проекту)**

1	Объем работы соответствуют установленным требованиям	Да/нет
2	Степень оригинальности курсовой работы (проекта) соответствует установленным требованиям	Да/нет (указать %)

**Критерии оценивания курсовой работы (проекта)**

Критерии	Количество баллов	Содержание критерия оценки	Итоговый балл
<b>Оформление курсовой работы (проекта)</b>	<b>10</b>	Курсовая работа соответствует всем требованиям к ее оформлению. При оформлении курсовой работы использовались современные средства визуализации информации.	
	<b>5</b>	Курсовая работа частично соответствует требованиям к ее оформлению, представленный материал проиллюстрирован не качественно. При оформлении курсовой работы (проекта) современные средства визуализации информации не использовались.	
<b>Содержание курсовой работы (проекта)</b>	<b>60</b>	В курсовой работе подобраны необходимые информационные источники, информация использована корректно, все вопросы и разделы освещены полностью, для выводов приведены достаточные обоснования.	
	<b>40</b>	В курсовой работе подобраны	

		не все необходимые информационные источники, информация использована не везде корректно, не все вопросы и разделы освещены полностью, для выводов не приведены достаточные обоснования.	
	<b>20</b>	В курсовой работе отсутствуют некоторые разделы, или их название не отвечает содержанию.	
<b>Защита курсовой работы (проекта)</b>	<b>30</b>	Студент продемонстрировал полное понимание всех положений защищаемой работы, четкость и правильность изложения ответов на все вопросы, заданные преподавателем.	
	<b>20</b>	Студент продемонстрировал понимание основных положений защищаемой работы, четкость и правильность изложения ответов на большую часть вопросов, заданных преподавателем.	
	<b>10</b>	Студент дал недостаточно полные ответы на вопросы, на некоторые из них дал ошибочные ответы или не ответил.	
<b>ИТОГО:</b>			<i>Указывается итоговый балл по всем критериям</i>

**Рекомендации:**

---



---



---

Ведущий преподаватель \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
 (ФИО) (подпись)

## ***Методические рекомендации по выполнению основной части курсовой работы***

### ***1. Основные понятия теории массового обслуживания***

Теорию массового обслуживания следует рассматривать как раздел прикладной математики, изучающей процессы, связанные с удовлетворением массового спроса на выполнение какого-либо вида услуг с учетом случайного характера спроса и обслуживания. Применительно к электроэнергетике это могут быть задачи: формирования резервного фонда электрооборудования, работа ремонтного персонала по ликвидации аварийных ситуаций в электроустановках, производство переключений и подготовка рабочих мест в электрических сетях оперативным персоналом, оценка надежности восстанавливаемых систем и т. д.

Каждая система массового обслуживания (СМО) может быть представлена в виде определенного числа обслуживающих единиц, которые называются каналами обслуживания (термин взят из телефонных сетей, применительно к которым начала развиваться теория массового обслуживания). В качестве канала могут рассматриваться различного вида приборы и приспособления, вычислительная машина, коллектив людей или отдельный исполнитель, выполняющий определенный вид работ. По числу каналов СМО делится на одноканальные и многоканальные системы.

Функционирование любой СМО заключается в обслуживании поступающего в нее потока заявок или требований. Заявки обычно поступают нерегулярно, образуя случайный поток заявок (требований). На обслуживание заявки также необходимо определенное время. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к неравномерной загрузке СМО. В какие-то периоды времени скапливается большое количество заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО, не получив обслуживания), в другие периоды СМО может работать с недогрузкой или простаивать.

В электроэнергетике довольно часто приходится сталкиваться с системами, в которых заявка, поступившая в систему в любой момент времени, может застать канал занятым обслуживанием. Характерным с этой точки зрения является работа оперативно-ремонтного персонала при возникновении аварийных ситуаций в электрических сетях. Повре-

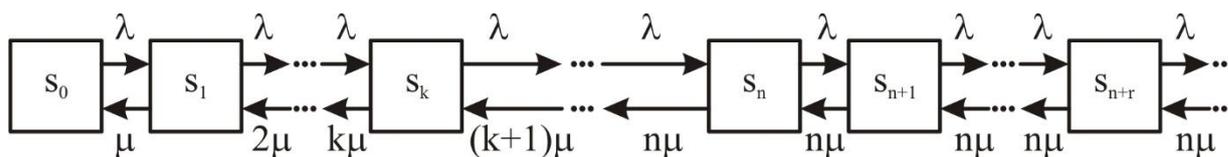
ждение, как случайное событие, может произойти в любой момент времени, на любой отходящей линии или подстанции, а может произойти одновременно на нескольких фидерах. Поскольку повреждения, возникающие в разных местах, сразу устранить невозможно, то выездная бригада последовательно устраняет одно повреждение за другим.

Исходя из вышеизложенного, в качестве СМО с ожиданием следует рассматривать систему, в которой заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает своего обслуживания. При рассмотрении таких систем помимо ранее рассмотренных показателей эффективности СМО дополнительно следует учитывать такие характеристики как средняя длина очереди, время пребывания заявки в очереди и т. д.

### 1. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Пусть имеется  $n$ -канальная СМО, на которую поступает поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ , а интенсивность обслуживания  $\mu = 1/t_{\text{обсл.}}$ . Для такой системы возможны следующие состояния с учетом числа заявок (обслуживаемых и ожидающих обслуживания):  $s_0$  – канал свободен, заявок нет;  $s_1$  – занят один канал, остальные свободны;  $s_2$  – заняты два канала, остальные свободны; ...;  $s_k$  – заняты  $k$  каналов, остальные свободны; ...;  $s_n$  – заняты все  $n$  каналов (очереди нет);  $s_{n+1}$  – заняты все  $n$  каналов, в очереди одна заявка; ...;  $s_{n+m}$  – заняты все  $n$  каналов, в очереди  $m$  заявок.

Граф состояний системы показан на рисунке 2.1.



**Рисунок 1 – Граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью**

Следует обратить внимание на то, что для таких систем имеется отличие, заключающееся в том, что интенсивность потока восстановлений (переводящего систему из одного состояния в другое справа налево) не остается постоянной, а по мере увеличения числа заявок от 0 до  $n$  увеличивается от величины  $\mu$  до величины  $n\mu$ , так как, соответственно, увеличивается число каналов обслуживания. При числе заявок больше  $n$  интенсивность потока восстановлений остается постоянной, равной  $n\mu$ .

Для рассматриваемого графа можно написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова и для предельных вероятностей, приравняв производные нулю, получить следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1; \\ 0 = \lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2; \\ \dots\dots\dots; \\ 0 = \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1}; \quad (1 \leq k \leq n-1) \\ \dots\dots\dots; \\ 0 = \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + (n+1)\mu p_{n+1}; \\ \dots\dots\dots; \\ 0 = \lambda p_{n+m-1} - [\lambda + (n+m)\mu]p_{n+m} + (n+m+1)\mu p_{n+m+1}. \end{cases} \quad (1)$$

Используя формулы для процесса гибели и размножения, можно получить следующие выражения для предельных вероятностей состояний n-канальной СМО с неограниченной очередью

$$p_0 = \left( 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}. \quad (2)$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \dots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (3)$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \dots, p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0, \dots \quad (4)$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди

$$p_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0. \quad (5)$$

Показатели эффективности многоканальной СМО с неограниченной очередью рассчитываются по следующим формулам:

среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho; \quad (6)$$

среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}; \quad (7)$$

среднее число заявок в системе

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho; \quad (8)$$

среднее время пребывания заявки в очереди

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} \bar{r}; \quad (9)$$

среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} \bar{z}. \quad (10)$$

Поскольку в рассматриваемой системе с неограниченной очередью при  $\rho < 1$  любая заявка, пришедшая в систему будет обслужена, то вероятность отказа  $p_{\text{отк}} = 0$ , относительная пропускная способность  $Q = 1$ , а абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока заявок  $A = \lambda$ .

Для определения оптимального числа ремонтных бригад по устранению повреждений в электрических сетях помимо показателей эффективности системы массового обслуживания необходимо ввести критерий оптимизации. Существует несколько подходов к выбору такого показателя. Можно воспользоваться достаточно простым и удобным аналитическим выражением экономического критерия, предложенным в работах Н. Ш. Кремера [9]. Относительную величину затрат можно определить по формуле  $C_{\text{отн}} = \frac{1}{\lambda} n + 3\bar{t}_{\text{оч}}$ .

Рассмотрим конкретный пример по определению показателей таких СМО.

**Пример.** В условиях повышенной гололедно-ветровой нагрузки в регионе происходит массовое отключение фидеров воздушных линий электропередачи. Поток аварийных отключений в районе электрических сетей достиг 11 штук за смену (8 ч). Средняя продолжительность устра-

нения повреждения 2 ч. Необходимо определить: 1 – количество ремонтных бригад, при котором очередь не будет расти до бесконечности и характеристики СМО; 2 – оптимальное число ремонтных бригад и характеристики СМО в этом случае; 3 – провести сравнение.

Р е ш е н и е: 1. По условию задачи имеем:  $\lambda = \frac{11}{8} = 1,38$  1/ч;  
 $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{2} = 0,5$  1/ч;  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1,38}{0,5} = 2,76$ .

Известно, что очередь не будет возрастать до бесконечности при условии  $\frac{\rho}{n} < 1$ , то есть при  $n > \rho = 2,76$ . Следовательно, минимальное количество ремонтных бригад следует принять равным 3.

2. Определим вероятности состояний СМО при  $n = 3$ .

Вероятность того, что в систему не поступят заявки об отключениях

$$P_0 = \left( 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1} =$$

$$= \left( 1 + \frac{2,76}{1} + \frac{2,76^2}{1 \cdot 2} + \frac{2,76^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1,5^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (3 - 2,76)} \right)^{-1} = 0,02.$$

Таким образом, в среднем в двух процентах от общего объема сетей не будут выполняться ремонтные работы.

Вероятность того, что в СМО будет очередь

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0 = \frac{2,76^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (3 - 2,76)} = 0,81.$$

3. Рассчитаем показатели эффективности СМО:

среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} P_0}{n \cdot n! \left( 1 - \frac{\rho}{n} \right)^2} = \frac{2,76^4 \cdot 0,02}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left( 1 - \frac{2,76}{3} \right)^2} = 10,07;$$

среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{оч} = \frac{1}{\lambda} \bar{r} = \frac{1}{1,38} \cdot 10,07 = 7,30 \text{ ч};$$

среднее число отключенных фидеров

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho = 10,07 + 2,76 = 12,83;$$

среднее время нахождения потребителей в отключенном состоянии

$$\bar{t}_{сист} = \frac{1}{\lambda} \bar{z} = \frac{1}{1,38} \cdot 12,83 = 9,30 \text{ ч}.$$

Для определения оптимального числа ремонтных бригад по устранению повреждений в электрических сетях помимо показателей эффективности системы массового обслуживания необходимо ввести критерий оптимизации. Относительную величину затрат определим по формуле

$$C_{\text{отн}} = \frac{1}{\lambda} n + 3\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{1,38} \cdot 3 + 3 \cdot 7,30 = 24,07.$$

Анализ полученных характеристик эффективности системы массового обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке ремонтных подразделений при наличии трех бригад.

4. Для определения оптимального числа ремонтных бригад были вычислены показатели эффективности системы массового обслуживания при различном количестве ремонтных подразделений. Результаты расчетов сведены в таблицу 1.

**Таблица 1 – Показатели эффективности системы массового обслуживания**

Характеристика СМО	Число ремонтных бригад				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя ремонтной бригады	0,02	0,05	0,06	0,06	0,06
Число заявок в очереди на ремонт	10,07	0,87	0,22	0,02	0,02
Время ожидания в очереди, ч	7,30	0,63	0,16	0,01	0,01
Относительная величина затрат, ед.	24,07	4,79	4,10	4,38	5,10

Как следует из количественных данных, приведенных в таблице 1.2, минимальные затраты можно получить при  $n_{\text{опт}} = 5$ . Проведенными дополнительными расчетами других показателей эффективности системы массового обслуживания для  $n = 5$  установлено, что  $p_{\text{оч}} = 0,03$ ;  $\bar{t}_{\text{сист}} = 2,16$  ч.

5. Выполненные исследования позволили установить, что при числе ремонтных бригад  $n = 5$  по сравнению с  $n = 3$  существенно уменьшилась вероятность возникновения очереди  $p_{\text{оч}}$ , длина очереди  $\bar{n}$  и среднее время пребывания заявки в очереди  $\bar{t}_{\text{оч}}$ . При этом обеспечивается минимум относительной величины затрат на выполнение ремонтных работ.

## 2. Многофазные системы массового обслуживания

Специфика ремонтно-эксплуатационного обслуживания электрических сетей предопределяет использование многофазных СМО, когда обслуживание поступившей заявки осуществляется в несколько этапов. Характерная ситуация возникает в электрических сетях при возникнове-

нии аварийной ситуации Проведение ремонтных работ обычно осуществляется в два этапа – отключение поврежденного участка и подготовка рабочего места выполняется оперативно-выездной бригадой, а непосредственно восстановительные работы проводит ремонтное подразделение. При этом в зависимости от сложности повреждения последний вид работ может проводить одна или несколько бригад. Специфичным может быть также отсутствие очереди по причине малой интенсивности потока отключений электрических сетей.

Рассмотрим простейшую СМО без очереди с подготовкой каналов. На  $n$  – канальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Время обслуживания заявок распределено по показательному закону с параметром  $\mu$ . До начала обслуживания канал должен быть подготовлен. Время подготовки  $t_{\text{подг}}$  имеет показательное распределение с параметром  $\varphi$  и не зависит от того, как давно канал прекратил работу.

При поступлении заявки вначале выполняется операция подготовки, а затем она поступает на обслуживание. Заявка, заставшая все каналы занятыми, на обслуживание не принимается.

В рассматриваемом случае обслуживание заявки состоит из двух фаз: подготовки со временем подготовки  $t_{\text{подг}}$  и самого обслуживания в течение времени  $t_{\text{обсл}}$ . В результате общее среднее обслуживание  $\tilde{t}_{\text{обсл}} = \bar{t}_{\text{подг}} + \bar{t}_{\text{обсл}}$ .

Случайная величина  $\tilde{t}_{\text{обсл}}$  обычно распределена по обобщенному закону Эрланга второго порядка с параметрами  $\mu$  и  $\varphi$ .

Известно, что формулы Эрланга справедливы не только для показательного, но и для любого другого распределения времени обслуживания. Для решения практических задач нам необходимо найти величину  $\tilde{\mu}$ .

$$t_{\text{обсл}} = 1/\mu + 1/\varphi = \frac{\mu + \varphi}{\mu\varphi}. \quad (11)$$

Следовательно,

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu\varphi}{\mu + \varphi}. \quad (12)$$

Определив  $\tilde{\rho} = \lambda/\tilde{\mu}$  и подставив его в формулы Эрланга, получим:

$$p_0 = \left( 1 + \frac{\tilde{\rho}}{1!} + \dots + \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} + \dots + \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} \right)^{-1}; \quad (13)$$

$$p_k = \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} p_0, \quad (1 \leq k < n); \quad (14)$$

$$p_{\text{отк}} = \tilde{p}_n = \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0. \quad (15)$$

Показатели эффективности СМО определяются по известным формулам

$$Q = 1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0; \quad A = \lambda Q = \lambda \left( 1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0 \right). \quad (16)$$

Для определения среднего числа занятых каналов нужно разделить  $A$  на  $\tilde{\mu}$

$$k = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}} \left( 1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0 \right) = \tilde{\rho} \left( 1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0 \right). \quad (17)$$

## **2. Оптимальное резервирование электроэнергетических установок**

Довольно часто в практике научных исследований для решения задачи определения оптимального количества резервных элементов используется метод наискорейшего спуска.

Оптимизационная задача может быть сформулирована следующим образом. Комплект электрооборудования, используемый на сетевом предприятии, может не удовлетворять требованиям по надежности. С целью доведения показателей надежности до заданных требований осуществляется введение структурной избыточности. При этом формулируется экстремальная задача комбинаторного типа, математическое содержание которой сводится к нахождению такой совокупности электротехнических агрегатов, которая обеспечивает минимальную величину их суммарной стоимости при: выполнении ограничений, наложенных на показатели надежности.

Будем исходить из следующих предпосылок. Электроустановка состоит из  $n$  последовательно соединенных агрегатов независимых в

смысле надежности. Каждый агрегат характеризуется определенными показателями надежности. Численные значения их для  $i$ -й функциональной подсистемы зависят от принятого способа резервирования и количества резервных элементов

$$R_i = f(v_i, h_i), \quad (18)$$

где  $v_i$  – способ резервирования;  
 $h_i$  – количество резервных элементов.

Поскольку наиболее распространенными показателями надежности являются вероятность безотказной работы и коэффициент готовности, результирующий показатель надежности электрооборудования определяется по выражению

$$R(V, H) = R_1(v_1, h_1)R_2(v_2, h_2) \cdots R_n(v_n, h_n) = \prod_{i=1}^n R_i(v_i, h_i). \quad (19)$$

В качестве целевой функции рассмотрим суммарные затраты на содержание резервного фонда и ущерб от выхода из строя электрооборудования, тогда

$$C(V, H) = C(v_1, v_2, \dots, v_n; h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n c_i(v_i, h_i), \quad (20)$$

где  $C$  – стоимость системы;  
 $c_i$  – стоимость одного  $i$ -го элемента.

С учетом изложенного, математическую формулировку задачи оптимального резервирования можно представить в следующем виде

$$(v_1, v_2, \dots, v_n; h_1, h_2, \dots, h_n) \rightarrow \min \left[ C = \sum_{i=1}^n c_i(v_i, h_i) \right] \quad (21)$$

$$\prod_{i=1}^n R_i(v_i, h_i) \geq R^*,$$

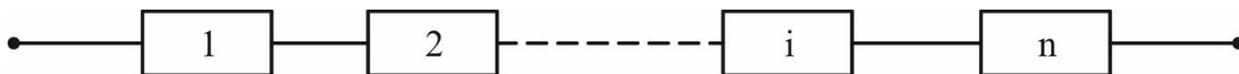
где  $\forall v_i \geq 0, \forall h_i \geq 0$  – целые числа;  
 $R^*$  – заданное значение показателя надежности электрооборудования.

Не исключается и обратная постановка задачи оптимального резервирования.

При применении метода наискорейшего спуска процесс оптимизации разворачивается во времени таким образом, что на каждом шаге

отыскивается участок резервирования, подключение к которому одного элемента дает наибольший выигрыш в виде увеличения показателя надежности на единицу затрат, т. е. движении к экстремуму осуществляется по направлению максимальной частной производной.

Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  последовательно соединенных элементов, которые отличаются друг от друга вероятностью безотказной работы и стоимостью



Решение задачи оптимизации при использовании метода наискорейшего спуска можно представить в виде следующего многошагового процесса.

Обозначим  $P_i(m_i)$  вероятность безотказной работы за фиксированное время  $t_i$  агрегата при наличии  $m_i$  резервных элементов, а через  $c_i$  – стоимость одного элемента  $i$ -го типа. Для каждого агрегата вычислим  $P_i(m_i)$ , а также  $d_i(m_i)$ , где  $d_i(m_i) = [P_i(m_i+1) - P_i(m_i)]/c_i P_i(m_i)$

1-й шаг. Определяем агрегат с номером  $k$ , для которого  $d_k(1) = \max d_i(1)$ , и к нему добавляем один резервный элемент. Затем вычисляем значения

$$P^{(1)} = P^{(0)} P_k(1) / P_k(0); C^{(1)} = C^{(0)} + c_k,$$

где  $P^{(0)}$ ,  $C^{(0)}$  – вероятность безотказной работы и стоимость нерезервированной системы

$$P^{(0)} = \prod_{i=1}^n P_i(0), C^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i.$$

2-й шаг. Определяем максимальную из величин  $d_i(1)$ ,  $i \neq k$ ,  $d_k(2)$ . Добавляем один резервный элемент к  $g$ -му агрегату, для которого  $d_g(1) = \max d_i(1)$  или снова к  $k$ -му агрегату, если  $d_k(2) > d_i(1)$ . Вычисляются значения

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= P_g(1) P^{(1)} / P_g(0) && \text{если } d_g(1) > d_k(2) \text{ или} \\ P^{(2)} &= P_k(2) P^{(1)} / P_k(1) && \text{если } d_k(2) > d_i(1), \text{ а также} \\ C^{(2)} &= C^{(1)} + c_g && \text{если } d_g(1) > d_k(2) \text{ или} \\ C^{(2)} &= C^{(1)} + c_k && \text{если } d_k(2) > d_i(1) \end{aligned}$$

На последующих шагах процедуры повторяются. Многошаговый процесс останавливается на шаге  $N$ , на котором выполняется условие  $C^{(N)} < C < C^{(N+1)}$ .

### 3. Оптимизация транспортных расходов при проведении капитального ремонта электрической сети

В общем виде постановку транспортной задачи можно сделать следующим образом. На нескольких станциях отправления сосредоточен груз, который необходимо доставить на известное число пунктов приема. Объем отправляемого груза с каждого пункта и принимаемого груза задан. При закрытой транспортной задаче сумма объемов, подлежащих отправке, и сумма объемов принимаемого груза должны быть равны. Заданы также транспортные расходы, связанные с перевозкой единицы груза из любой точки отправления в любой пункт назначения. Требуется составить такой план перевозок груза, при котором общие транспортные расходы были бы наименьшими. При этом был бы точно удовлетворен спрос в каждом пункте назначения, был бы вывезен весь груз со станций отправления.

Математическая формулировка транспортной задачи в общем виде такова.

Среди неотрицательных решений системы

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & (j = 1, 2, \dots, n); \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & (i = 1, 2, \dots, m). \end{cases} \quad (22)$$

выбрать такое, при котором функция

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \min, \quad (23)$$

где  $i$  – номер станции отправления;

$j$  – номер пункта назначения;

$x_{ij}$  – количество груза, предназначенного для отправки из  $i$ -ой станции в  $j$ -ый пункт приема;

$a_i$  – объем груза, сосредоточенного на станции отправления  $i$ ;

$b_j$  – объем груза, который необходимо доставить в  $j$ -ый пункт приема;

$c_{ij}$  – транспортные расходы, связанные с перевозкой одной единицы груза с  $i$ -ой станции отправления на  $j$ -ый пункт приема;

$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$  – означает, что суммирование элементов  $c_{ij} x_{ij}$  произво-

дится сначала по индексу  $j$  при любом фиксированном значении  $i$ , затем по индексу  $i$ .

Приведенная математическая формулировка свидетельствует о том, что транспортная задача является задачей линейного программирования, так как ее решение сводится к нахождению минимума линейной функции от неотрицательных переменных, удовлетворяющих системе линейных уравнений.

В принципе, транспортная задача может быть решена универсальным симплекс-методом. Однако наличие специфических ограничений в математической постановке задачи привели к созданию специального метода решения транспортной задачи. Этот метод впервые был предложен советскими математиками Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным в 1949 году. Он является упрощенным вариантом симплекс-метода и приспособлен именно для решения транспортных задач.

Рассмотрим важное положение, которым приходится руководствоваться в процессе выполнения расчетов при решении транспортных задач. Систему ограничений транспортной задачи можно разрешить относительно  $m + n - 1$  неизвестных, то есть оптимальное решение транспортной задачи следует искать среди  $m + n - 1$  неизвестных  $x_{ij}$ , удовлетворяющих системе ограничений.

Алгоритм решения транспортной задачи включает несколько этапов. На первом этапе определяется какое-либо первоначальное допустимое решение. На втором этапе это решение проверяется на оптимальность. Если результат положительный, то задача решена. В противном случае осуществляется переход к новому улучшенному допустимому решению и т. д., пока не будет найден оптимальный вариант.

Методику решения транспортной задачи удобно рассмотреть на конкретном примере с введением по ходу решения необходимых количественных данных.

**Пример.** Планом проведения капитального ремонта высоковольтной линии электропередачи предусматривается замена деревянных опор на железобетонные опоры. Заказ на изготовление опор размещен на трех заводах железобетонных изделий  $A_1, A_2, A_3$  в следующих количествах:  $a_1 = 20, a_2 = 80, a_3 = 120$  штук. По трассе ЛЭП намечено 4 пункта, куда будут поставляться опоры. В пункт  $B_1$  должно быть доставлено  $b_1 = 60$ , в пункт  $B_2 - b_2 = 100$ , в пункт  $B_3 - b_3 = 20$  и в пункт  $B_4 - b_4 = 40$  опор. При этом количество опор, изготавливаемых на заводах железобетонных изделий

равно сумме потребностей в пунктах приема  $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 220$  шт.

Транспортные расходы в у. е., связанные с перевозкой каждой опоры из любого завода железобетонных изделий указан в таблице

Завод железобетонных изделий	Пункт назначения			
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	$c_{11} = 3$	$c_{12} = 6$	$c_{13} = 5$	$c_{14} = 1$
$A_2$	$c_{21} = 1$	$c_{22} = 4$	$c_{23} = 3$	$c_{24} = 2$
$A_3$	$c_{31} = 4$	$c_{32} = 3$	$c_{33} = 1$	$c_{34} = 2$

Необходимо составить план перевозок опор, при котором общие транспортные расходы будут минимальными.

Решение:

1. Определим какое-либо первоначальное допустимое решение. Для этого составим специальную таблицу следующего вида:

В клетках, в которых записаны стоимости перевозок, оставлены свободные левые нижние углы, куда будем вписывать найденные значения  $x_{ij}$ , которые в дальнейшем будем называть поставками.

Для определения  $x_{ij}$  воспользуемся методом северо-западного угла. Поставки каждый раз вписываются в верхний левый (северо-западный) угол таблицы. Вначале определим поставку для клетки  $(A_1, B_1)$ . Для этого сравним потребность  $B_1 = 60$  и запас  $A_1 = 20$ . Меньшее значение из этих чисел примем за поставку  $x_{11}$  и величину  $c_{11}$  в этой клетке заключим в рамку.

		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		60	100	20	40
$A_1$	20	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$
$A_2$	80	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$
$A_3$	120	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$	$c_{34}$

(24)

Так как запас  $A_1$  исчерпан, строку  $A_1$  временно исключим из рассмотрения. Теперь верхней левой клеткой будет  $(A_2, B_1)$ . Сравнивая потребность  $B_1 = 40$  с запасом  $A_2 = 80$ , выбираем величину 40,  $c_{21}$  заключаем в рамку и столбец  $B_1$  временно исключаем из рассмотрения.

Теперь верхней левой клеткой таблицы будет клетка  $(A_2, B_2)$ . Сравнивая цифры 40 и 100, заносим в эту клетку цифру 40 и  $c_{22}$  заключаем в рамку. Так как запас  $A_2$  полностью исчерпан, то строку  $A_2$  временно исключаем из рассмотрения.

В результате получим таблицу, состоящую из одной строки  $A_3$ , в клетки которой и вписываем оставшиеся поставки:  $x_{32} = 60$ ,  $x_{33} = 20$ ,  $x_{34} = 40$ , а  $c_{32}$ ,  $c_{33}$  и  $c_{34}$  заключаем в рамки. В итоге получим таблицу:

		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		60	100	20	40
$A_1$	20	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$
$A_2$	80	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$
$A_3$	120	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$	$c_{34}$
			60	20	40

(25)

В результате проведенных операций нами получен следующий план перевозок:  $x_{11} = 20$ ,  $x_{12} = 0$ ,  $x_{13} = 0$ ,  $x_{14} = 0$ ,  $x_{21} = 40$ ,  $x_{22} = 40$ ,  $x_{23} = 0$ ,  $x_{24} = 0$ ,  $x_{31} = 0$ ,  $x_{32} = 60$ ,  $x_{33} = 20$ ,  $x_{34} = 40$ .

При таком плане все опоры с заводов железобетонных изделий  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  будут вывезены, а потребности пунктов размещения опор на трассе воздушной линии  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  будут удовлетворены. Таким образом, нами получено допустимое решение поставленной задачи.

Затраты на перевозку опор в этом случае составят

$$z_1 = 20c_{11} + 40c_{21} + 40c_{22} + 60c_{32} + 20c_{33} + 40c_{34}.$$

Рассматривая полученную таблицу, можно заметить следующую особенность: число клеток, выделенных рамками, на 1 меньше общего числа строк и столбцов таблицы, то есть оно равно  $m + n - 1$ . Указанная особенность обусловлена ходом заполнения таблицы. Действительно, каждый раз мы записываем поставку в клетку, после чего исключаем строку или столбец. Исключение составило лишь последнее заполнение, когда мы одновременно вычеркнули сразу и столбец и строку. Так как

число строк равно  $m$ , столбцов –  $n$ , то число заполненных клеток будет равно  $m + n - 1$ .

В результате построения таблицы нам удалось получить  $m + n - 1$  неизвестных, относительно которых разрешима система ограничений.

Назовем эти неизвестные базисными величинами, а полученное решение – базисным. Остальные неизвестные (значения которых не вписаны в таблицу) будем называть свободными неизвестными, а клетки без рамок – свободными клетками.

Оптимальное решение следует искать среди возможных базисных решений.

Используя таблицу, помещенную в условие задачи, найденный план перевозок имеет значение целевой функции

$$z = 3 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 60 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 = 540.$$

2. Исследование базисного решения на оптимальность.

Сопоставим каждой станции  $A_i$  некоторую величину  $\alpha_i$ , а каждому пункту  $B_j$  некоторую величину  $\beta_j$  и свяжем эти величины следующим образом  $\alpha_i + c_{ij} = \beta_j$ .

Величинам  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  можно придать простой смысл:

$\alpha_i$  – стоимость изготовления одной опоры на заводе железобетонных изделий;

$\beta_j$  – стоимость опоры в пункте назначения;

$c_{ij}$  – затраты на перевозку опоры из станции отправления  $i$  в пункт назначения  $j$ .

Значения целевой функции нельзя уменьшить для всех свободных клеток таблицы, если выполняется неравенство  $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ . Если такое неравенство выполняется, то решение оптимально.

Итак, для исследования базисного решения на оптимальность из системы уравнений  $\alpha_i + c_{ij} = \beta_j$ , соответствующих базисным клеткам таблицы перевозок, определить величины  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  и проверить неравенство  $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$  для каждой свободной клетки.

В начале определим величины:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и величины  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ . Поскольку одной из величин:  $\alpha_1$  можно придать любое произвольное значение, примем ее равной нулю. Тогда для клетки  $(A_1, B_1)$  из уравнения  $\alpha_1 + c_{11} = \beta_1$  определим  $\beta_1$ :  $0 + 3 = \beta_1, \beta_1 = 3$ . Запишем значение  $\beta_1$  под столбцом  $B_1$ . Из равенства  $\alpha_2 + c_{21} = \beta_1$  установим значение  $\alpha_2$ :  $\alpha_2 + 1 = 3, \alpha_2 = 2$ . Запишем значение  $\alpha_2 = 2$  справа от таблицы, напротив строки  $A_2$ . Проведя аналогичные вычисления, определим значения:  $\beta_2 = 6, \alpha_3 = 3, \beta_3 = 4, \beta_4 = 5$ . В результате получим следующую таблицу

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>			
		60	100	20	40			
A <sub>1</sub>	20	20	3	6	5	1	$\alpha_1 = 0$	
A <sub>2</sub>	80	40	1	4	3	2	$\alpha_2 = 2$	
A <sub>3</sub>	120	4	60	3	20	1	2	$\alpha_3 = 3$
		$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 6$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 5$			

Проверим, выполняется ли неравенство  $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$  для свободных клеток полученной таблицы. Для свободной клетки (A<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>) неравенство выполняется:  $0 + 6 \geq 6$ , для свободной клетки (A<sub>1</sub>, B<sub>3</sub>) – также выполняется:  $0 + 5 \geq 4$ , а для свободной клетки (A<sub>1</sub>, B<sub>4</sub>):  $0 + 1 < 5$  – не выполняется. Следовательно, имеющийся план перевозок не оптимален. Целевую функцию можно уменьшить, вводя перевозку опор из A<sub>1</sub> в B<sub>4</sub>.

### 3. Определение нового базисного решения.

В клетку (A<sub>1</sub>, B<sub>4</sub>) впишем поставку  $\Delta > 0$ . Если мы в клетку (A<sub>1</sub>, B<sub>4</sub>) внесли поставку  $\Delta$ , то ее следует вычесть из  $x_{11}$ , что в свою очередь требует добавки ее к  $x_{22}$  и так далее, пока мы не вернемся в клетку (A<sub>1</sub>, B<sub>4</sub>).

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>		
		60	100	20	40		
A <sub>1</sub>	20	20 - Δ	3	6	5	1	Δ
A <sub>2</sub>	80	40 + Δ	1	4	3	2	
A <sub>3</sub>	120	4	60 + Δ	3	20	1	2

Обходя клетки таблицы (27) в той последовательности, в какой мы компенсируем  $\Delta$ , получим замкнутую ломаную линию, чередующуюся из горизонтальных и вертикальных звеньев (указаны пунктиром). Одна

из вершин этой ломаной линии находится в свободной клетке, остальные – в базисных клетках (не обязательно во всех). Такая ломаная линия называется циклом пересчета, соответствующим свободной клетке. Клетки, в которых величина  $\Delta$  записана со знаком «+», будем называть положительными вершинами цикла пересчета, а клетки, в которых  $\Delta$  записана со знаком «-» – отрицательными вершинами цикла пересчета.

Существует определенное правило перераспределения поставок. Начиная со свободной клетки, для которой неравенство  $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$  не выполняется, и двигаясь по циклу пересчета, в вершинах цикла расставляют чередуясь знаки «+» и «-». Просматриваются поставки, записанные в отрицательных вершинах, и среди них выбирается наименьшая. Это число прибавляется ко всем поставкам, записанным в положительных вершинах, и вычитается из всех поставок в отрицательных вершинах. Свободная клетка, для которой строится цикл пересчета, объявляется базисной, а одна из базисных, входящих в цикл пересчета, – свободной, так как поставка в ней будет равна нулю.

В нашем случае минимальной является поставка  $\Delta = 20$ , ее помещаем в клетку  $(A_1, B_4)$  и объявляем базисной, помечая рамкой, а клетку  $(A_1, B_1)$  делаем свободной, уничтожая в ней рамку.

В результате получим следующую таблицу

		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		60	100	20	40
$A_1$	20	3	6	5	1
$A_2$	80	1	4	3	2
$A_3$	120	4	3	1	2
		80	20	20	20

(28)

После пересчета мы получим новый план перевозок:  $x_{14} = 20$ ,  $x_{21} = 60$ ,  $x_{22} = 20$ ,  $x_{32} = 80$ ,  $x_{33} = 20$ ,  $x_{34} = 20$ ,  $x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{23} = x_{24} = x_{31} = 0$ .

Значение целевой функции при новом базисном плане будет  $1 \cdot 20 + 1 \cdot 60 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 80 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 20 = 460$ .

Как видим, величина целевой функции уменьшилась.

Одной из особенностей формирования цикла пересчета является возможность появления в нескольких вершинах нулей. В этой ситуации

лишь одна из них объявляется свободной, а остальные остаются базисными с нулевыми поставками. Этим сохраняется равенство числа базисных клеток  $m + n - 1$ .

4. Исследование полученного базисного решения на оптимальность.

Сначала определим  $\alpha_i$  и  $\beta_j$ . Принимая  $\alpha_1 = 0$ , определим  $\beta_4$ :  $0 + 1 = \beta_4$ , откуда  $\beta_4 = 1$ . Зная  $\beta_4$ , определим  $\alpha_3$  (клетка  $(A_3, B_4)$ ):  $\alpha_3 + 2 = 1$ , следовательно  $\alpha_3 = -1$ . Аналогичным образом мы получим другие значения  $\alpha_i$  и  $\beta_j$ :  $\beta_1 = -1$ ,  $\beta_2 = 2$ ,  $\beta_3 = 0$ , и  $\alpha_2 = 2$ . В результате можно составить следующую таблицу

		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
		60	100	20	40	
$A_1$	20	3	6	5	1	$\alpha_1 = 0$
$A_2$	80	1	4	3	2	$\alpha_2 = -2$
$A_3$	120	4	3	1	2	$\alpha_3 = -1$
		$\beta_1 = -1$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 1$	

(29)

5. Проверим, выполняется ли неравенство  $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$  для свободных клеток этой таблицы. Для свободных клеток  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_1, B_2)$ ,  $(A_1, B_3)$ , неравенство выполняется, так как для них, соответственно  $0 + 3 \geq -1$ ;  $0 + 6 \geq 1$ ;  $0 + 5 \geq 0$  и  $-2 + 3 \geq 0$ , на для свободной клетки  $(A_2, B_4)$  неравенство не выполняется:  $-2 + 2 < 1$ . Следовательно, базисный план не оптимален и его можно улучшить, увеличив поставку в клетку  $(A_2, B_4)$ .

6. Построим новый базисный план. Пометим знаком «+» клетку  $(A_2, B_4)$  и ходом ладьи построим цикл пересчета. Получим следующую таблицу

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
		60	100	20	40
A <sub>1</sub>	20	3	6	5	1
A <sub>2</sub>	80	1	4	3	2
A <sub>3</sub>	120	4	3	1	2

(30)

Среди поставок, имеющих знак «-», наименьшей является поставка, равная 20. Увеличивая поставки в клетках со знаком «+» на 20 и уменьшая поставки в клетках со знаком «-» на 20 единиц, получим следующую таблицу

		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
		60	100	20	40	
A <sub>1</sub>	20	3	6	5	1	$\alpha_1 = 0$
A <sub>2</sub>	80	1	4	3	2	$\alpha_2 = -1$
A <sub>3</sub>	120	4	3	1	2	$\alpha_3 = -1$

$\beta_1 = 0$      $\beta_2 = 2$      $\beta_3 = 0$      $\beta_4 = 1$

(31)

Клетка (A<sub>2</sub>, B<sub>4</sub>) теперь будет базисной с поставкой, равной 20.

В результате пересчета поставок в двух базисных клетках (A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>) и (A<sub>3</sub>, B<sub>4</sub>) поставки стали равны нулю. Однако, лишь одну из них, например, (A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>) мы объявим свободной, а другую (A<sub>3</sub>, B<sub>4</sub>) оставим базисной с нулевой поставкой. Этим мы сохраним равенство количества базисных клеток числу  $m + n - 1$ .

7. Проверим на оптимальность полученное новое базисное решение. Приравняв  $\alpha_1 = 0$  в таблице (2.36), определим остальные  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  и запишем их справа и под таблицей.

Проверим выполнение неравенства  $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$  для всех свободных клеток ( $0 + 3 \geq 0$ ;  $0 + 6 \geq 2$ ;  $0 + 5 \geq 0$ ;  $-1 + 4 \geq 2$ ;  $-1 + 3 \geq 0$ ;  $-1 + 4 \geq 0$ ) устанавливаем, что полученное решение является оптимальным.

Осуществив такой план перевозок, суммарные затраты на доставку опор будут наименьшими и составят

$$z_{\min} = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 20 = 440.$$

При решении транспортной задачи может возникнуть ситуация, когда оптимальный план будет не один, а несколько. В этом случае рекомендуется выбирать один из них, пользуясь не только количественными, но и другими соображениями, например, скоростью доставки груза в некоторые пункты, условиями перевозки и т. д.