



Скляров Игорь Юрьевич
С=RU, S=Ставропольский
край, Т=Ставропольский
учебной работы, О=
ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ ""
СТАВРОПОЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ""
СНИЛС=04314925333,
ИНН=263402424665, E=
oit@stgau.ru, G=Игорь
Юрьевич, SN=Скляров,
CN=Скляров Игорь
Юрьевич
2026.01.26 16:07:04+03'00'

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**



**ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА
«ПРОФЕССИОНАЛИТЕТ»**

Уровень профессионального образования
Среднее профессиональное образование

Образовательная программа
Подготовки специалистов среднего звена

Специальность
09.02.07 Информационные системы и программирование

На базе среднего общего образования

Квалификация выпускника
Программист

Одобрено на заседании педагогического совета: протокол № 5 от «28» марта 2025 г.

2025 год

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
МДК 01.03 РАЗРАБОТКА МОБИЛЬНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ**

для специальности: 09.02.07 «Информационные системы и программирование»

**Ставрополь
2024**

Критерии оценивания практических умений:

«Отлично» - ставится, если студент:

- а) уверенно и правильно выполняет манипуляцию в точном соответствии с алгоритмом;
- б) обнаруживает полное понимание целей выполняемой манипуляции, может обосновать свои действия, пользуясь профессиональной терминологией, правильно отвечает на дополнительные вопросы;
- в) свободно владеет речью (демонстрирует связность и последовательность в изложении);
- г) демонстрирует умение действовать в стандартных и нестандартных профессиональных ситуациях.

«Хорошо» - ставится, если студент обнаруживает практические умения, удовлетворяющие тем же требованиям, что и для отметки «отлично», но допускает единичные негрубые ошибки, которые сам же исправляет после замечания преподавателя.

«Удовлетворительно» - ставится, если студент обнаруживает практические умения, но:

- а) допускает неточности при выполнении алгоритма, не приводящие к негативным последствиям, затрудняется обосновать свои действия, затрудняется при ответе на дополнительные вопросы;
- б) излагает материал недостаточно связно и последовательно с частыми заминками и перерывами;
- в) испытывает затруднения в действиях при нестандартных профессиональных ситуациях.

«Неудовлетворительно» - ставится, если студент допускает грубые нарушения алгоритма действий и ошибки, влекущие за собой возникновение последствий, отсутствие умения действовать в стандартных профессиональных ситуациях.

Содержание

Лабораторная работа №1. Создание первого приложения	5
Лабораторная работа №2. Работа с элементами	32
Лабораторная работа №3. Работа с экранами	39
Лабораторная работа №4. Стили и темы	46
Лабораторная работа №5. Работа со списками	50
Лабораторная работа №6. Работа с анимацией.....	61
Лабораторная работа №7. Работа с картами	65
Лабораторная работа №8. Создание виджета.....	71
Лабораторная работа №9. Работа с меню.....	78
Лабораторная работа №10. Работа с диалоговыми окнами	84
Лабораторная работа №11. Работа с уведомлениями	88
Лабораторная работа №12. Работа с аудио	94
Лабораторная работа №13. Работа с видео	95
Лабораторная работа №14. Работа с камерой	97
Лабораторная работа №15. Работа с настройками и БД	100

Лабораторная работа №1. Создание первого приложения

Задание: скачать и установить последние версии Java Development Kit и Android Studio, установить необходимые компоненты SDK, сконфигурировать эмулятор, создать новый проект, изменить TextView с надписью "Hello world" на свои ФИО и запустить проект на эмуляторе.

Для того, чтобы начать программировать под Android, необходимо скачать и установить две вещи: Java Development Kit (JDK) и Android Studio. Тут дело в том, что на многих компьютерах уже установлена Java какой-то версии, поэтому первый шаг необязателен. Но лучше всего всё-таки установить последнюю версию, на всякий случай, чтобы получить доступ к последней версии языка и development kit-a. Для этого нужно перейти по адресу [oracle.com – Products – Hardware and Software – Java – Download Java –](https://www.oracle.com/Products/Technology/Java/DownloadJava/) - выбираем свою ОС и разрядность и нажимаем на ссылку, чтобы скачать файл установки (в моём случае это был файл `jdk-8u381-windows-x64.exe` и `jdk11.0.20_windows-x64_bin.exe`) и установить с параметрами по умолчанию, для установки нужны права администратора.

Вторым шагом идёт установка Android Studio. Тут у нас есть дилемма: дело в том, что этот курс традиционно читается на Java, а последняя (и не только) версия Android Studio предлагает программировать на Kotlin по умолчанию. С другой стороны, последние (свежие, вышедшие недавно) версии Android Studio, как правило, нестабильные и в них очень много багов – как визуальных, так и на уровне программирования. Поэтому, если вам нравится Kotlin, и вы не боитесь багов и нестабильности, перейдите по адресу <https://developer.android.com/studio/>, нажмите на кнопку «Download Android Studio (Giraffe на данный момент)», примите лицензию, скачайте и установите приложение с параметрами по умолчанию (версия 2022.3.1.19, Android Studio Giraffe, Patch 1, август 17, 2023, см. рис. 1), для установки

нужны права администратора. Если же вам больше подходит стабильность, отсутствие багов и Java для шаблона Empty Activity, надо найти проверенную версию Android Studio под названием Electric Eel (последний патч для которой тоже вышел в 2023 году), и установить её, например, отсюда:

<https://redirector.gvt1.com/edgedl/android/studio/install/2022.1.1.20/androidstudio-2022.1.1.20-windows.exe>. Electric Eel позволяла выбирать язык программирования между Java и Kotlin даже для шаблона Empty Activity. Если хотите, можно найти ещё более старую версию Android Studio, например Dolphin или Arctic Fox, или даже использовать другую IDE типа IntelliJIDEA, Eclipse или даже Visual Studio – для прохождения данного курса

этого будет вполне достаточно. Но вы должны установить и сконфигурировать соответствующие компоненты в сторонних IDE самостоятельно, если будете использовать их – Android SDK + Android Emulator.



Рисунок 1 – Версия Android Studio Giraffe

После скачивания файла установки запустите его, и вы увидите окно, показанное на рисунке 2. Оно появится, если у вас ранее была установлена какая-то

версия Android Studio. Можно выбрать опцию не импортировать настройки, как показано на рисунке 2, и нажать кнопку ОК.

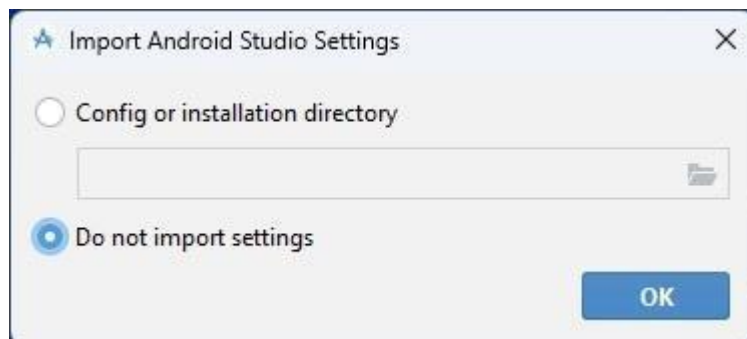


Рисунок 2 – Окно импорта настроек из предыдущей версии Android Studio

Далее появится окно сбора статистики использования Android Studio, изображённое на рисунке 3. Здесь вам нужно сделать выбор, посылать ли эту статистику в Google, или нет.

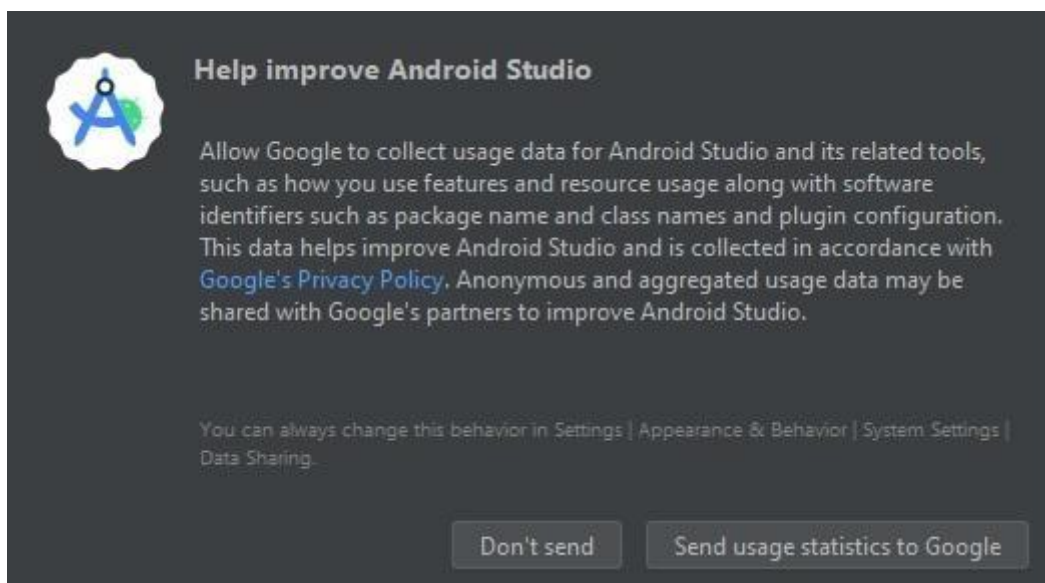


Рисунок 3 – Окно сбора статистики использования среды

Далее появится окно приветствия установщика Android Studio, показанное на рисунке 4. На нём можно видеть условные обозначения устройств, для которых можно разрабатывать приложения в Android Studio.

Нажмите кнопку Next.

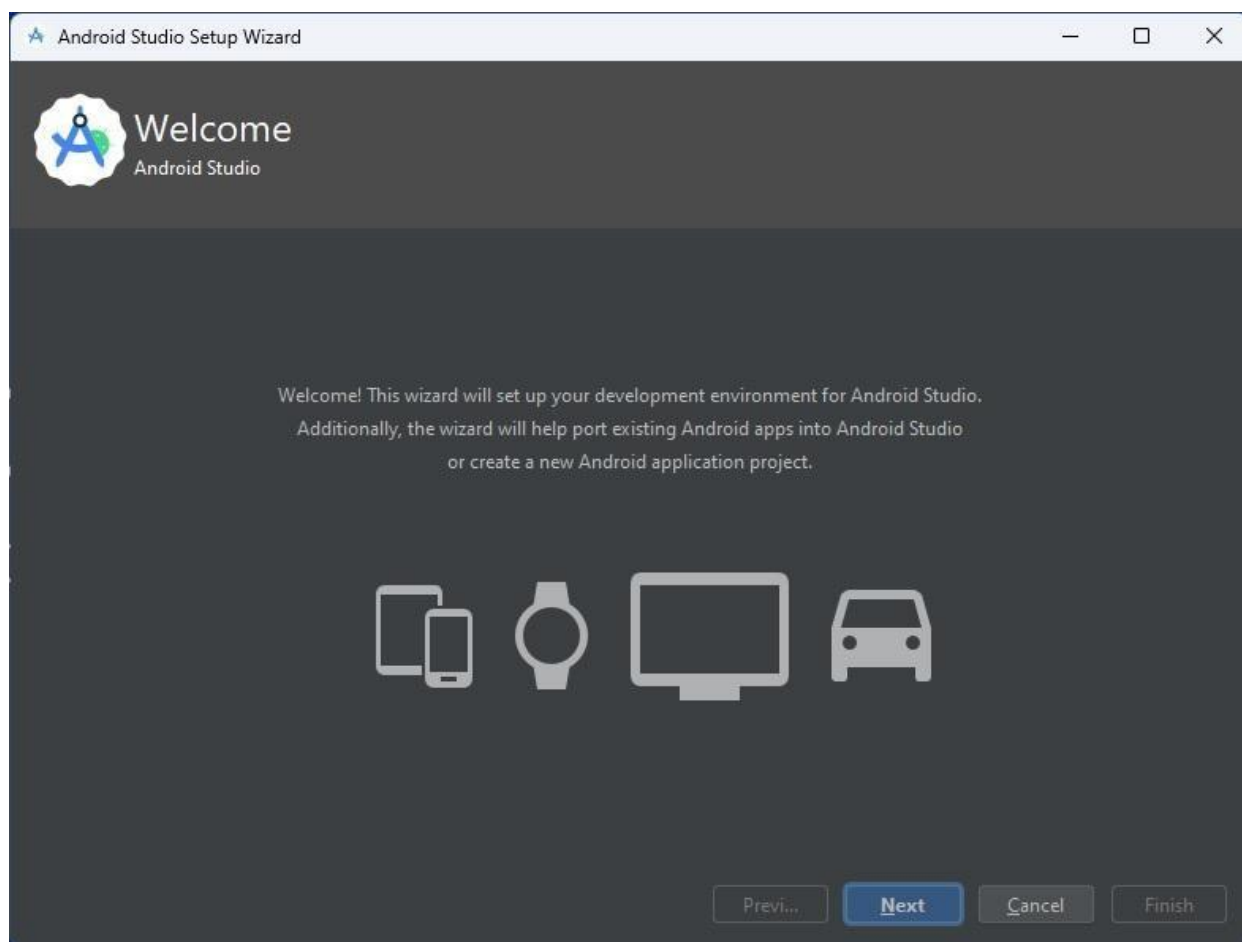


Рисунок 4 – Окно приветствия установщика

В следующем окне, приведённом на рисунке 5, необходимо выбрать тип установки. Рекомендуемый тип – стандартный, он стоит по умолчанию. Однако если вам уже на этом этапе необходимо выбрать что-то ещё, можно выбрать тип Custom (пользовательский). Нажмите на кнопку Next.

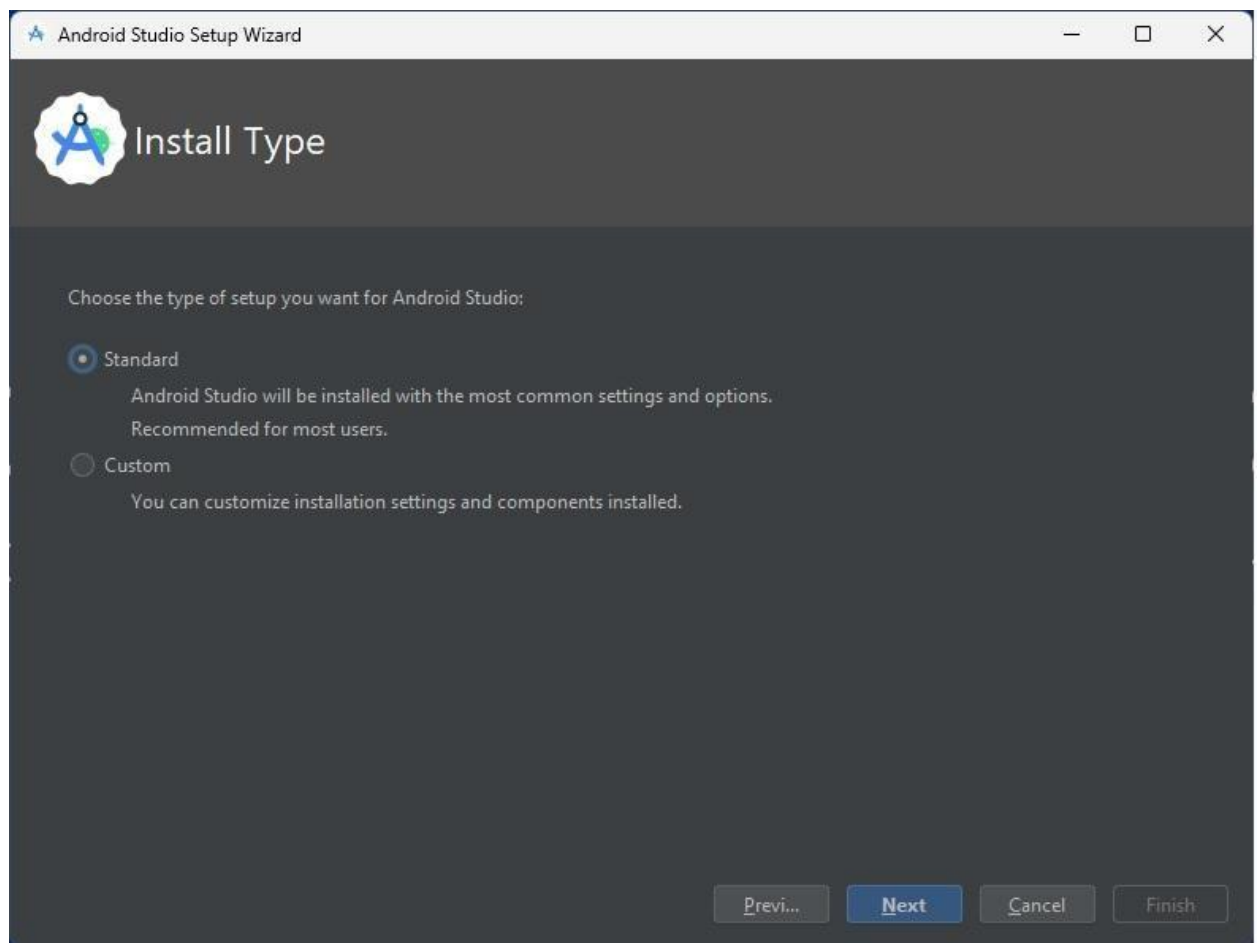


Рисунок 5 – Окно выбора типа установки

В следующем окне вы можете выбрать, как будет выглядеть среда разработки, в основном это касается цвета фона, на котором будет код, см. рисунок 6. Снова нажмите кнопку Next после выбора темы.

В очередном окне, показанном на рисунке 7, установщик показывает вам всю необходимую информацию, собранную им для установки. Можно снова нажать на кнопку Next.

Далее надо согласиться с лицензией. Установщик представляет возможность подробнее изучить лицензию, см. рисунок 8. Обратите внимание, что Ассерт надо выбирать для каждой категории лицензий, показанных в окне слева, т.е. в данном случае – три раза, а не один, см. рисунок 9. Пока вы не подтвердите своё согласие со всеми все лицензиями, вы не сможете нажать на кнопку Finish (рисунок 8), на которую надо нажать, чтобы установщик приступил к работе (рисунок 9).

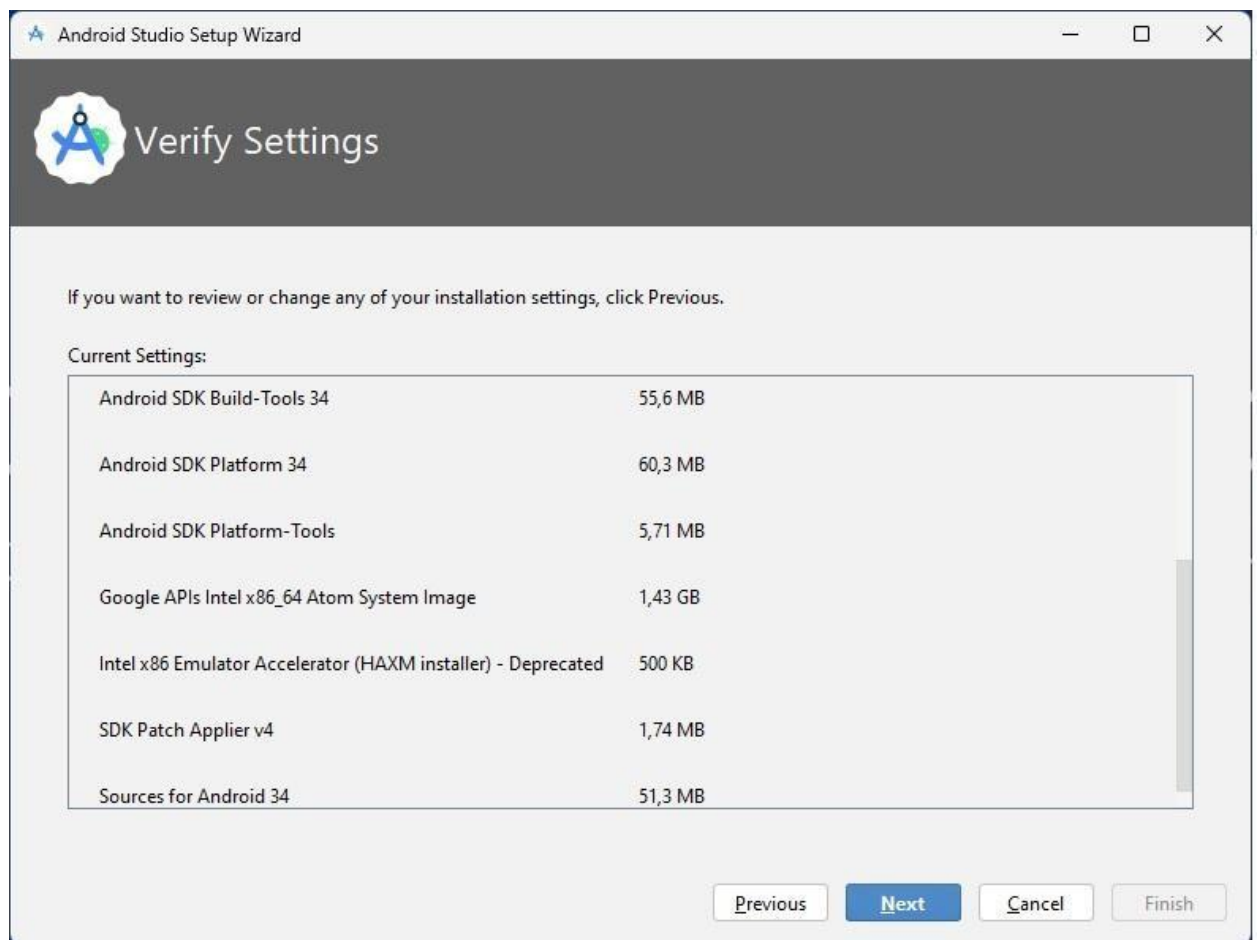


Рисунок 7 – Подтверждение выбранных компонентов для установки

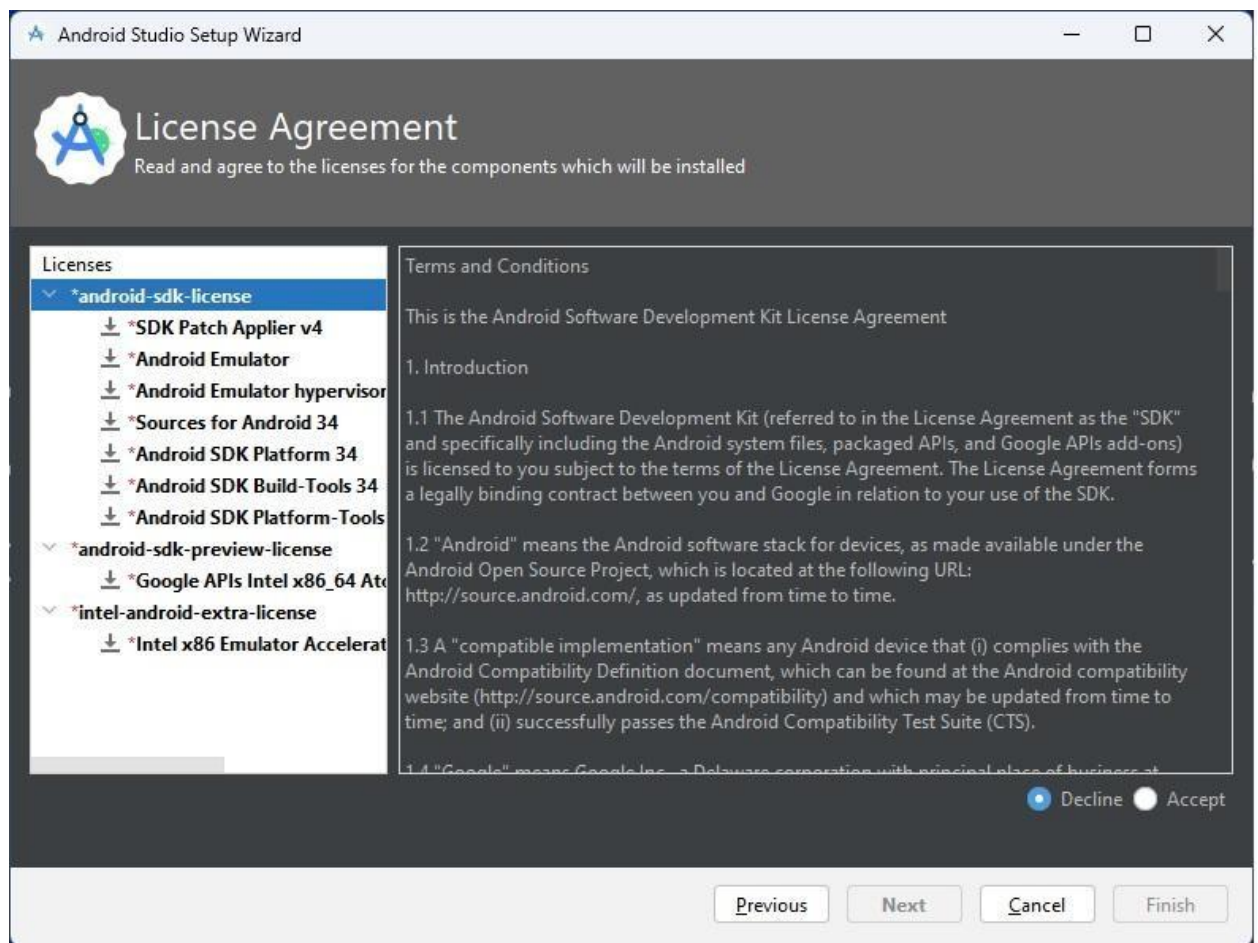


Рисунок 8 – Подтверждение согласия с лицензией

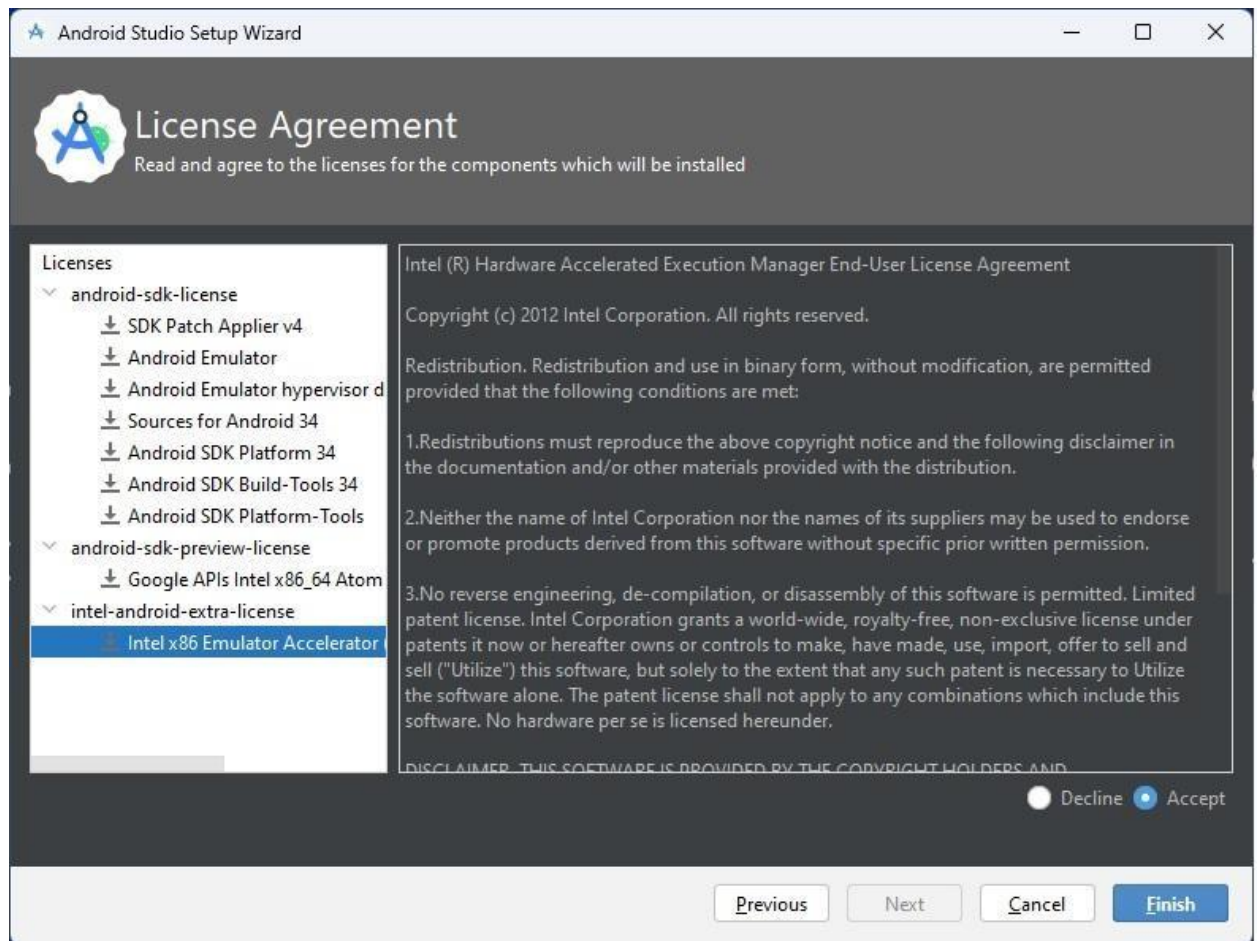


Рисунок 9 – Подтверждение согласия с лицензией – со всеми лицензиями

После того, как вы нажмёте кнопку Finish, начнётся установка выбранных компонентов, как показано на рисунке 10. По завершении установки надо снова нажать на кнопку Finish.

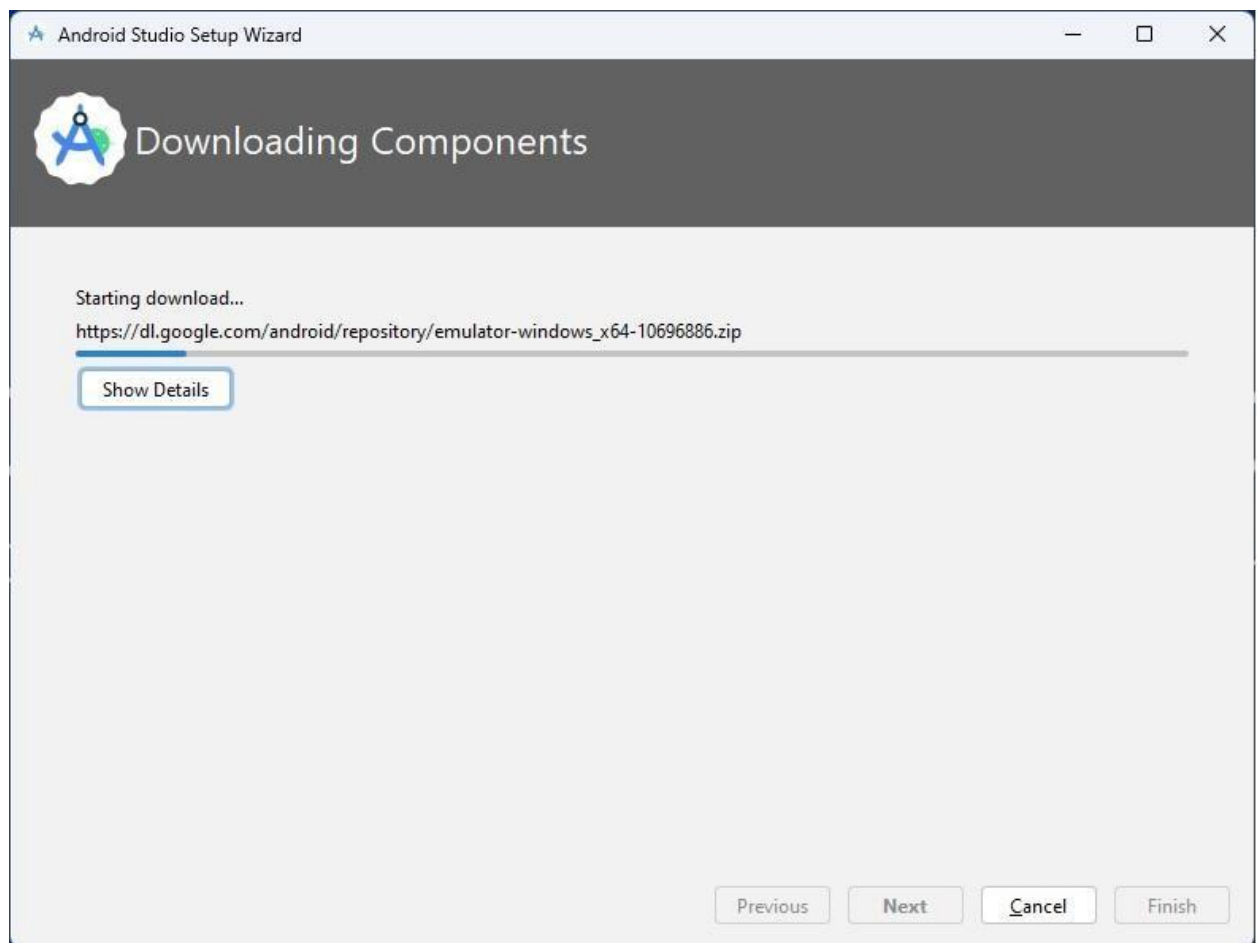


Рисунок 10 – Процесс установки

После установки появится другое окно приветствия, которое показано на рисунке 11 и принадлежит уже самой Android Studio, а не её установщику. Но появится оно только в том случае, если у вас ещё нет ни одного проекта в предыдущих версиях Android Studio, в которой вы никогда не работали, т.е. установка абсолютно чистая, с нуля.

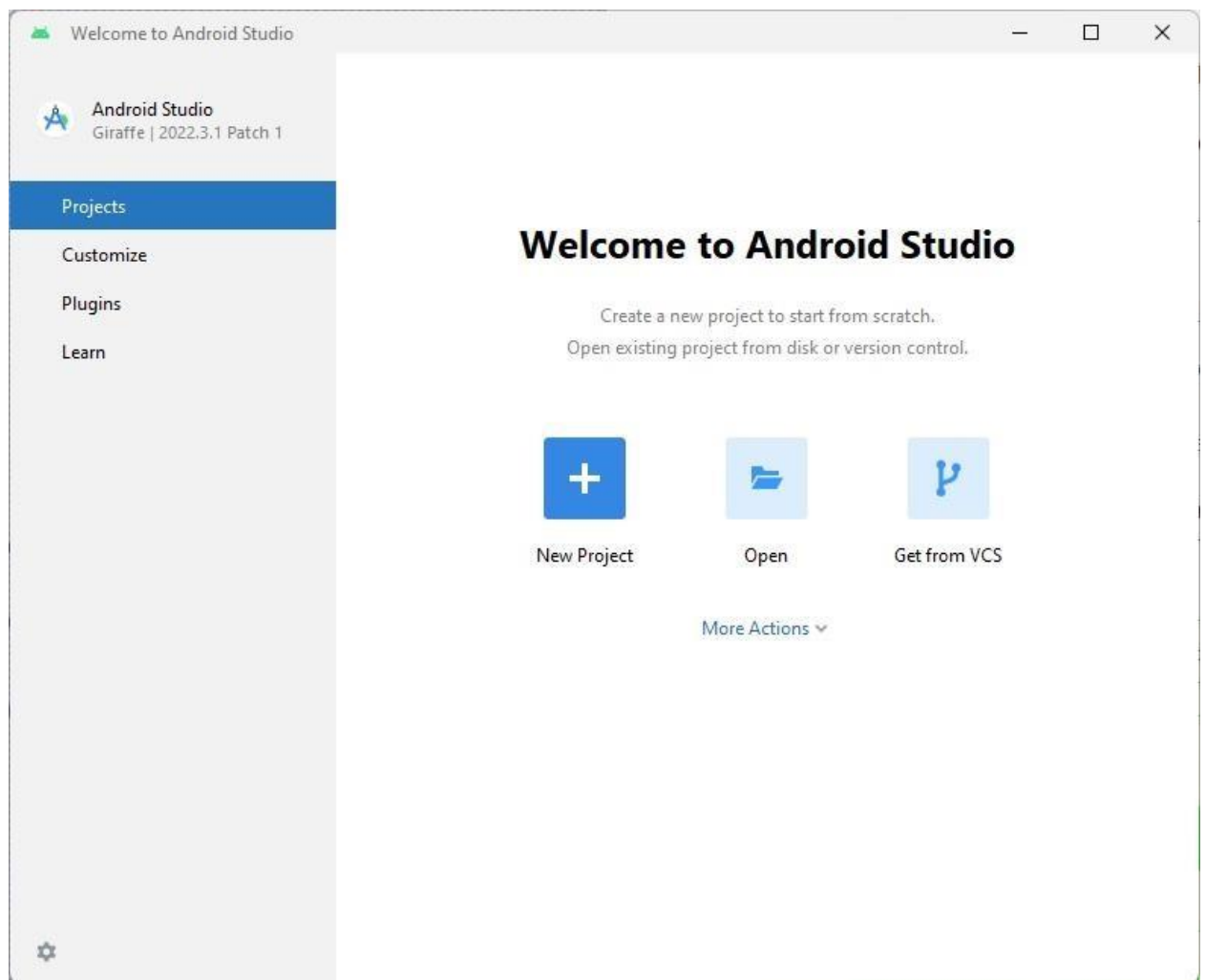


Рисунок 11 – Окно приветствия в Android Studio

В этом окне нас интересует кнопка New Project, но вообще в этом окне есть различные дополнительные возможности. Например, если нажать на ссылку More Actions, см. рисунок 12, можно понять, что можно, например, сразу перейти в SDK Manager, чтобы скачать пакет одной из последних версий API, можно сразу создать эмулятор (Virtual Device Manager), или импортировать проект.

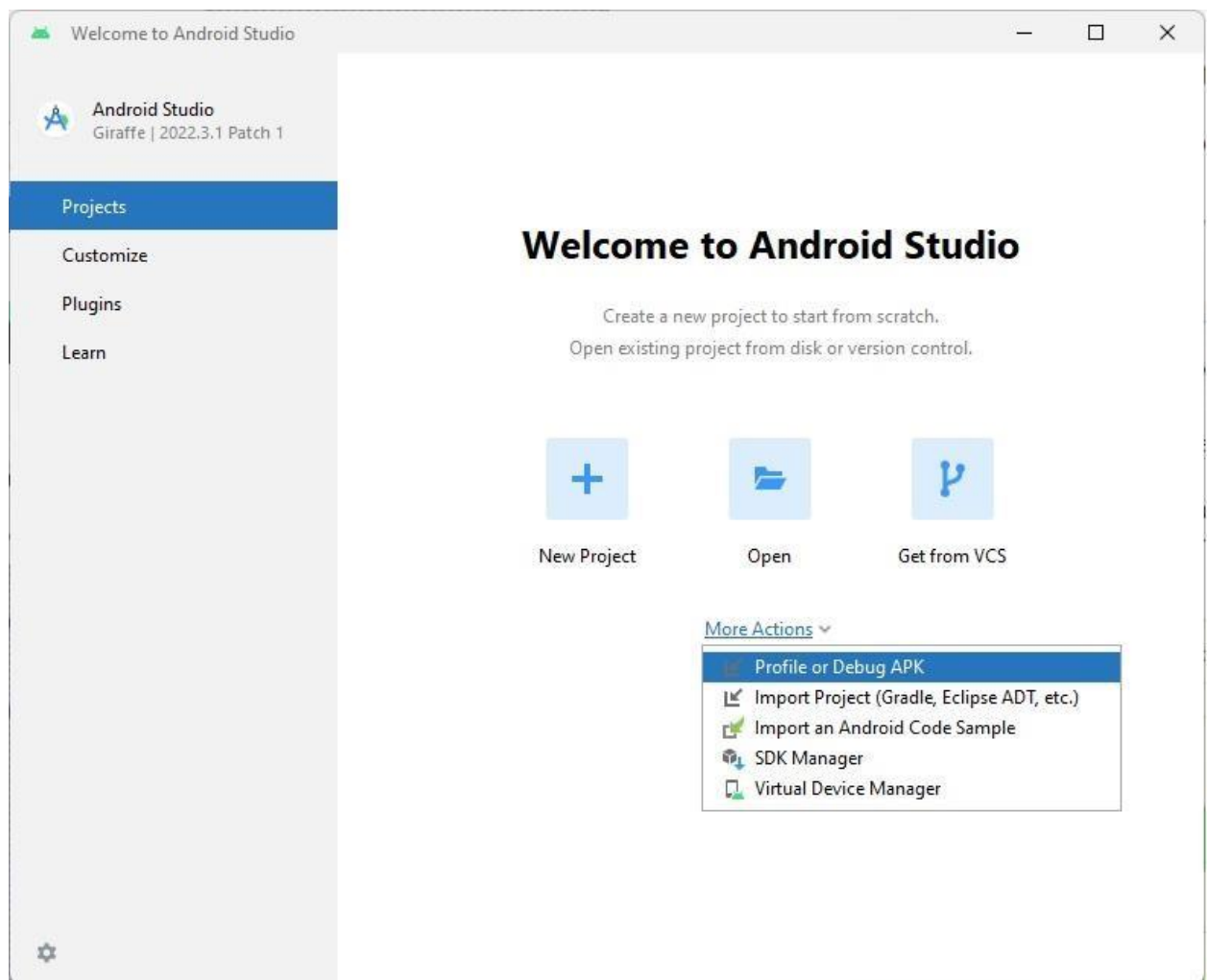


Рисунок 12 – Результат нажатия на More Actions

Если перейти на вкладку Customize, рисунок 13, можно настроить внешний вид среды разработки: поменять тему, синхронизировать её с темой, установленно в операционной системе, поменять шрифт и размер программного кода, и многое другое.

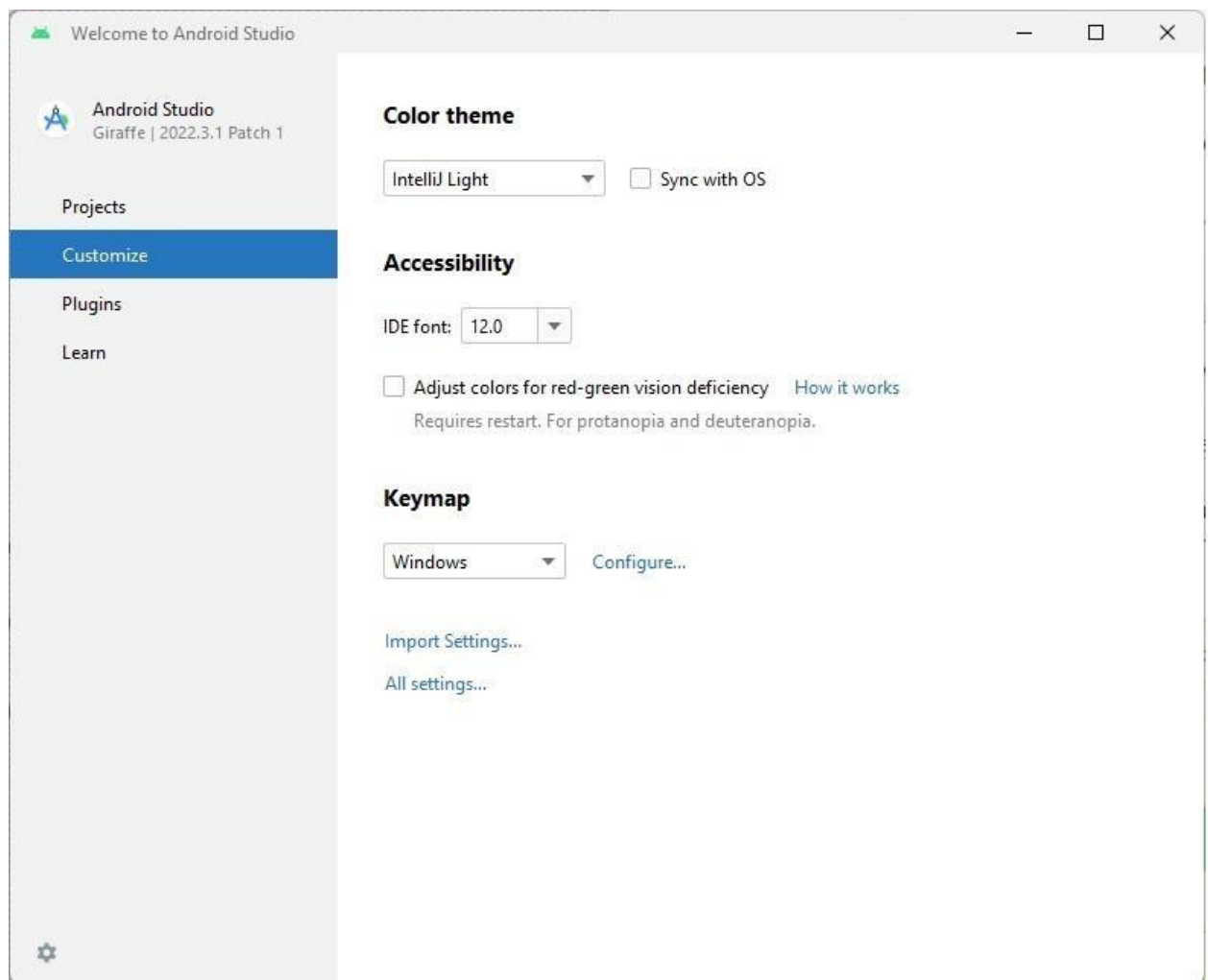


Рисунок 13 – Вкладка Customize в окне приветствия

На вкладке Plugins, см. рисунок 14, можно выбрать и установить дополнительные плагины для среды разработки, прочитать их краткое описание и т.д. Например, можно установить Flutter прямо из этого окна.

И, наконец, если открыть вкладку Learn, изображённую на рисунке 15, можно получить доступ к обучающим материалам по работе с Android Studio. Среди прочего, можно перейти по ссылке к обучающим материалам на платформе Youtube.

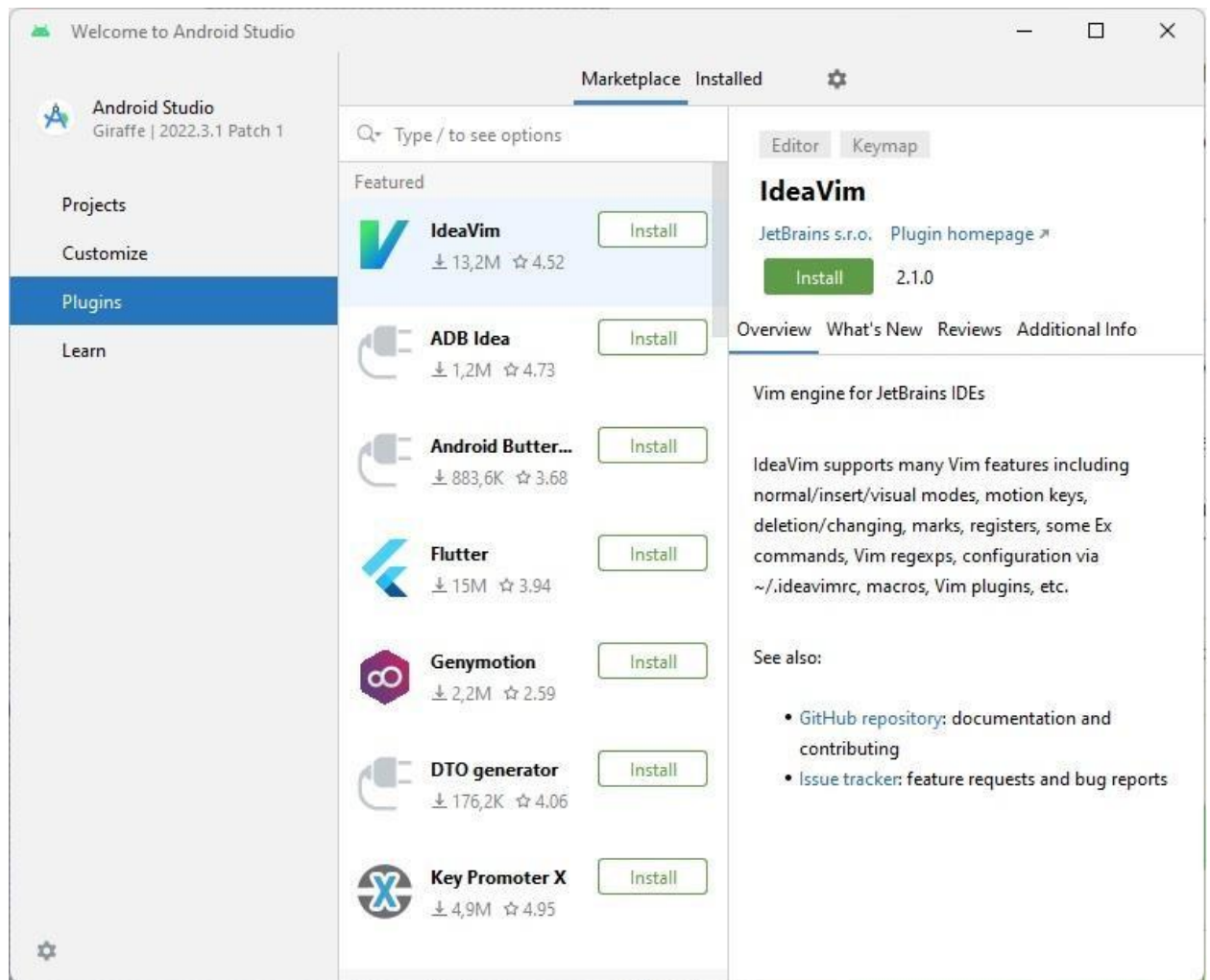


Рисунок 14 – Вкладка Plugins в окне приветствия

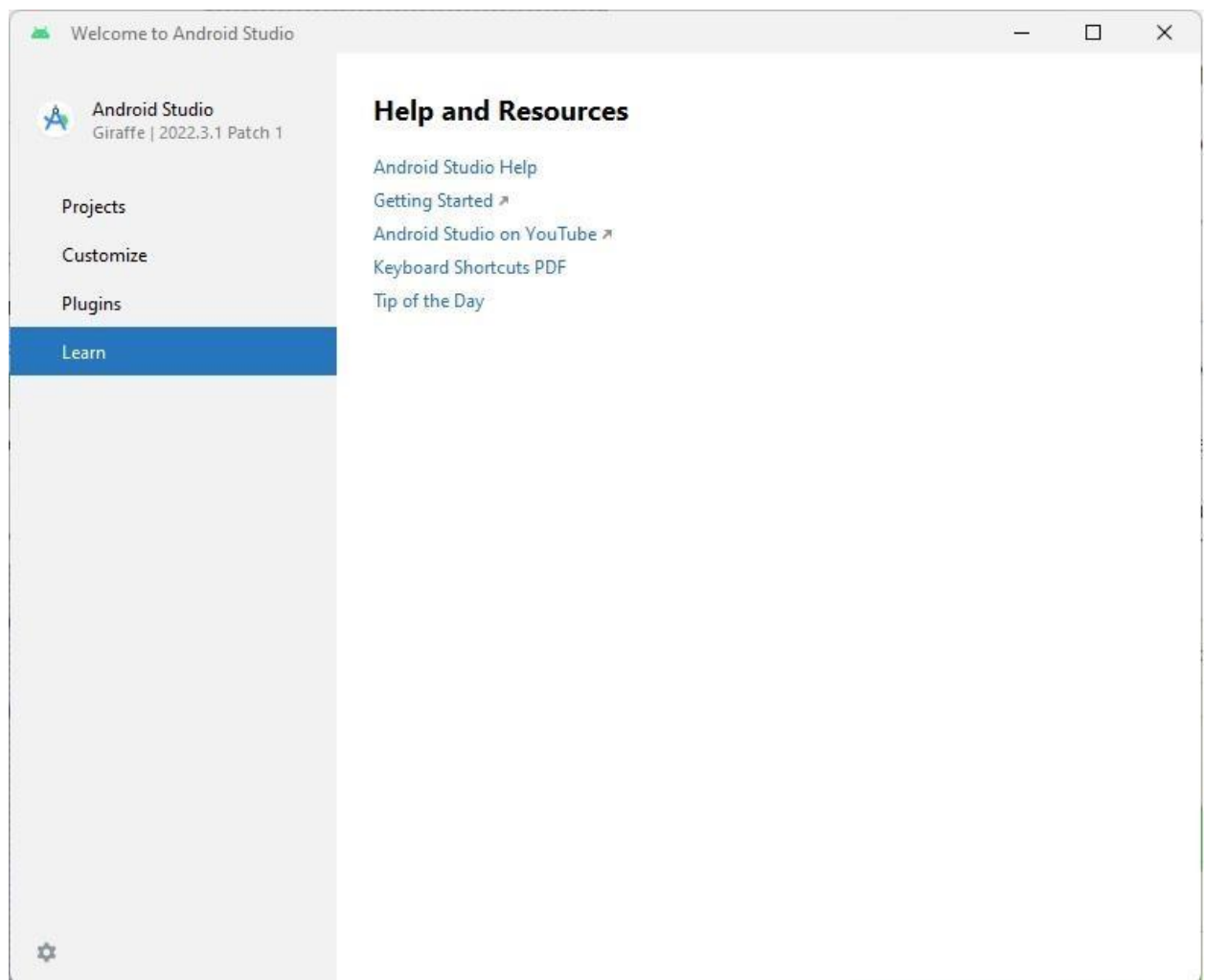


Рисунок 15 – Вкладка Learn в окне приветствия

Вернёмся на вкладку Projects и нажмём на кнопку New Project. Откроется окно, изображённое на рисунке 16. В этом окне можно выбрать платформу, для которой вы хотите создать проект: традиционно это смартфон или планшет (Phone and Tablet), Носимое устройство (часы, Wear OS), телевизор (Television) или автомобильное устройство (Automotive). Нас, разумеется, интересует первый выбор, стоящий по умолчанию: Phone and Tablet. Кроме этого, в данном окне можно выбрать шаблон нового приложения, которое вы собираетесь создать. В большинстве лабораторных работ, согласно реалиям последней версии Android Studio Giraffe, нужно выбирать Empty Views Activity. Если выбрать шаблон Empty Activity, как было раньше (в Electric Eel, например), вы не сможете выбрать язык Java для вашего приложения. Если выбрать No Activity, язык Java вы выбрать сможете, но вам

придётся самостоятельно создавать Activity (окно) для вашего приложения. Вариант Empty Views Activity содержит как выбор языка, так и уже добавленную в интерфейс Activity, на которой ничего нет, и поэтому является предпочтительным – именно его надо выбирать в наших приложениях.

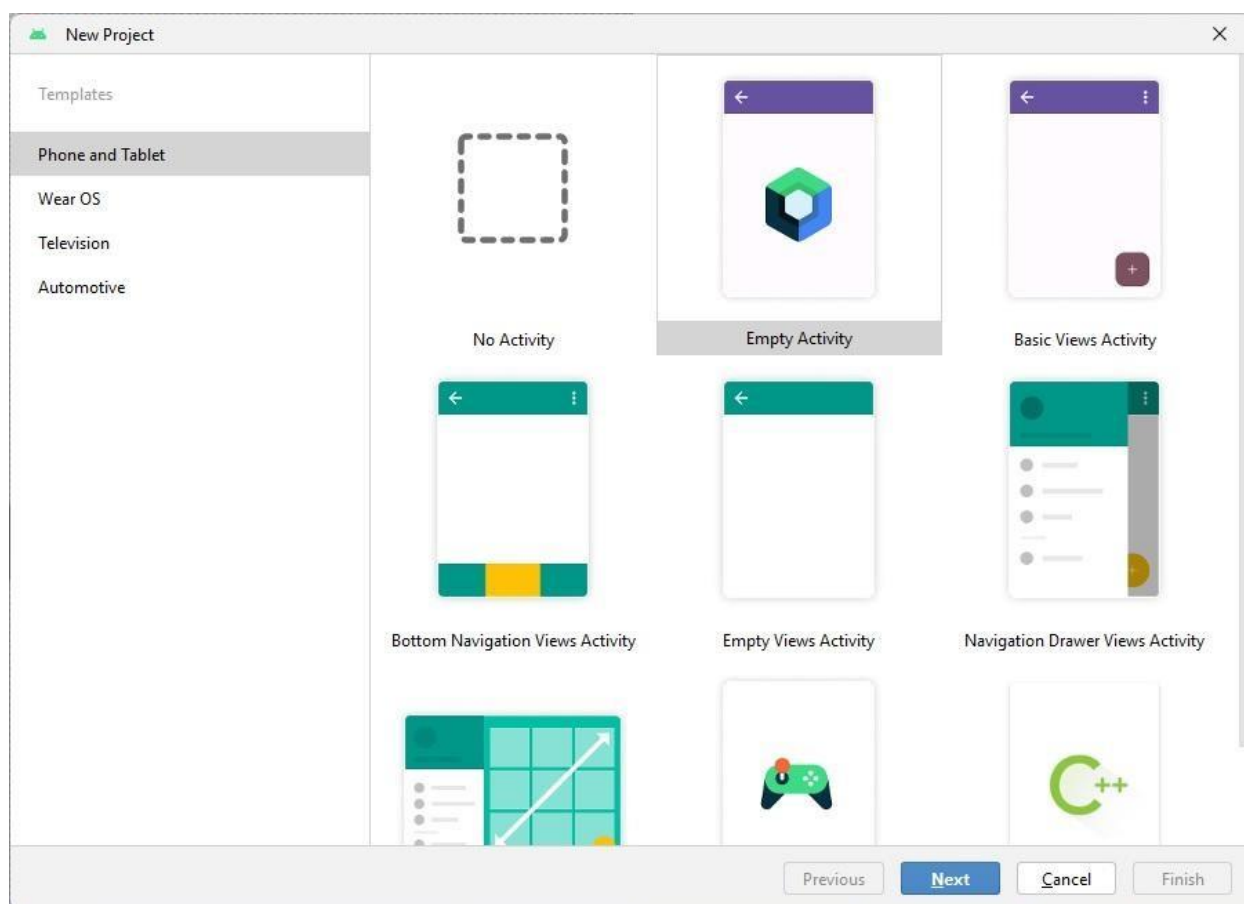


Рисунок 16 – Создание нового проекта

Нажмите Next, и придумайте название проекта, см. рисунок 17. Укажите название приложения в поле Name, корневой пакет приложения в поле Package Name, который является идентификатором приложения (по умолчанию формируется автоматически в виде com.example.myapplication, меняется в зависимости от значения поля Name), и путь для сохранения проекта Save location (лучше оставить по умолчанию). Далее можно выбрать язык (Language - Java) и минимальную версию SDK, на которой приложение будет работать (или по-другому

– минимальную версию ОС Android). Пример заполнения показан на рисунке 17. Google рекомендует использовать как можно меньшую версию API, чтобы приложение можно было установить на большее количество устройств, однако, чем меньше версия API, тем меньше функций будет поддерживать приложение. С другой стороны, по умолчанию Android Studio ставит самую последнюю версию ОС (API 33 Tiramisu в данном случае), которая доступна менее, чем на 15% устройств, по сравнению с API 21 (99,5% устройств). Для корректного выполнения лабораторных работ не рекомендуется использовать API меньше 21, далее выбор за вами. Если у вас есть устройство под управлением Android, было бы логично выбрать соответствующую версию API, которая стоит на телефоне. Соответствие версий API (SDK) и версий ОС Android можно посмотреть, например, здесь: <http://socialcompare.com/en/comparison/android-versionscomparison>. Например, Tiramisu – это Android 13 и, соответственно, 33 версия API/SDK. В качестве Build configuration language я рекомендую выбрать Groovy DSL.

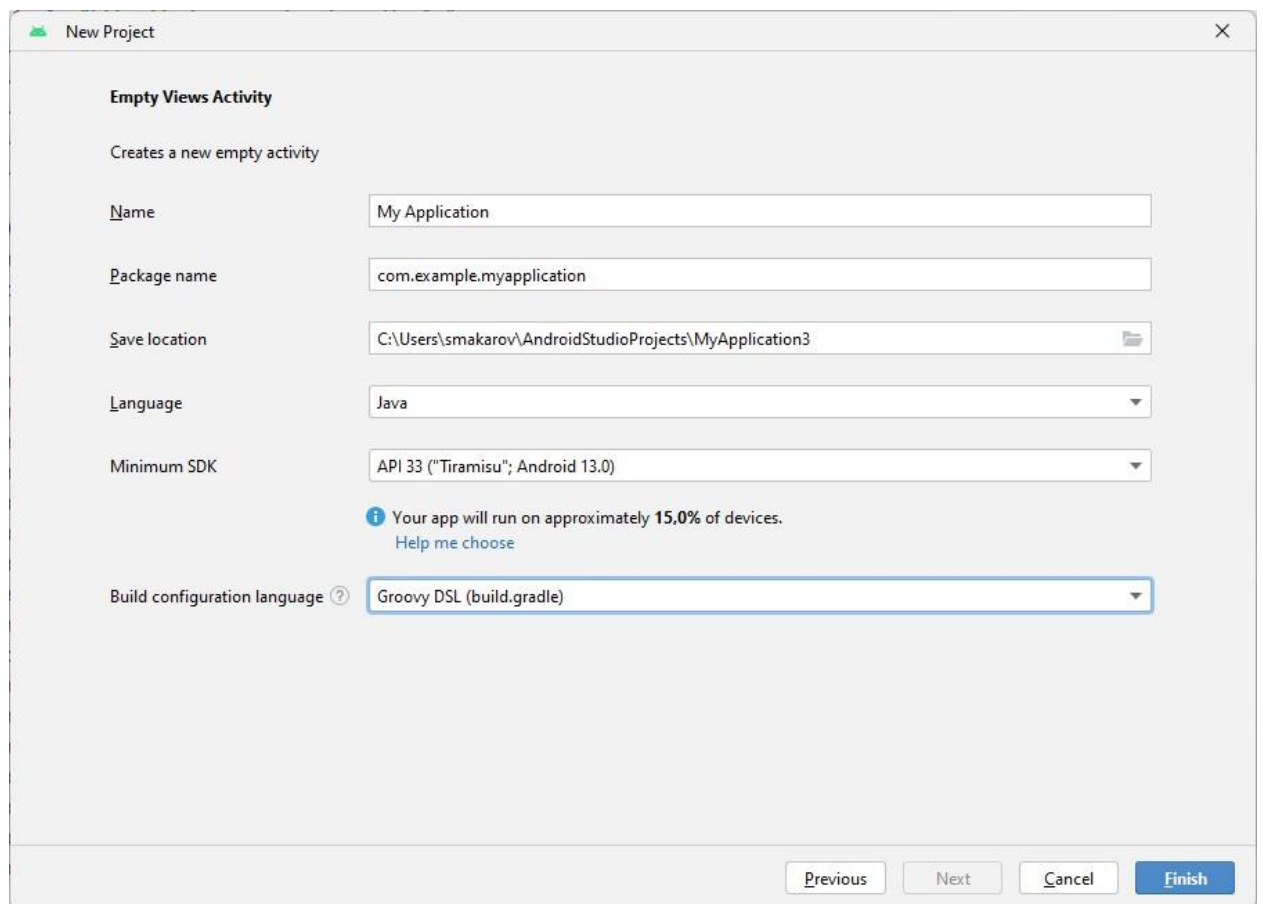


Рисунок 17 – Выбор названия проекта и других параметров

Нажмите «Finish», и через некоторое время, нужное на загрузку необходимых компонентов и построение проекта (рисунок 18), отобразится главное окно среды разработки, которое показано на рисунке 19.

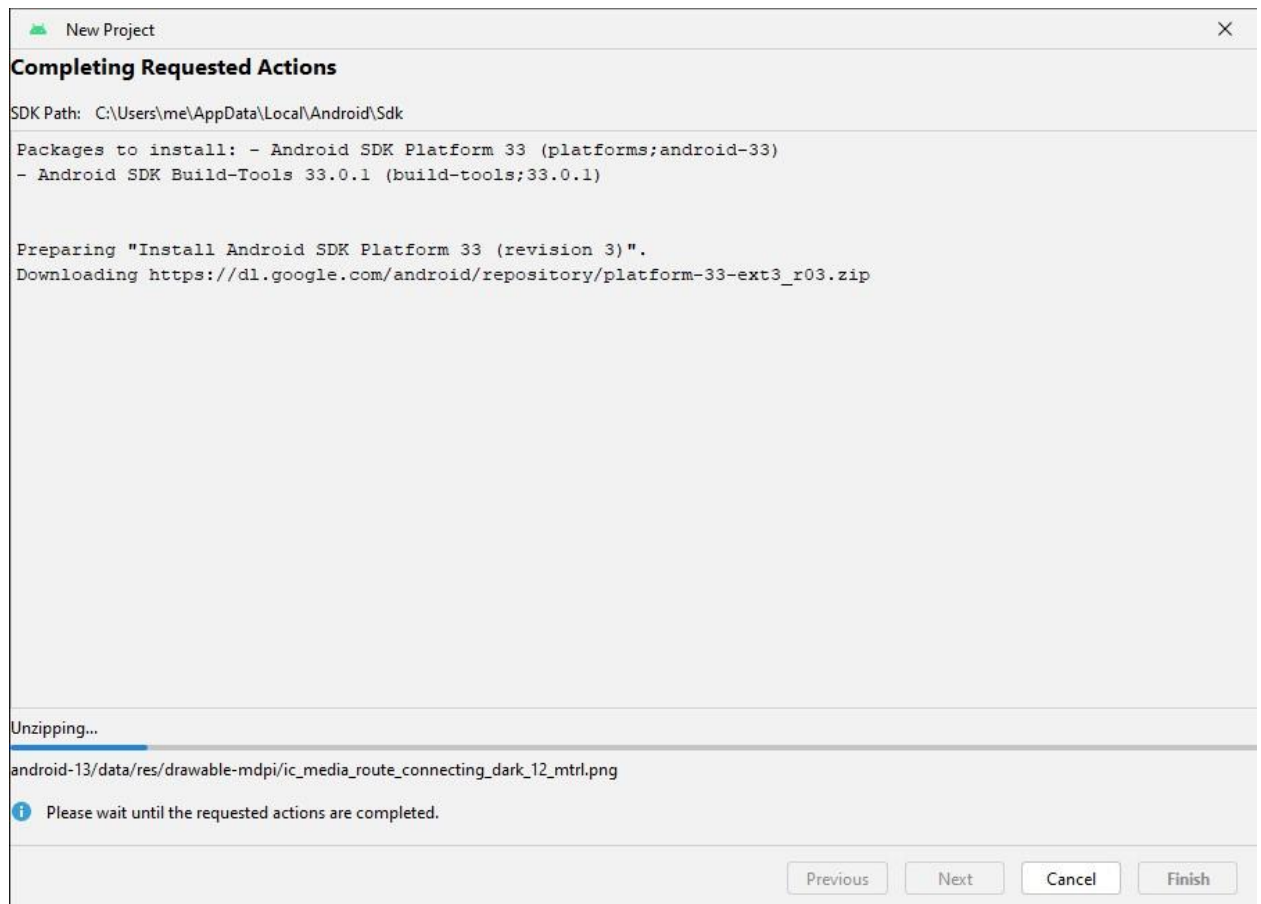


Рисунок 18 – Создание проекта

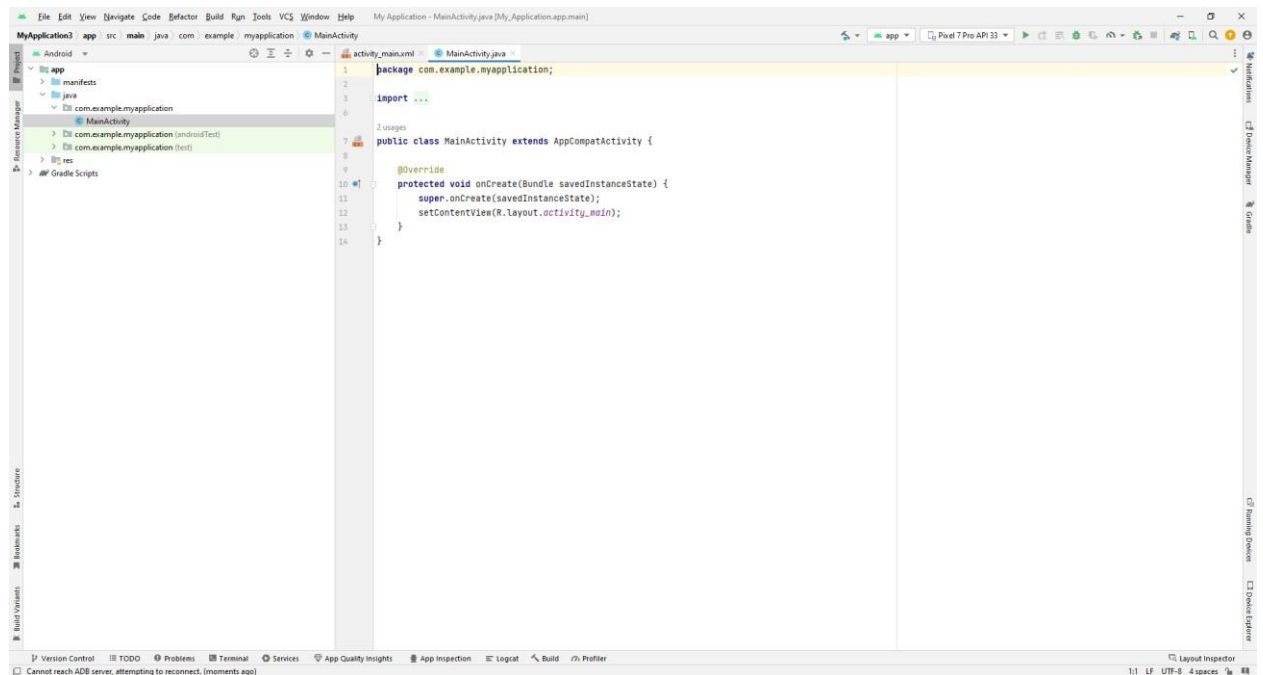


Рисунок 19 – Рабочая область Android Studio

Основные файлы и папки проекта:

- manifests/AndroidManifest.xml - данный файл предоставляет основную информацию о программе системе и является центральным для приложения, в нём перечисляются все используемые Activity, атрибуты и разрешения, которыми обладает приложение, указывается его иконка, название и т.д.
- java/com.example.myapplication – содержит файлы с исходным кодом на языке Java. Именно в этой папке размещаются все классы, создаваемые в процессе разработки приложения
- res/ – содержит структуру папок ресурсов приложения, рассмотрим некоторые из них:
 - layout - в данной папке содержатся xml-файлы, которые описывают внешний вид форм и их элементов, пока там находится только activity_main.xml – интерфейс MainActivity;
 - values - содержит xml-файлы, которые определяют простые значения таких ресурсов, как строки, числа, цвета, темы, стили, которые можно использовать в данном проекте.

При создании проекта сразу же открывается файл MainActivity.java, в котором находится исходный код главного класса проекта. Чтобы открыть интерфейс приложения, нужно два раза кликнуть на res/layout/activity_main.xml файл, содержащий интерфейс первого экрана (Activity) приложения, или просто кликнуть на соседнюю с MainActivity.java уже открытую закладку. В зависимости от версии Android Studio для отображения интерфейса приложения может понадобиться дополнительно скачать и установить различные компоненты. Поскольку ранее мы выбрали Empty Views Activity, в окне интерфейса приложения ничего нет, кроме TextView с надписью «Hello World!», который лежит в контейнере ConstraintLayout. Добавлять интерфейсные элементы можно двумя способами: в графическом (справа сверху кнопка «Design») и текстовом (справа сверху кнопка «Code») представлениях (можно и совмещать – кнопка «Split»). Интерфейсные элементы расположены в

контейнере Palette слева от отображения интерфейса приложения. В контейнере элементы интерфейса сгруппированы по категориям, например, Common (наиболее используемые), Text, Button и т.д. В другом контейнере ниже, Component Tree, расположено дерево всех элементов интерфейса, которые есть в данный момент. На экране уже есть компонент TextView со значением «Hello World!»! Если его не видно, значит, у вас возникли проблемы с рендерингом окна дизайна. Справа вверху есть восклицательный знак в красном кружке, если нажать его, вы увидите суть проблемы.

Нажмите один раз левой кнопкой мыши по компоненту TextView, и справа появится окно, в котором можно задать текст и id для данного элемента. Поле «text» уже заполнено фразой «Hello world!». Если нажать на крошечную кнопку справа от этого поля, откроется окно ресурсов, показанное на рисунке 20. Дело в том, что в файле res/values/strings.xml хранятся все текстовые данные приложения, что позволяет довольно быстро изменять названия различных элементов, а также с лёгкостью создавать локализацию под различные языки. В это окно выводятся значения ресурсов, в том числе и из этого файла. Если нажать кнопку + и выбрать String Value слева вверху, можно с помощью диалоговых окон создать новый строковый ресурс (рисунок 21). После нажатия на кнопку ОК ссылка на ресурс автоматически добавляется в поле text элемента TextView.

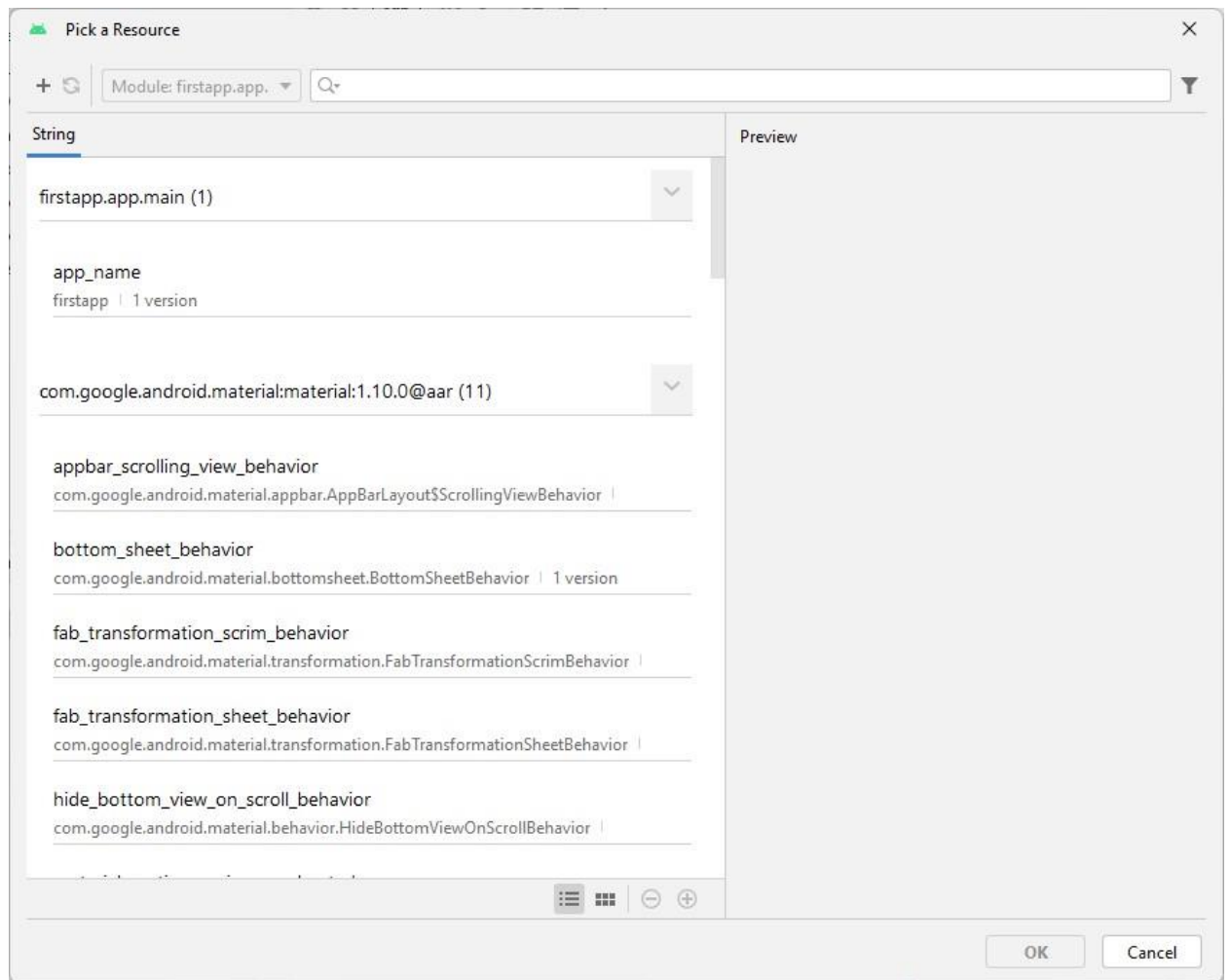


Рисунок 20 – Окно выбора ресурсов

Второй способ создания строкового ресурса – это редактирование непосредственно файла strings.xml. Для этого в файл res/values/strings.xml добавьте новую надпись с именем «fio», для этого необходимо написать следующее:

```
<string name="fio">Иванов Иван Иванович, гр. БПИ 171</string>
```

После того, как вы создали новую строковую переменную с помощью редактирования файла strings.xml, перейдите в файл activity_main.xml и измените название надписи на «@string/fio», а в поле id вставьте «fio» и нажмите Enter.

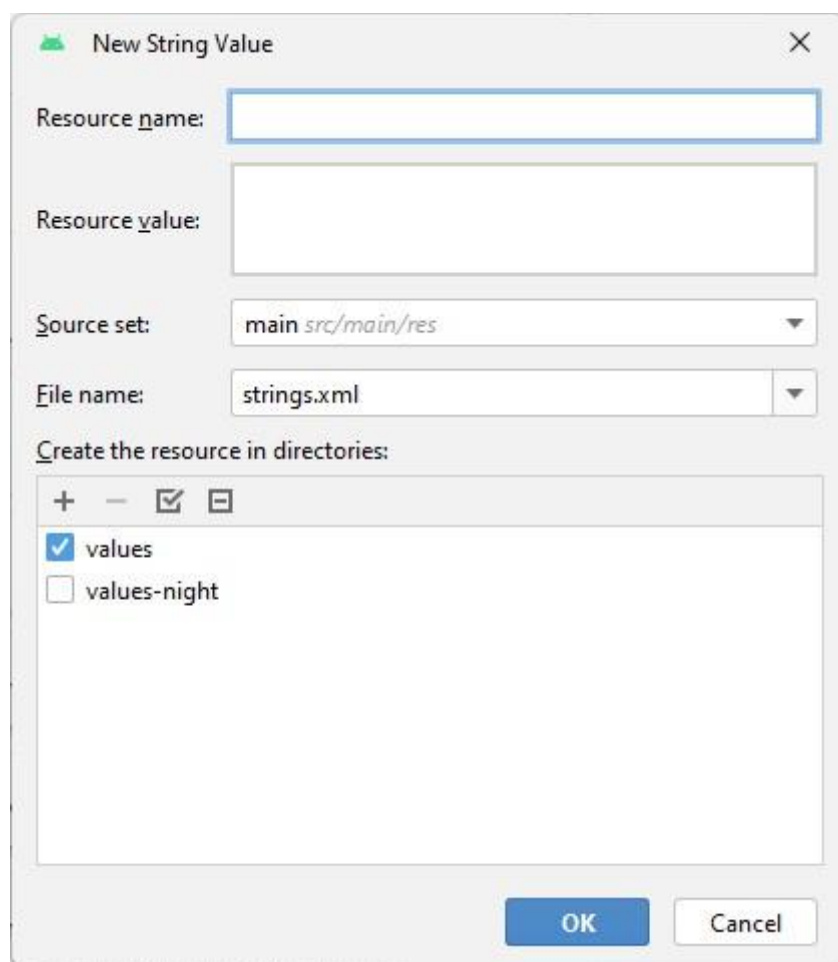


Рисунок 21 – Окно создания нового строкового ресурса

Если всё сделано правильно, то теперь на экране смартфона должны отобразиться ФИО и группа. Осталось запустить приложение на эмуляторе, но для начала эмулятор необходимо создать. Нажмите наверху Tools -> Device Manager, затем в появившейся панели справа нажмите кнопку «Create Device», и в открывшемся окне (рисунок 22) выберите модель телефона (Phone), которую хотите эмулировать, например, Pixel 7, нажмите «Next», выберите образ и скачайте его, нажав на Download (рисунок 23). Лучше во избежание излишней "тормозухи" выбрать API 16 (Android 4.1, armeabi-v7a) на закладке Other Images (рисунок 23), однако если у вас мощный компьютер с хорошим процессором и видеокартой, можно выбрать образы из вкладки Recommended или тот, который соответствует вашему реальному устройству под управлением Android. Закладка x86 Images

служит для счастливых обладателей компьютеров на базе процессоров Intel – для этих эмуляторов существует встроенное средство для десятикратного ускорения работы эмулятора (Intel HAXM – Hardware Accelerated Execution Manager). Однако, начиная с версии 4.1 Android Studio, даже если у вас процессор AMD, работа эмулятора будет ускорена за счёт ресурсов видеокарты, поэтому не важно, на базе какого процессора построен ваш компьютер или ноутбук. Вариант образа, у которого в скобках написано Google APIs, служит для запуска приложений, использующих Google Play Services; нам это пока не требуется, но вообще – потребуется, так что в идеале лучше выбрать эмулятор с Google APIs и/или Google Play (значком). Если у эмулятора есть значок Google Play, значит на эмуляторе можно будет использовать этот магазин для установки новых приложений, и на эмуляторе установлены Google Play Services.

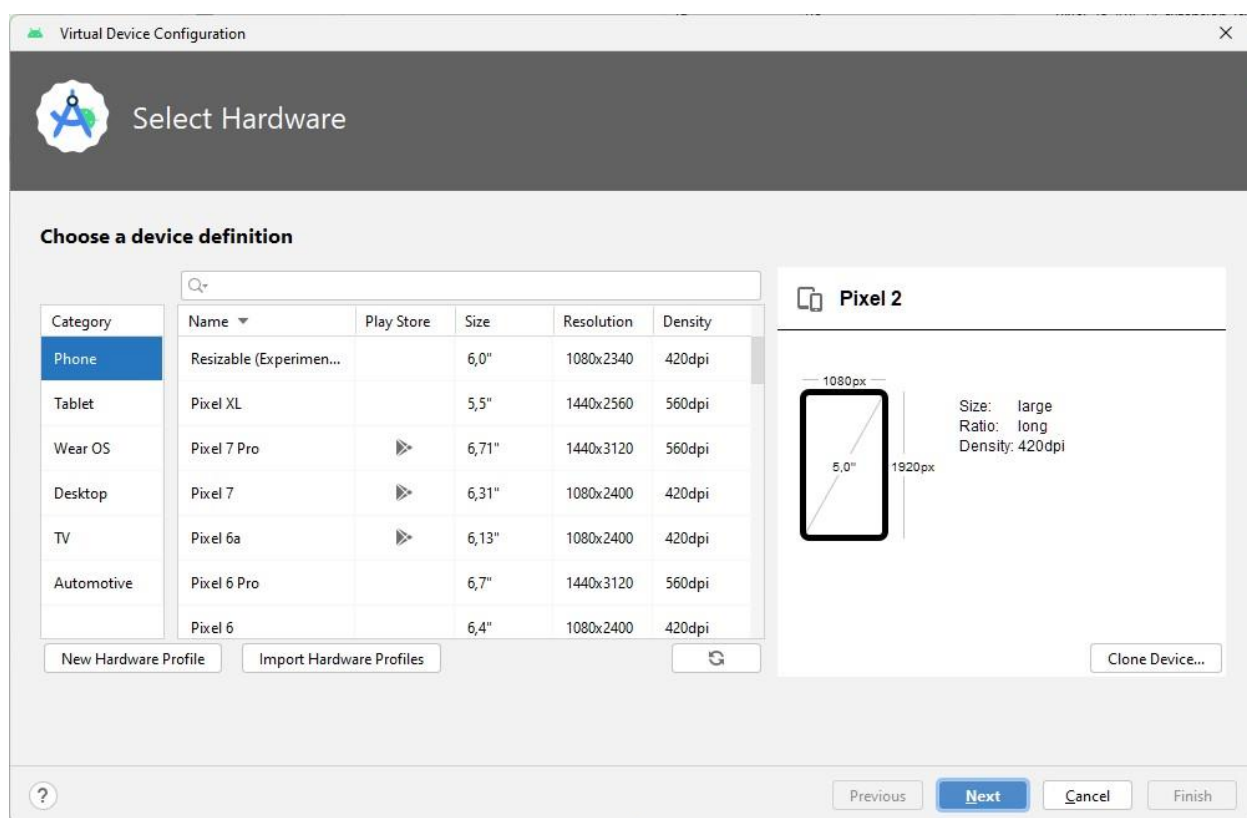


Рисунок 22 – Окно создания эмулятора в Android Studio

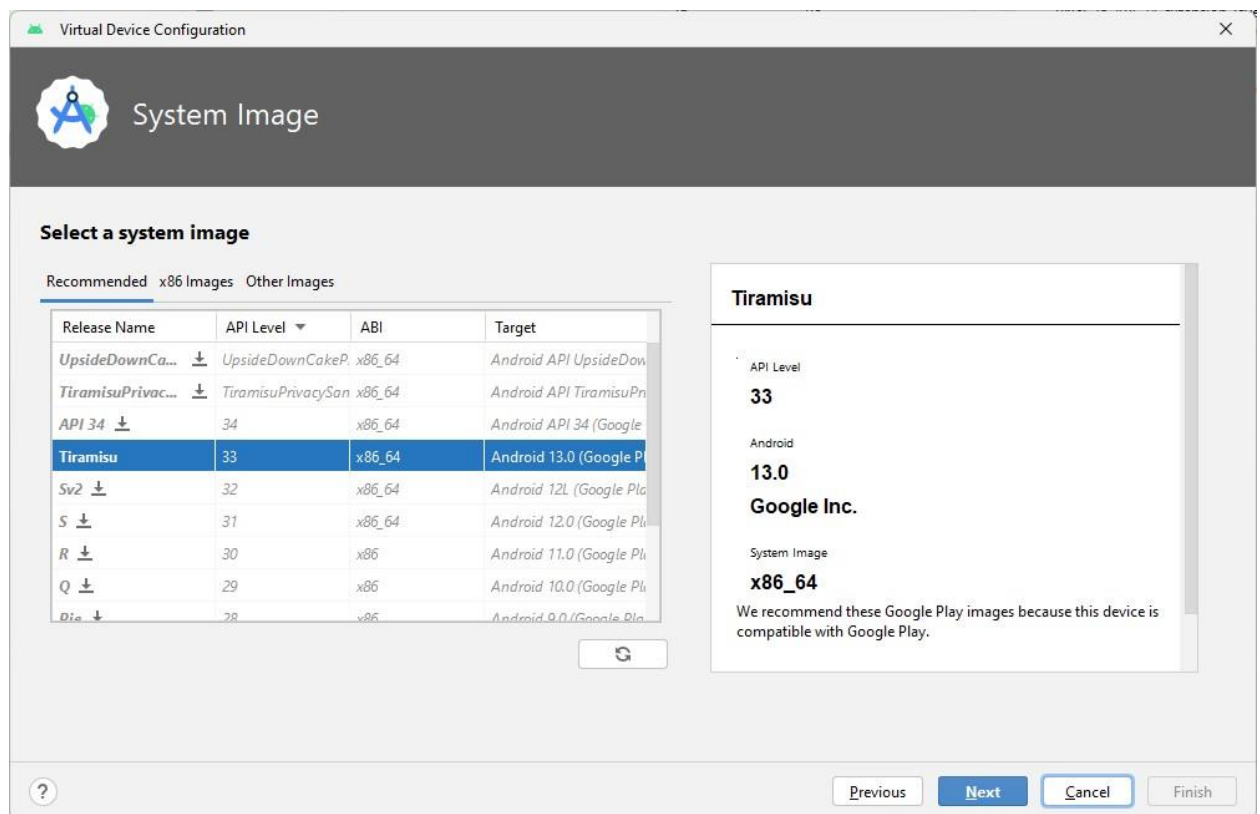


Рисунок 23 – Окно выбора (версии ОС) и скачивания образа эмулятора

Чтобы скачать образ, надо нажать на стрелку в первой колонке (см. рисунок 23). После скачивания образа устройства и нажатия кнопки Finish в окне скачивания выберите из списка скачанный образ, который теперь выделяется жирным шрифтом (см. рисунок 23). Нажмите «Next», в следующем окне нажмите кнопку «Show Advanced Settings» в левом нижнем углу и убедитесь, что стоит галочки «Enable keyboard input» и «Enable device frame» (рисунок 24). Остальное менять нет необходимости, нажмите «Finish» и сверните панель Device Manager кнопкой «—» (Hide) справа вверху панели. Осталось выбрать эмулятор из списка слева от зелёной кнопки «Run ‘app’» вверху на панели инструментов, нажать эту кнопку «Run ‘app’» (или - Shift+F10 на клавиатуре) и ждать загрузки эмулятора. После того, как эмулятор загрузится, разблокируйте экран смартфона (или нажмите кнопку ОК), и сразу же должно запуститься приложение, как показано на рисунке 25. Справа располагается панель управления эмулятором, где можно менять его ориентацию в пространстве, управлять звуком, нажимать аппаратные кнопки, вводить координаты

локации и многое другое. Если возникли проблемы с константой `compileSdk 33`, она находится в файле `build.gradle(Module)`, там её можно поменять на другое значение и синхронизировать проект.

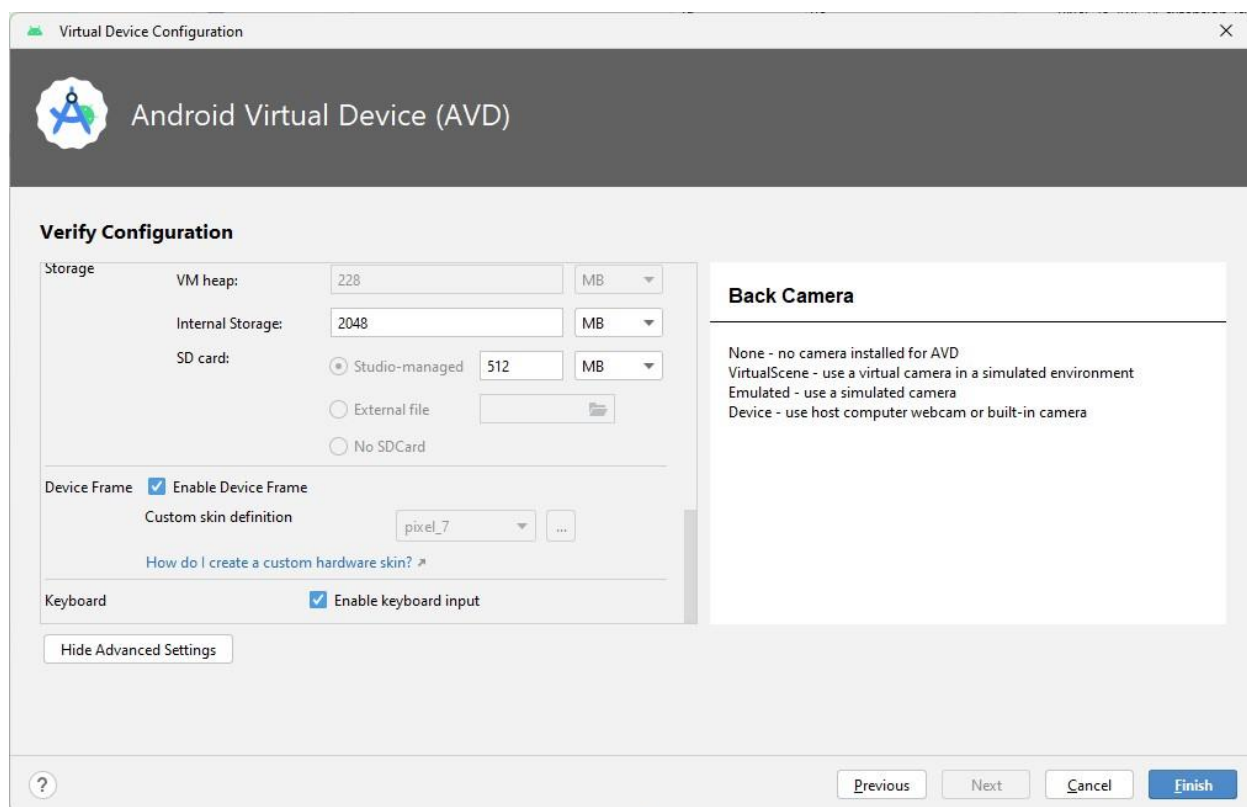


Рисунок 24 – Окно дополнительных свойств эмулятора



Рисунок 25 – Эмулятор Android с запущенным приложением Теперь необходимо проверить установленные компоненты SDK. Для этого перейдите Tools -> SDK Manager и сверьтесь со следующим списком.

Если каких-то компонентов не хватает, то следует их установить.

- SDK Tools
- Android SDK Build-Tools 34 (последней версии)
- Android SDK Platform-tools
- Android Emulator
- Android Emulator hypervisor driver (installer)
- Google Play services
- Intel x86 Emulator Accelerator (HAXM installer)
- Google USB Driver
- Google Play Instant Development SDK (если хотите использовать Android Instant Apps) – SDK Platforms
- Android API 34 (или той версии, которая у вас на реальном устройстве или на эмуляторе)

Лабораторная работа №2. Работа с элементами

Задание: создать приложение, которое выводит в элемент TextView надпись, введенную пользователем в текстовом поле EditText после нажатия на кнопку Button. Помимо этого, в Activity должен быть TextView с ФИО студента и группой. Запустить на эмуляторе и убедиться, что всё работает.

Создайте новый проект (File -> New -> New Project) с Empty Views Activity, удалите из интерфейса стандартный TextView с фразой «Hello World!» и поместите поле EditText. Для этого из панели слева (Palette) перетащите на экран смартфона

объект под названием Plain Text из категории Text. Plain Text - самый простой вариант текстового поля для пользовательского ввода. Затем расположите поле TextView и элемент Button. Пример расположения элементов показан на рисунке 26. Не забудьте про элемент с ФИО и группой.

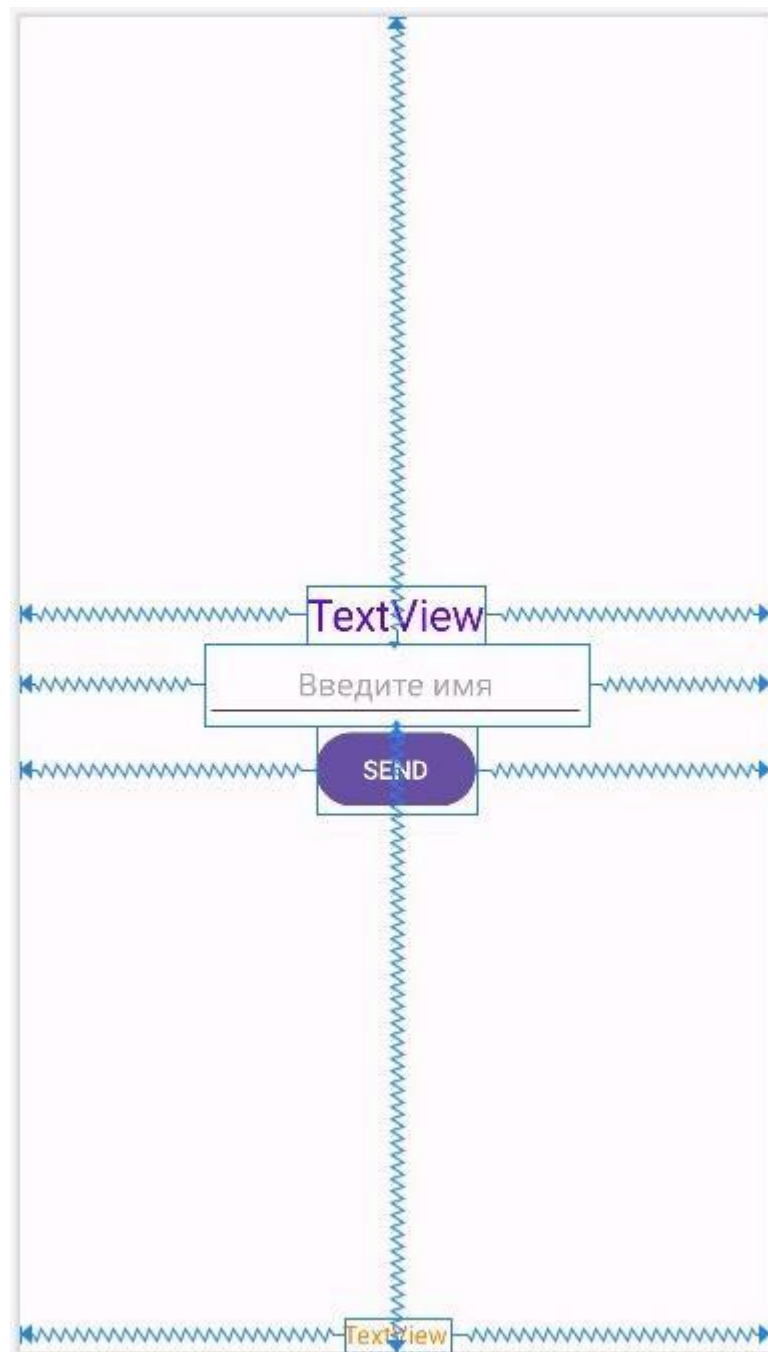


Рисунок 26 – Расположение элементов на экране приложения

Что касается интерфейса, нужно помнить, что, если вы работаете с `ConstraintLayout`, вам нужно в окне дизайна привязать используемые 4 элемента интерфейса к границам экрана и связать их между собой, иначе весь интерфейс будет в беспорядке. Как правило, обычно можно выбрать один интерфейсный элемент, который у нас будет главным по логике приложения. Расположить его в центре экрана, и затем остальные элементы привязать к нему. В данном случае на рисунке 26 видно, что таким главным элементом сделан `EditText`, а остальные элементы расположены по центру по горизонтали и зависят от `EditText`-элемента по вертикали (все, кроме элемента с ФИО). Старайтесь всегда делать интерфейс аккуратно и красиво, так, чтобы при повороте экрана, например, с интерфейсом ничего плохого не произошло бы. В данном случае, для `EditText` установлено свойство `gravity` в значение `center`, для `TextView` изменён цвет и шрифт.

В поле `EditText` мы будем вводить текст, и после нажатия на кнопку этот текст будет отображаться в элементе `TextView`. Дополнительно в поле `EditText` можно указать какой-нибудь фоновый текст, чтобы пользователь понимал, что делать с этим полем. Чтобы добавить фоновый текст в `EditText`, необходимо выделить этот элемент и в панели его свойств справа найти пункт `hint`, туда можно вписать любую фразу. Можно написать текст просто словами, либо же через файл `strings.xml`. В нём достаточно добавить строку:

```
<string name="hint_editText">Введите имя</string>
```

А в поле `hint` нужно сослаться на данную строку следующим образом:

```
@string/hint_editText
```

Можете поступать так, как вам удобнее, но всё же правильнее писать все текстовые переменные в файле `strings.xml`. Затем также переименуйте кнопку

(свойство text в значение SEND), позаботьтесь о поле ФИО внизу экрана, как это было сделано в первой лабораторной работе, и - переходим к написанию кода в файл MainActivity.java.

В объявлении класса MainActivity необходимо убедиться, что класс наследуется от AppCompatActivity. Так нужно будет делать всегда, если в лабораторной работе не указано иное.

Далее в методе onCreate необходимо написать код для взаимодействия элементов. Метод onCreate выполняется всегда при загрузке Activity. Для начала определим в коде нужные нам элементы, с которыми мы будем работать, для этого в методе onCreate напишем следующее:

```
final TextView textView = findViewById(R.id.textView); final
EditText editText = findViewById(R.id.editTextText); Button
button = (Button) findViewById(R.id.button);
textView.setText(""); // чтобы при старте не был виден
```

Так как перенос текста из EditText в TextView должен происходить после нажатия на кнопку, то для кнопки необходимо создать событие onClick. Для этого напишите следующее:

```
button.setOnClickListener(new View.OnClickListener() {
    @Override
    public void onClick(View view) {
        textView.setText("Привет, " + editText.getText().toString() +
            "!");
    }
});
```

На самом деле среда разработки может написать большую часть кода за вас, просто начните писать button.se, а дальше можно нажать Enter, так как у вас в подсказке (выпадающем списке) будет нужная вам конструкция, получится следующее:

```
button.setOnClickListener();
```

Теперь в скобках начните писать «new » и на первой строчке в подсказке будет `View.OnClickListener{...}` (`android.view.View`), нажимайте **Enter** и основная часть конструкции написана автоматически:

```
button.setOnClickListener(new View.OnClickListener() {  
    @Override  
    public void onClick(View view) {  
  
    }  
});
```

Осталось в метод `onClick` написать нужный нам код:

```
textView.setText("Привет, " + editText.getText().toString() +  
"!");
```

Всё довольно легко, и к данным подсказкам легко привыкнуть. В данной строчке кода элементу `textView` присваивается текст «Привет, [текст из `editText`]!». Запустите приложение и проверьте его работу, введя имя и нажав на кнопку. Результат должен быть примерно таким, как изображено на рисунке 27. На рисунке видно, что имя введено кириллицей. Чтобы иметь возможность вводить данные на русском языке, нужно перейти в меню эмулятора (смартфона) `Settings -> System -> Languages & input -> Languages -> Add a language`, рисунок 28, слева, и затем выбрать `Русский, Россия` из списка. В результате получите установленный русский язык на эмулятор, как показано на рисунке 28, справа. И теперь в приложении на экранной клавиатуре можно переключить язык, если нажать на изображение глобуса (которого раньше не было) слева от пробела.

У приложения есть некоторый недостаток: если ничего не ввести в текстовое поле, оно все равно напишет «Привет, !». Этого можно избежать, если добавить в метод `onClick` условие проверки содержимого поля `EditText`:

```
if (!editText.getText().toString().isEmpty()) {  
    textView.setText("Привет, " + editText.getText().toString()  
+ " !");  
}
```

Казалось бы, этого достаточно, но – нет! В случае, если мы сначала ввели какое-то имя, а потом очистили текстовое поле, нам всё равно будет отображаться предыдущий привет. Поэтому `else` тут не обойтись:

```
if (!editText.getText().toString().isEmpty()) {  
    textView.setText("Привет, " + editText.getText().toString()  
+ " !"); } else  
{  
    textView.setText("");  
}
```

Теперь все должно работать корректно.

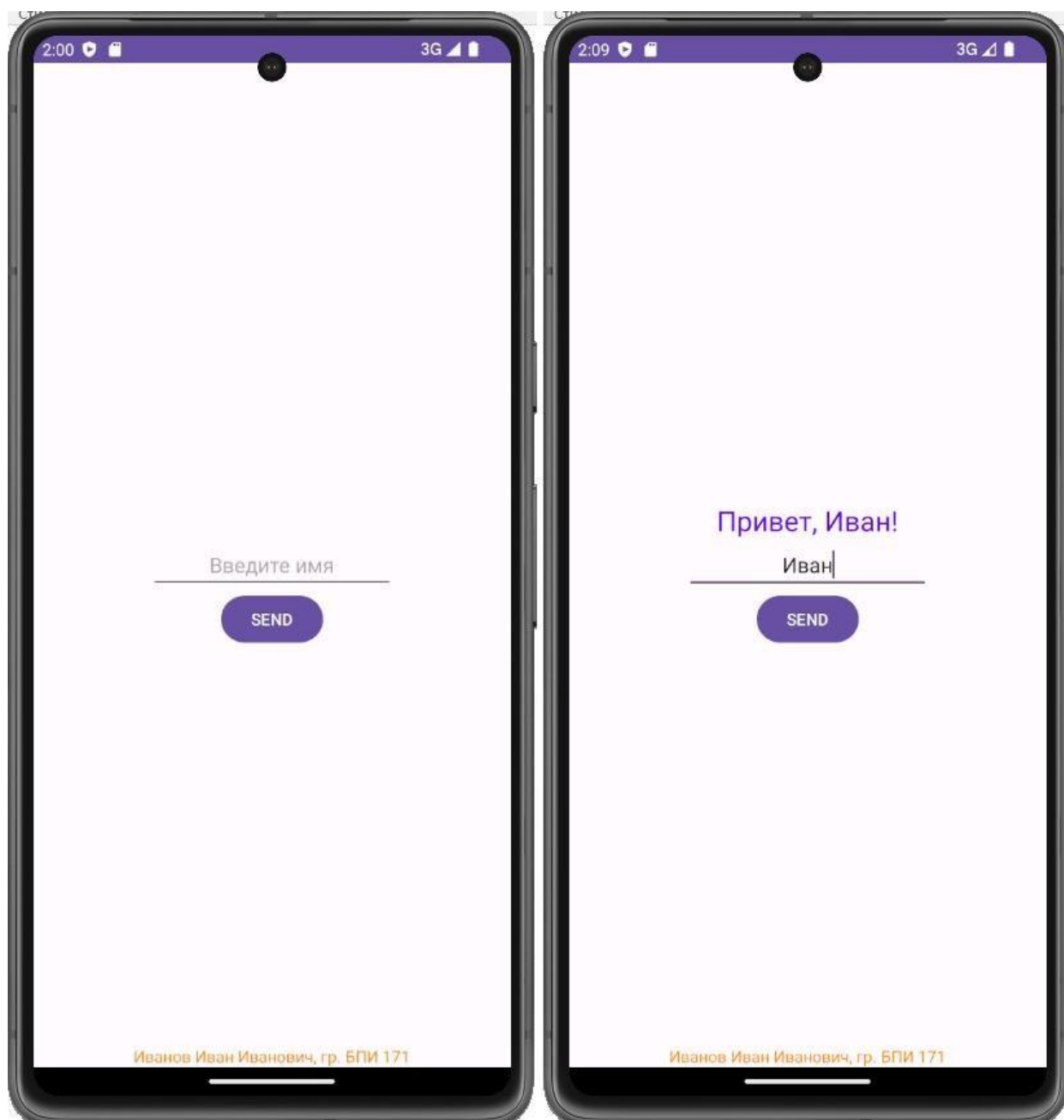


Рисунок 27 – Вид приложения до ввода текста и после нажатия кнопки

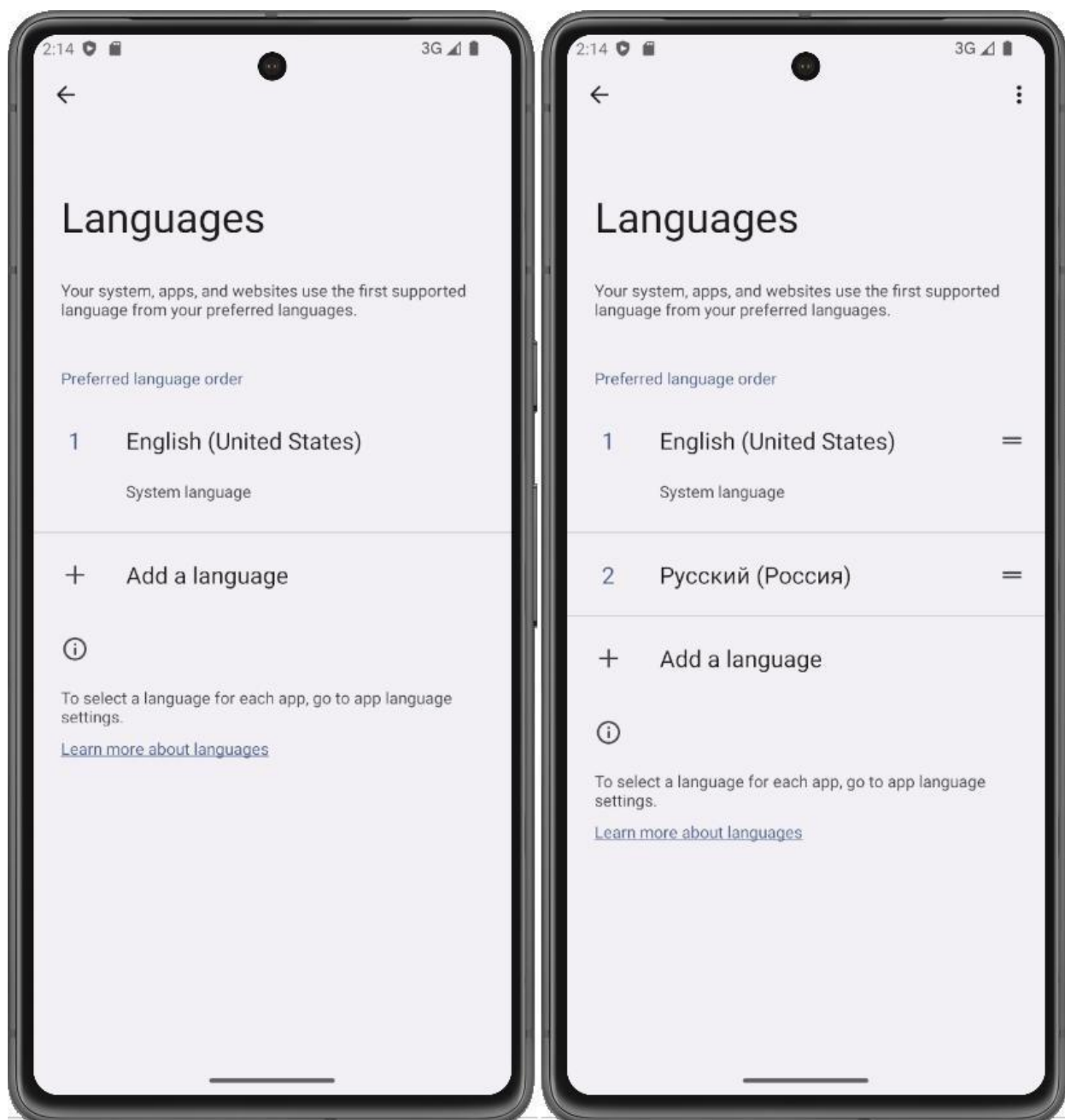


Рисунок 28 – Добавление нового языка на эмулятор или смартфон

Лабораторная работа №3. Работа с экранами

Задание: создать приложение, которое состоит из нескольких activities. Первая activity содержит элемент TextView с названием или номером activity, текстовое поле EditText для ввода какой-то информации, кнопку Button с названием "Next" или "Перейти на 2 activity/экран/окно" или просто "2". Помимо этого, в 1 activity должен быть TextView с ФИО студента и группой. После нажатия на эту кнопку происходит переход на вторую activity, где содержится TextView с названием или номером

activity, TextView с надписью что-то вроде "В первом окне вы напечатали:" и под ним - ещё один TextView с содержимым EditText с первой activity, и, разумеется, кнопка "1" или "Вернуться на 1 экран" или "Вернуться к вводу текста", нажав на которую пользователь может перейти обратно к 1 activity. Запустить на эмуляторе и убедиться, что всё работает.

Создайте новый проект с Empty Activity и удалите стандартный TextView с фразой «Hello World!». Теперь в первой activity (файл main_activity.xml) расставьте элементы TextView с текстом «Activity 1», EditText с фоновым текстом (hint) «Введите имя» и кнопку Button с текстом «NEXT». Не забудьте свои ФИО и группу. Пример расстановки элементов показан на рисунке 29.

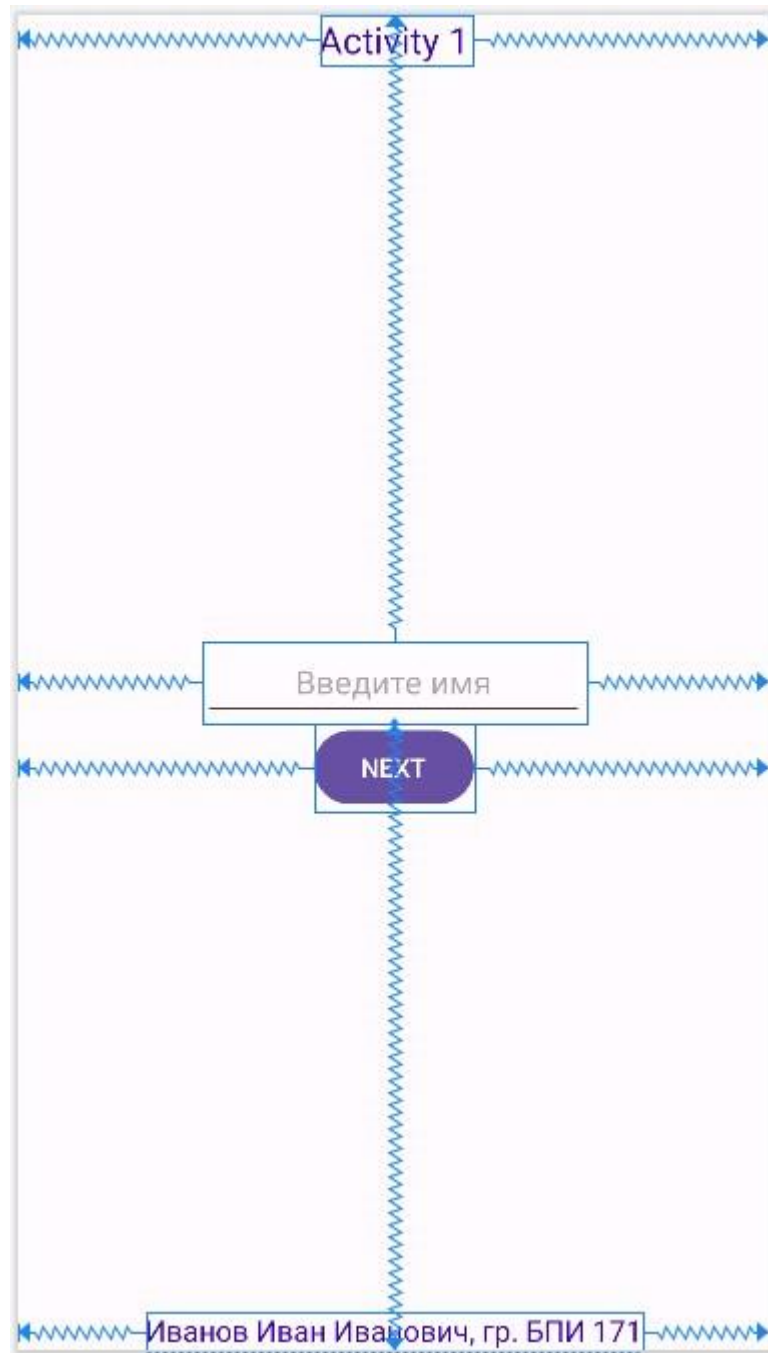


Рисунок 29 – Пример расстановки элементов в файле activity_main.xml

Добавим вторую activity, для этого слева наверху нажмите по папке app правой кнопкой мыши и выберите пункт New -> Activity -> Empty Activity, как показано на рисунке 19.

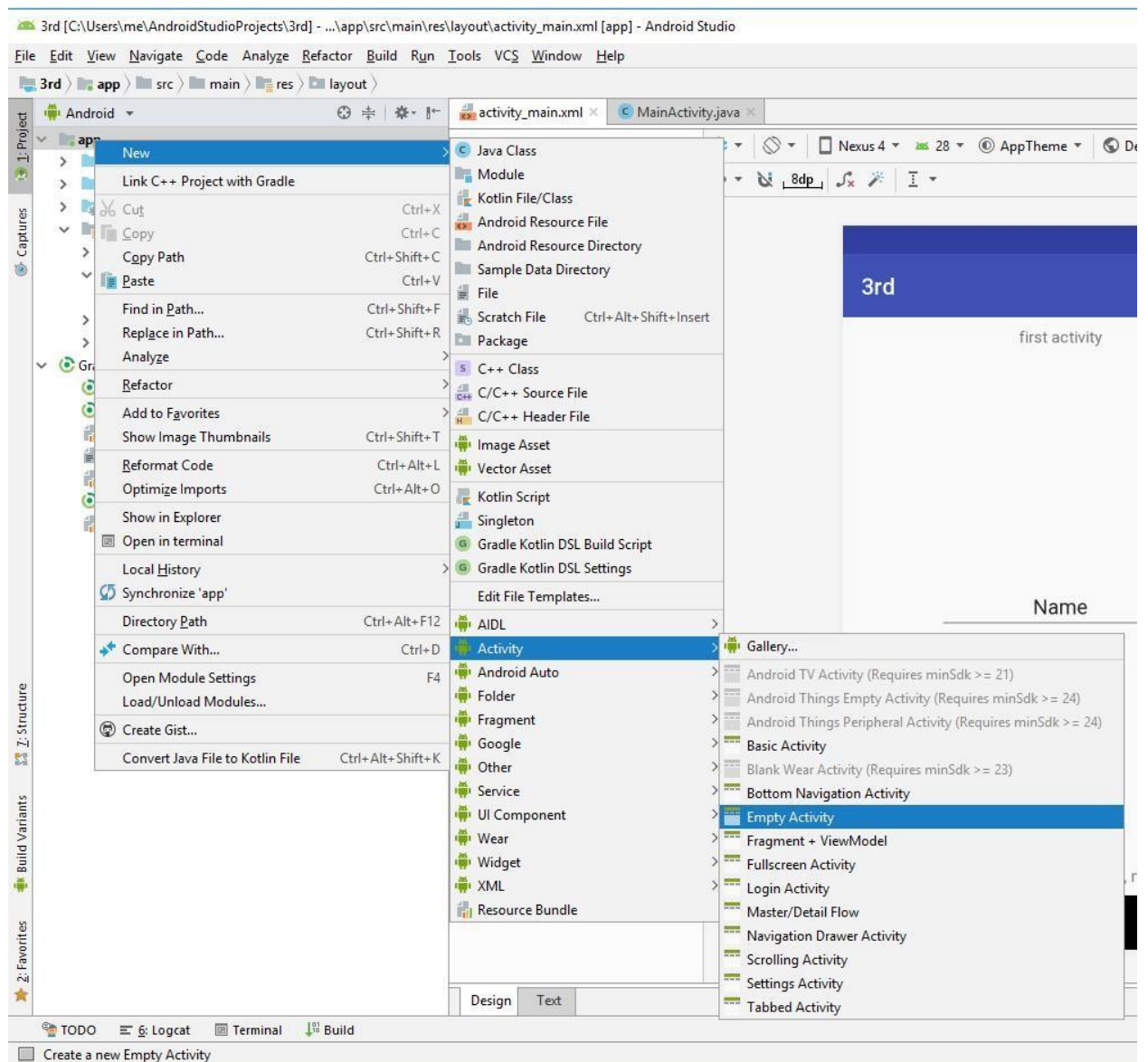


Рисунок 19 – Добавление нового Activity

После этого появится стандартное окно создания activity, можете оставить все названия по умолчанию и нажать Finish, либо поменять название в поле Activity Name на «SecondActivity», остальные поля подстроятся под это название автоматически. Таким образом, создались два новых файла: SecondActivity.java и activity_second.xml.

Перейдите в файл activity_second.xml и расставьте там следующие элементы: TextView с текстом «Activity 2», TextView с текстом «Вы ввели:», TextView без текста и кнопку Button для перехода обратно в первое activity.

Пример расстановки элементов показан на рисунке 20.

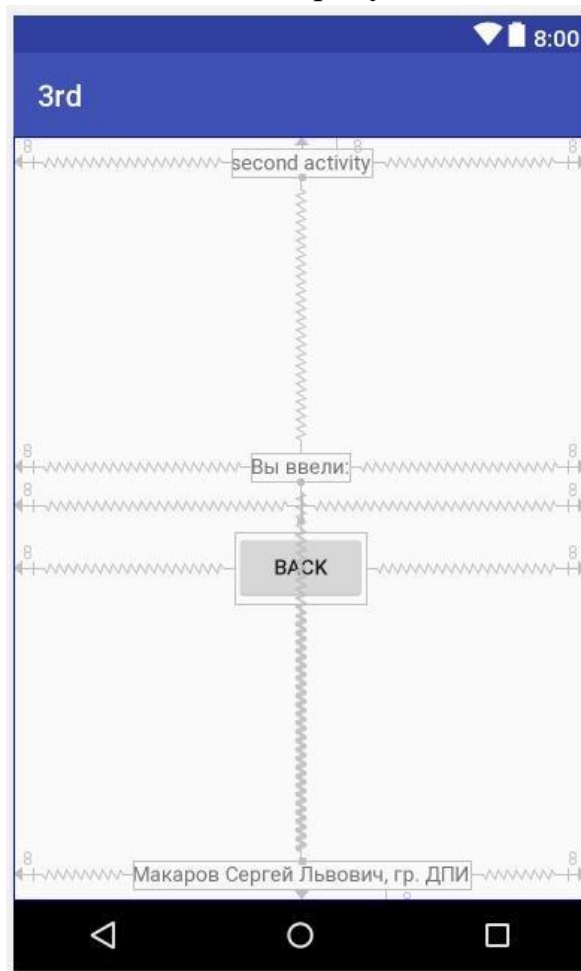


Рисунок 20 – Пример расстановки элементов в файле activity_second.xml

После расстановки элементов в двух activity необходимо написать код для взаимодействия элементов с activity. Перейдите в файл MainActivity.java и создайте переменную:

```
public static String text2remember;
```

В ней будет храниться текст из поля EditText в первом activity и использоваться из неё в TextView во втором activity. Далее в методе onCreate определите нужные элементы (не забудьте про зависимости, импортировать их можно по подсказке в Android Studio после написания этого кода):

```
final EditText editText = findViewById(R.id.editText); Button  
button = findViewById(R.id.button);
```

Заметьте, что если раньше каст (cast, или (EditText), (Button) и т.д.) перед методом findViewById нужно было указывать обязательно, как мы сделали в лабораторной работе №2, в новой версии Android Studio это необязательно. Теперь присвойте текст полю editText текст из переменной text2remember:

```
editText.setText(text2remember);
```

Делается это для того, чтобы при возвращении из второго activity в первое в поле TextView было написано то, что было написано до перехода во второе activity. Теперь создайте для кнопки listener и метод onClick (по подсказкам, показано во второй лабораторной работе) и внутри метода onClick напишите следующее:

```
text2remember = editText.getText().toString();  
Intent intent = new Intent(MainActivity.this,  
SecondActivity.class); startActivity(intent);
```

Здесь переменной text2remember присваивается текст из поля EditText и определяется понятие Intent для запуска второго activity.

Теперь перейдите в файл SecondActivity.java и в методе onCreate определите элементы и присвойте полю TextView текст из переменной text2remember:

```
TextView textView = findViewById(R.id.textView6);  
textView.setText(MainActivity.text2remember);  
Button button = findViewById(R.id.button2);
```

Осталось только создать для кнопки listener и метод onClick для возвращения на первое activity. Создайте их и внутри метода onClick напишите:


```
Intent intent = new Intent(SecondActivity.this, MainActivity.class);
startActivity(intent);
```

Не забывайте про импорт зависимостей, среда разработки вам об этом напомним и поможет это сделать.

Заметьте, при создании второго activity в файл манифеста AndroidManifest.xml автоматически добавилась строка

```
<activity android:name=".SecondActivity"></activity>
```

Каждое activity приложения должно быть упомянуто в файле AndroidManifest.xml.

Теперь запустите приложение и протестируйте, всё должно работать.

Пример работы приложения показан на рисунках 21 и 22.



Рисунок 21 – Вид первого activity

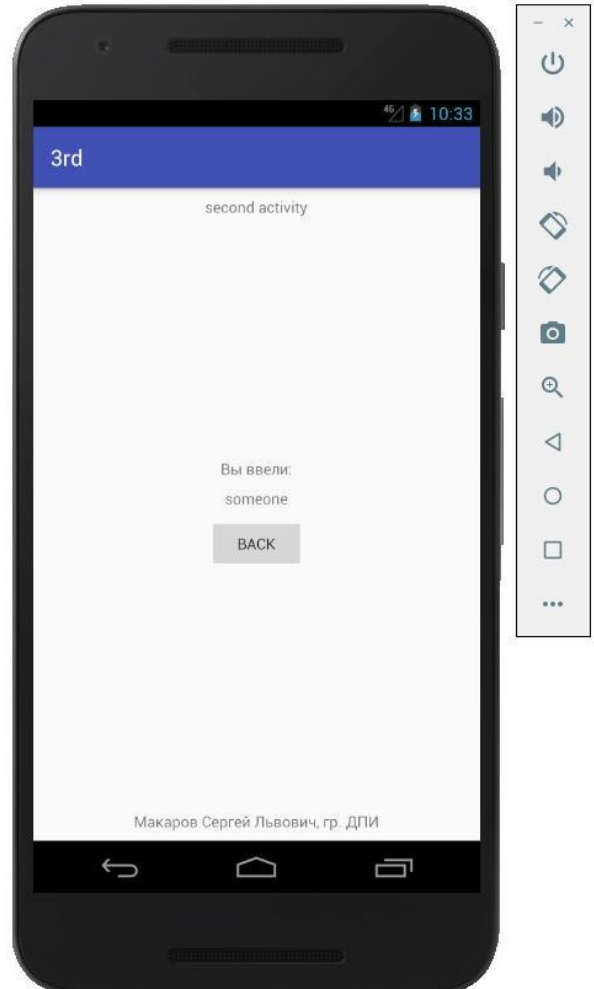


Рисунок 22 – Вид второго activity

Лабораторная работа №4. Стили и темы

Задание: написать приложение, работающее с разными темами/стилями. Сначала создать свой стиль и применить его к какому-нибудь интерфейсному элементу, затем - свою тему, которая применяется ко всем интерфейсным элементам. Приложение при этом должно выглядеть нестандартно. Запустить на эмуляторе и убедиться, что всё работает.

Создайте новый проект с Empty Activity, перейдите в `activity_main.java`, удалите стандартное текстовое поле с фразой «Hello world!» и поместите друг под

друга 4 TextView, а затем поменяйте у них размер шрифта (свойство textSize) на 10, 14, 28 и 36 sp соответственно (не забудьте про ФИО и группу). Как мы видим, все они отличаются друг от друга. Бывают ситуации, когда всем элементам необходимо иметь один стиль (один размер шрифта, один цвет текста и т.д.). В данном случае можно менять параметры вручную, а что делать, если у вас 100 таких элементов? В таком случае можно создать стиль и применить его ко всем нужным элементам. Переходим в файл values/styles.xml и ниже существующего стиля под названием AppTheme создаём следующий стиль:

```
<style name="style1" parent="@android:style/TextAppearance">      <item
name="android:textColor">#000000</item>      <item
name="android:textSize">30sp</item>      <item
name="android:typeface">monospace</item>
</style>
```

TextAppearance – это стиль для текста в Android по умолчанию. Далее мы устанавливаем цвет текста чёрным, делаем текст 30 размера и тип указываем monospace. Теперь нужно применить этот стиль к созданным четырём элементам. Выделите все четыре TextView и в панели Attributes (справа) найдите свойство style, где пропишите стиль:

@style/style1

Также стиль можно выбрать из списка, нажав на 3 точки справа от текстового поля (в появившемся окне он будет последним в списке). Примените стиль. Вы увидите, что текстовые поля, кроме одного (у которого и так было 14sp по умолчанию, поэтому вы не стали ничего вводить в поле textSize), не поменялись. Это происходит потому, что поле textSize непустое и поэтому имеет приоритет над стилем. Если очистить все значения textSize у всех полей, то и все выделенные текстовые поля приведутся к единому виду.

Создадим подстиль, который будет соответствовать предыдущему стилю во всём, кроме размера шрифта. В файле styles.xml ниже стиля style1 напишите:

```
<style name="style1.bigfont" > <item  
name="android:textSize">50sp</item>  
</style>
```

Применяем данный подстиль к любому текстовому полю и видим, что размер шрифта увеличился.

Со стилями разобрались, теперь переходим к созданию собственной темы для приложения. В файле styles.xml уже создана базовая тема под названием AppTheme:

```
<style name="AppTheme" parent="Theme.AppCompat.Light.DarkActionBar">  
    <!-- Customize your theme here. -->  
    <item name="colorPrimary">@color/colorPrimary</item>  
    <item name="colorPrimaryDark">@color/colorPrimaryDark</item>  
    <item name="colorAccent">@color/colorAccent</item>  
</style>
```

Мы можем кастомизировать данную тему. Изменим родительскую тему приложения на следующую:

```
<style name="AppTheme" parent="Base.Theme.AppCompat.Light.Dialog.Alert">  
    <!-- Customize your theme here. -->  
    <item name="colorPrimary">@color/colorPrimary</item>  
    <item name="colorPrimaryDark">@color/colorPrimaryDark</item>  
    <item name="colorAccent">@color/colorAccent</item>  
</style>
```

Теперь приложение будет иметь вид диалогового окна. Добавим какие-нибудь параметры, чтобы тема отличалась от стандартной:

```
<item name="android:background">#ff0e6647</item> <item  
name="android:textColor">#ffffff</item> <item  
name="android:textSize">32sp</item> <item  
name="android:textAllCaps">true</item> <item  
name="android:typeface">monospace</item>
```

Свойства довольно понятны из названий, поэтому расписывать их не имеет смысла. Удалите из текстовых полей предыдущие стили и увидите, что текстовые поля сразу подстроились под параметры из темы. Дело в том, что тема AppTheme уже прописана как базовая в приложении, поэтому любые изменения сразу же отображаются на всех элементах. В поле с ФИО можно поставить свойство gravity в значение center_horizontal.

Ну и в заключение переходим в файл MainActivity.java и в объявлении класса оставим следующее:

```
public class MainActivity extends Activity {
```

Делается это для того, чтобы в приложении не выводилась так называемая «шапка» с названием приложения.

Запустите проект на эмуляторе, он должен иметь вид, как показано на рисунке 23.

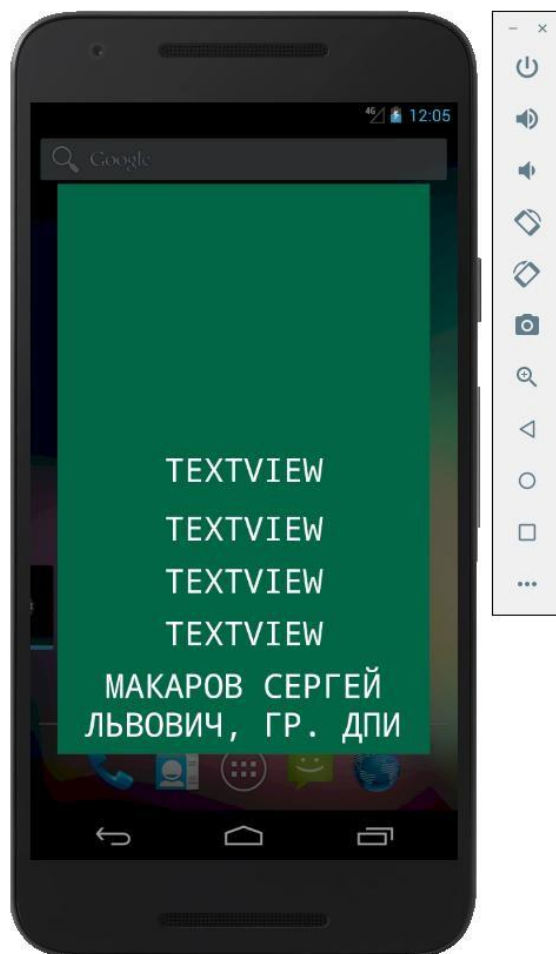


Рисунок 23 – Результат выполнения лабораторной работы №4

Приложение запустилось без «шапки» и в виде уведомления. Теперь придумайте собственную тему, чтобы всем не сдавать одно и то же приложение.

Лабораторная работа №5. Работа со списками

Задание: создать пользовательский список. Например, создать свой список в виде твиттера (картинка и текст), элементы которого просто статически задать в массиве (как и картинки).

Список можно создать, как минимум, двумя способами: с помощью устаревшего элемента `ListView`, или с помощью более сложного, но более надёжного и избавленного от недостатков элемента `RecyclerView`, появившегося с выходом

Android Lollipop. Также можно использовать элемент `GridView`, но это уже на любителя. Рассмотрим сначала `ListView`, потом `RecyclerView`.

Создайте новый проект с `Empty Activity`, перейдите в файл `activity_main.java` и удалите стандартное текстовое поле с фразой «Hello World!». Для начала необходимо создать `xml`-файл, который будет содержать список. Нажмите правой кнопкой мыши по папке `values` и создайте файл так, как показано на рисунке 24.

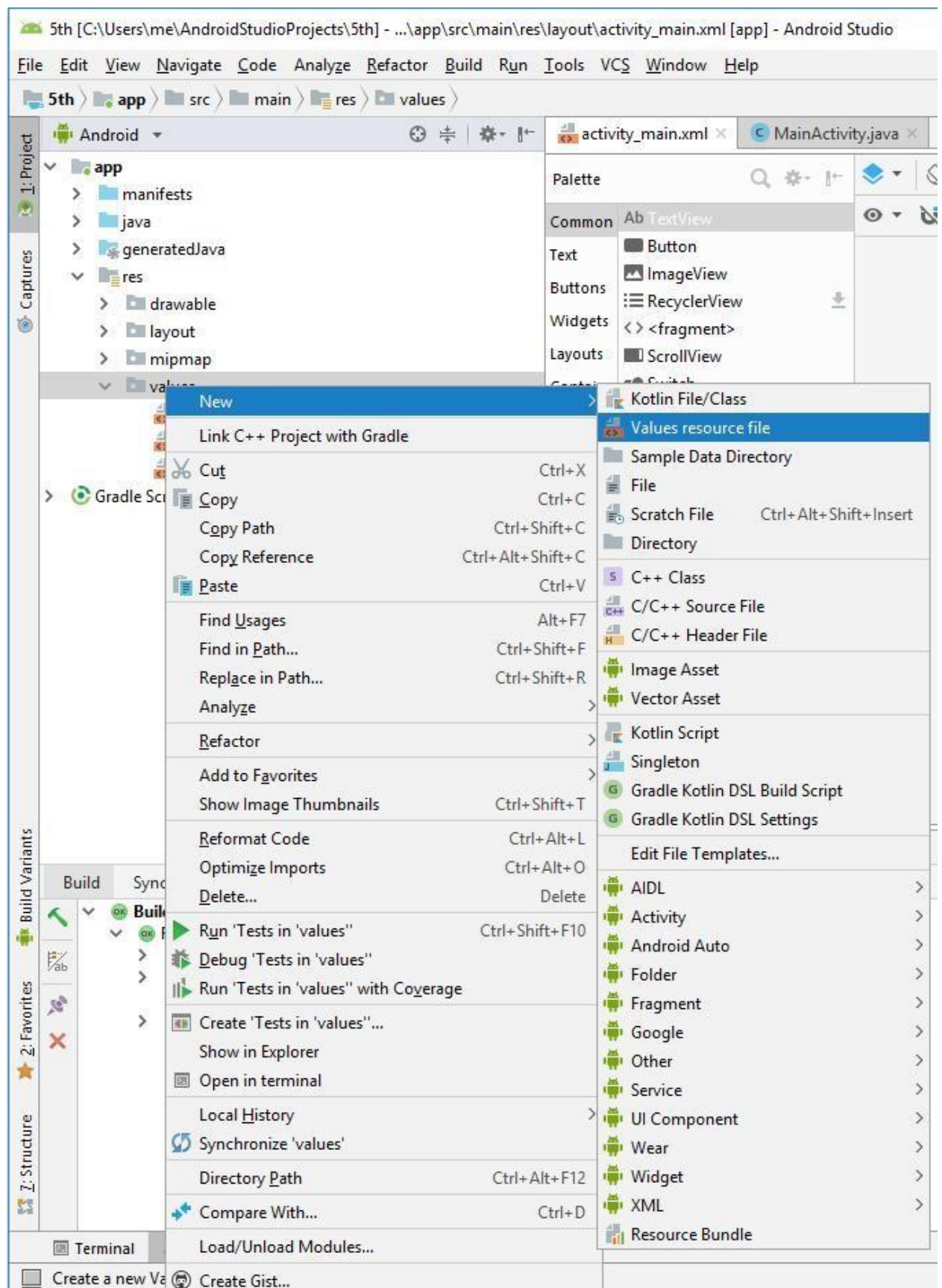


Рисунок 24 – Создание нового файла ресурсов

В появившемся окне оставьте все параметры по умолчанию и введите название файла, например, «images», после чего нажмите ОК. После сделанных действий в папке values появился файл images.xml, в котором нужно будет создать список. Переходим в этот файл и внутри тэга resources пишем:

```
<string-array name="images">
    <item>Image 1</item>
    <item>Image 2</item>
    <item>Image 3</item>
    <item>Image 4</item>
</string-array>
```

В item можно использовать любые слова и фразы на любом языке.

Теперь перейдите в файл MainActivity.java и исправьте объявление класса:

```
public class MainActivity extends ListActivity {
```

Не забудьте импортировать нужные классы, среда разработки подскажет об этом. Затем добавьте в метод onCreate следующий код:

```
setListAdapter(new ArrayAdapter<String>(this,
    android.R.layout.simple_list_item_1,
    getResources().getStringArray(R.array.images)));
```

Теперь перейдите в файл activity_main.xml и из раздела Legacy панели Palette перенесите объект ListView на экран. Обратите внимание, что ListView необходимо присвоить id «@android:id/list». Сделать это можно в текстовом представлении, добавив в тэг ListView следующую строчку:

```
android:id="@android:id/list"
```

Запустите приложение и увидите список, который был написан в файле `images.xml`. Однако, чтобы список был с картинками, нужно воспользоваться Custom Lists. Для этого в папке `layout` необходимо добавить ещё один файл. Нажмите правой кнопкой мыши по папке `layout` и создайте новый Layout resource file. В появившемся окне оставьте все параметры по умолчанию и введите название файла «`list_item`». Переходим в этот файл и помещаем элементы `ImageView` и `TextView` на своё усмотрение. Пример расположения элементов в данном файле показан на рисунке 25. Так будет выглядеть один элемент нашего списка.

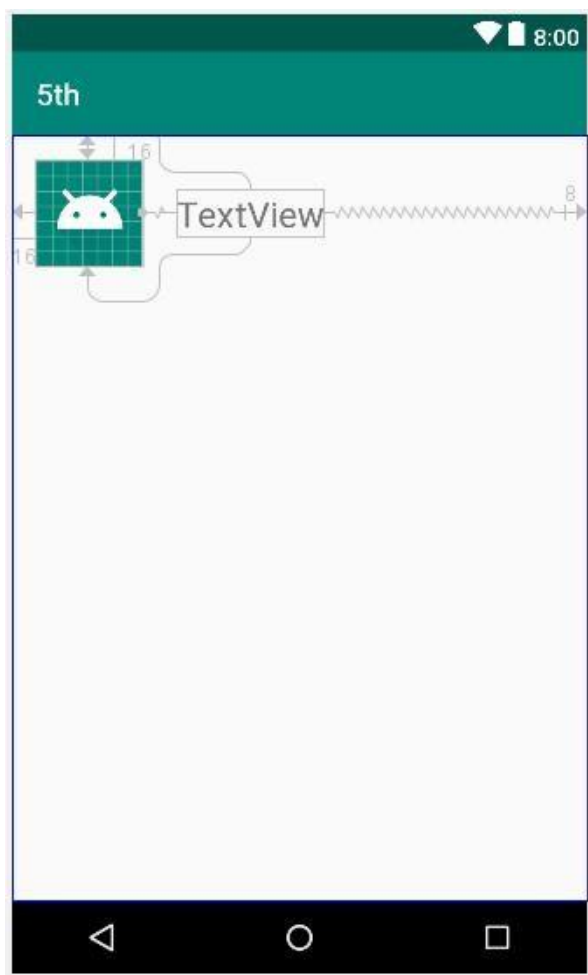


Рисунок 25 – Пример расположения элементов в файле `list_item.xml`

Теперь вернитесь в файл `MainActivity.java` и измените код в методе `onCreate` на следующий:

```
setListAdapter(new MyAdapter(this,  
android.R.layout.simple_list_item_1, R.id.textView,  
getResources().getStringArray(R.array.images)));
```

Далее создайте класс MyAdapter внутри класса MainActivity:

```
public class MyAdapter extends ArrayAdapter<String> {    public  
MyAdapter(Context context, int resource, int textViewResourceId,  
String[] string){  
    super(context, resource, textViewResourceId, string);  
}  
  
@Override  
    public View getView(int position, View convertView,  
ViewGroup parent){  
        LayoutInflater inflater = (LayoutInflater)  
getSystemService(Context.LAYOUT_INFLATER_SERVICE);  
        View row = inflater.inflate(R.layout.list_item, parent,  
false);  
        String[] items =  
getResources().getStringArray(R.array.images);  
        ImageView image = (ImageView)  
row.findViewById(R.id.imageView);        TextView  
text = (TextView) row.findViewById(R.id.textView);  
text.setText(items[position]);        return row;  
    }  
}
```

Но это ещё не всё. Необходимо создать конструкцию switch-case, чтобы в каждой строке была соответствующая ей картинка. Перед return row вставьте следующий код:

```
switch (items[position]) {    case  
"Image 1":  
    image.setImageResource(R.drawable.image1);  
break;    case "Image 2":  
    image.setImageResource(R.drawable.image2);  
break;    case "Image 3":  
    image.setImageResource(R.drawable.image3);  
break;    case "Image 4":
```

```
image.setImageResource(R.drawable.image4);  
break;  
}
```

Теперь осталось поместить любые изображения в папку drawable. Изображения либо должны называться image1.jpeg, image2.jpeg и т.д., либо в конструкции switch-case необходимо поменять путь до картинок в строке R.drawable.image1 и т.д. Не забудьте про текстовое поле с ФИО. Запустите приложение и увидите собственный список с картинкой и текстом. Пример показан на рисунке 26.

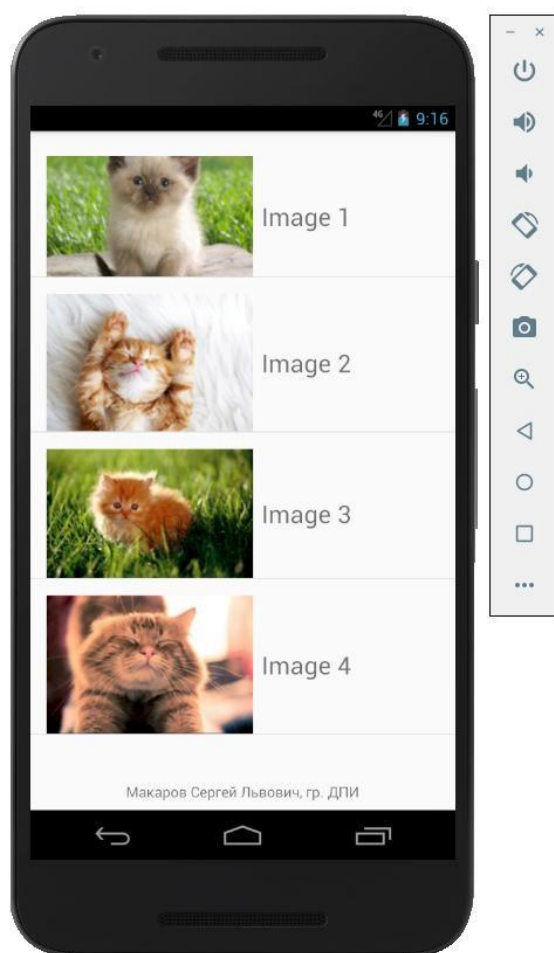


Рисунок 26 – Пример выполнения лабораторной работы №5

Теперь рассмотрим более мощный и современный элемент RecyclerView¹. Этот элемент создаёт ровно столько элементов списка, сколько видно на экране пользователю, поэтому он значительно экономит память, если список большой – а в приложениях списки, как правило, длинные. Когда пользователь прокручивает список вниз, верхний элемент уходит за пределы экрана и становится невидимым, при этом его содержимое очищается, а сам этот более ненужный на экране элемент помещается вниз экрана и заполняется новыми данными следующих элементов списка, т.е. переиспользуется (is being **recycled**). Общая модель работы RecyclerView изображена ниже.

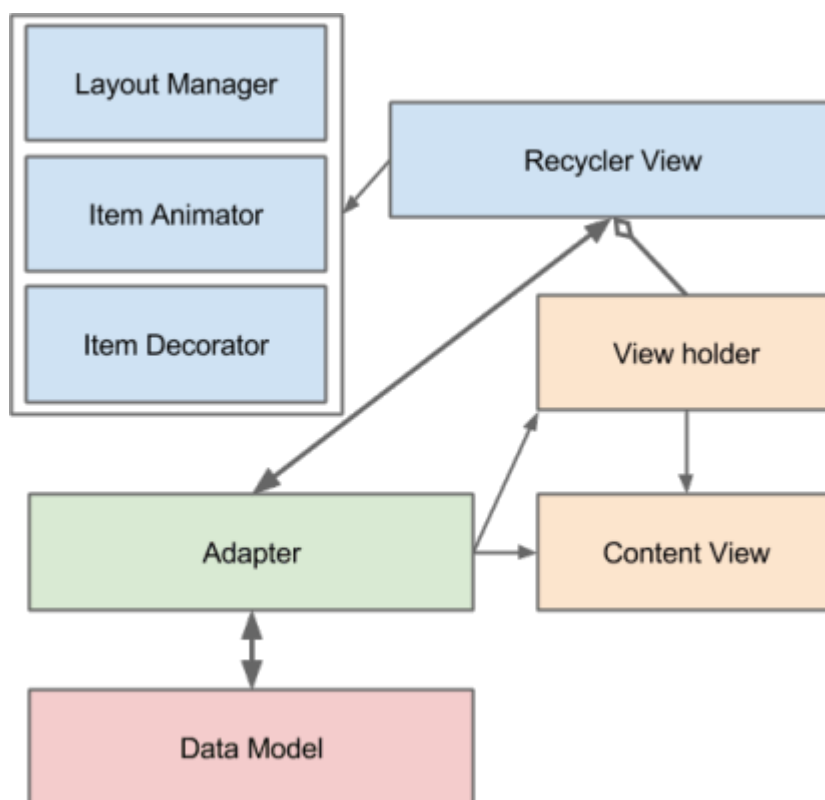


Рисунок 26.2 – Модель работы RecyclerView²

¹ <https://metanit.com/java/android/5.11.php>

² <http://developer.alexanderklimov.ru/android/views/recyclerview-kot.php>

Создадим новый проект с EmptyActivity. Первое, что нужно сделать – это добавить следующую зависимость в gradle-файл уровня модуля:

```
implementation 'androidx.recyclerview:recyclerview:1.2.1'
```

Далее нужно построить макет для отдельного элемента списка, но он у нас уже есть в проекте с ListView и лежит в файле list_item.xml:

```
<?xml version="1.0" encoding="utf-8"?>
<androidx.constraintlayout.widget.ConstraintLayout
    xmlns:android="http://schemas.android.com/apk/res/android"
    xmlns:app="http://schemas.android.com/apk/res-auto"
    xmlns:tools="http://schemas.android.com/tools"
    android:layout_width="match_parent" android:layout_height="match_parent"
    tools:context=".MainActivity">

    <ImageView
        android:id="@+id/imageView"        android:layout_width="wrap_content"
        android:layout_height="wrap_content"
        android:layout_marginStart="16dp"    android:layout_marginLeft="16dp"
        android:layout_marginTop="16dp"
        app:layout_constraintStart_toStartOf="parent"
        app:layout_constraintTop_toTopOf="parent"
        app:srcCompat="@mipmap/ic_launcher" />

    <TextView
        android:id="@+id/textView"
        android:layout_width="wrap_content"
        android:layout_height="wrap_content"
        android:layout_marginStart="8dp"
        android:layout_marginLeft="8dp"
        android:layout_marginEnd="8dp"
        android:layout_marginRight="8dp"
        android:text="TextView"        android:textSize="24sp"
        app:layout_constraintBottom_toBottomOf="@+id/imageView"
        app:layout_constraintEnd_toEndOf="parent"
        app:layout_constraintHorizontal_bias="0.077"
        app:layout_constraintStart_toEndOf="@+id/imageView"
        app:layout_constraintTop_toTopOf="@+id/imageView" />

</androidx.constraintlayout.widget.ConstraintLayout>
```

Также нам понадобится файл images.xml в папке res/values, содержащий названия картинок, и сами эти картинки в папке drawable. Теперь удалим TextView "Hello world" и добавим компонент RecyclerView в activity_main.xml. Чтобы видеть дизайн элемента списка, который мы создали в list_item.xml, добавим значение

@layout/list_item в свойство RecyclerView под названием listitem. Кроме того, нужно добавить следующее свойство в код описания RecyclerView:

```
app:layoutManager="androidx.recyclerview.widget.LinearLayoutManager"
```

Это нужно для того, чтобы RecyclerView знал, как отображать список.

Оптимизируем наш предыдущий проект: создадим 2 дополнительных класса, обслуживающих RecyclerView. Первый класс назовём Image, он будет содержать основные методы для задания необходимых данных элемента списка:

```
public class Image {
    private String name; // название
    private int imageRes; // картинка

    public Image(String name, int image){
        this.name=name;
        this.imageRes=image;
    }

    public String getName()
    {
        return this.name;
    }

    public void setName(String name) {
        this.name = name;
    }

    public int getImageResource() {
        return this.imageRes;
    }

    public void setImageResource(int flagResource)
    {
        this.imageRes = flagResource;
    }
}
```

Второй класс назовём CustomRecyclerViewAdapter, он нужен для того, чтобы определить свой кастомный адаптер для RecyclerView, и чтобы в итоге связывать нужные данные и отображать список.

```
public class CustomRecyclerViewAdapter extends
RecyclerView.Adapter<CustomRecyclerViewAdapter.ViewHolder>{
    private final LayoutInflater inflater;
    private final List<Image> images;

    CustomRecyclerViewAdapter(Context context, List<Image> images) {
        this.images = images;
    }
}
```

```

        this.inflater = LayoutInflater.from(context);
    }
    public void onBindViewHolder(CustomRecyclerView.ViewHolder holder, int
position) {
        Image image = images.get(position);
        holder.text.setText(image.getName());
        holder.image.setImageResource(image.getImageResource());

    }

    @NonNull @Override
    public CustomRecyclerView.ViewHolder onCreateViewHolder(@NonNull
ViewGroup parent, int viewType) {
        View view = inflater.inflate(R.layout.list_item, parent, false);
        return new ViewHolder(view);
    }

    @Override
    public int getItemCount() {
        return images.size();
    }
    public class ViewHolder extends RecyclerView.ViewHolder {
        final ImageView image;        final TextView text;
        ViewHolder(View view){        super(view);
            image = view.findViewById(R.id.imageView);
            text = view.findViewById(R.id.textView);        }
    }
}

```

И теперь, когда у нас есть всё необходимое, в MainActivity.java достаточно добавить код, наполняющий с помощью кастомного адаптера список RecyclerView. Данные добавляются в методе setData():

```

public class MainActivity extends AppCompatActivity {

    ArrayList<Image> images = new ArrayList<Image>();
    @Override
    protected void onCreate(Bundle savedInstanceState) {
        super.onCreate(savedInstanceState);
        setContentView(R.layout.activity_main);        setData();
        RecyclerView recyclerView = findViewById(R.id.review1);
        CustomRecyclerView adapter = new CustomRecyclerView(this, images);
        recyclerView.setAdapter(adapter);
    }
    private void setData(){
        images.add(new Image ("cat1", R.drawable.image1));
        images.add(new Image ("cat2", R.drawable.image2));
        images.add(new Image ("mycat", R.drawable.image3));
        images.add(new Image ("nyancat", R.drawable.image4));

    }
}

```


Таким образом, получим тот же список из котов, но теперь он пролистывается вниз, каждый кот расположен на отдельной странице, и список можно значительно расширить.

Лабораторная работа №6. Работа с анимацией

Задание: создать приложение, содержащее анимированные интерфейсные элементы (например, увеличивающиеся при клике на них кнопки, вращающиеся TextView и т.д.).

Самым простым видом анимации является покадровая анимация, когда картинки (кадры) сменяют друг друга, создавая эффект движения или изменения изображения. Это слишком простой, но утомительный процесс, поэтому рассмотрим анимацию другого типа, так называемую tweenанимацию. Создайте новое приложение с Empty Activity, перейдите в файл `activity_main.xml`, удалите текстовое поле и поместите в центр экрана кнопку, а внизу – как обычно, текстовое поле с ФИО. Затем необходимо создать новый xml-файл для описания анимации. Для этого нажмите правой кнопкой мыши по папке `res` и создайте новый файл Android resource с параметрами, которые изображены на рисунке 27.

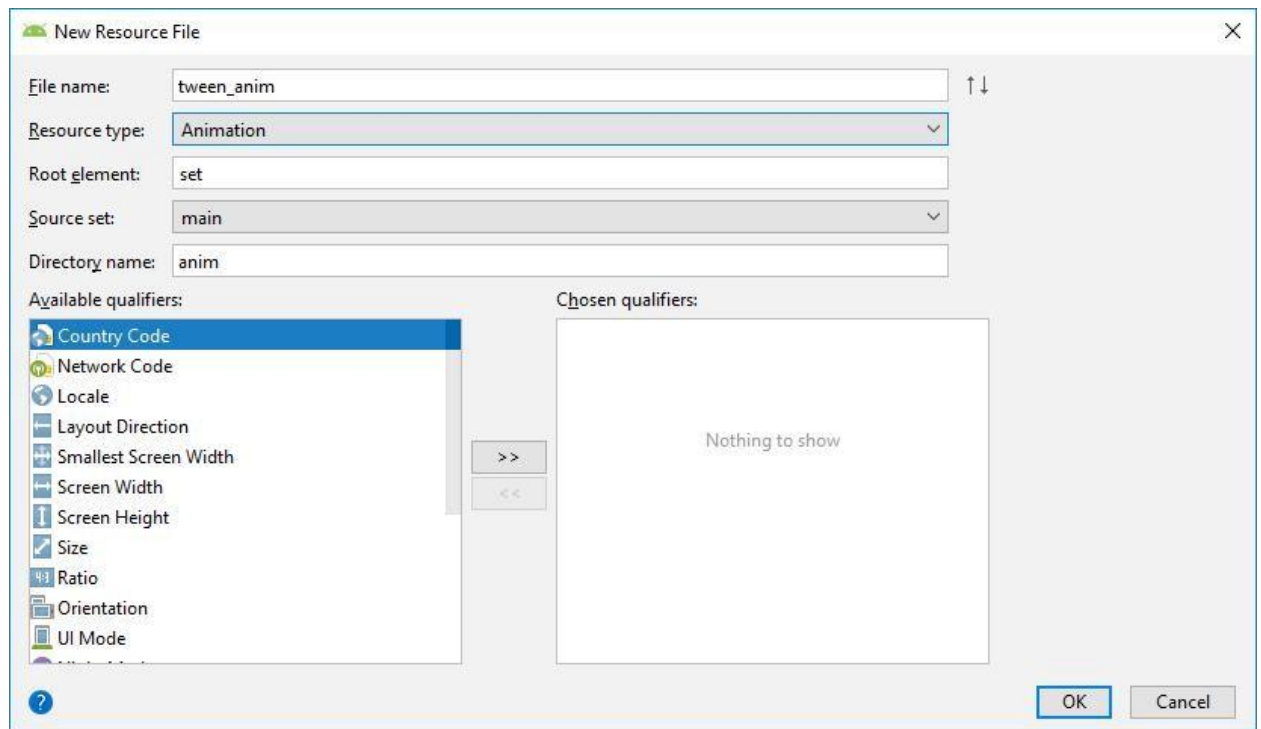


Рисунок 27 – Создание файла анимации

После данных действий в папке `res` появится новая папка `anim` с файлом `tween_anim.xml` внутри. Переходим в этот файл и добавляем следующий код внутри тэга `set`:

```
<scale
    android:fromXScale="2.0"
    android:toXScale="0.5"
    android:fromYScale="2.0"
    android:toYScale="0.5"        android:pivotX="50%"
    android:pivotY="50%"
    android:duration="2000" />
```

Здесь описывается уменьшение объекта с длительность анимации в 2 секунды (`android:duration`). Так как анимация будет отображаться на кнопке, нужно будет вернуть её в исходный размер, для этого добавляем ещё немного кода:

```
<scale
    android:fromXScale="0.5"
    android:toXScale="2.0"
    android:fromYScale="0.5"
    android:toYScale="2.0"        android:pivotX="50%"
    android:pivotY="50%"        android:duration="2000"
```

```
android:startOffset="2000" />
```

Теперь кнопка сможет обратно увеличиться до своих размеров, анимация увеличения также будет длиться 2 секунды, но она будет отрабатывать не сразу, а с задержкой в 2 секунды (`android:startOffset`). То есть сначала идёт анимация уменьшения объекта, а затем анимация увеличения. Ну и в заключение добавим анимацию вращения кнопки:

```
<rotate
    android:pivotX="50%"    android:pivotY="50%"
    android:fromDegrees="0"
    android:toDegrees="360"
    android:duration="2000"
    android:startOffset="4000" />
```

Анимация вращения будет ждать 4 секунды (пока отработают первые две анимации), а затем за 2 секунды провернёт кнопку на 360 градусов по часовой стрелке.

Ещё одним важным свойством анимации является параметр `interpolator`. Интерполятор позволяет ускорить или замедлить выполнение анимации на устройстве, а также добавить некоторые эффекты. Добавим следующий код в конец открывающего тэга `set`:

```
android:interpolator="@android:anim/bounce_interpolator"
```

Набрав `@android:anim` в кавычках, можно увидеть, какие типы интерполяторов бывают, см. рисунок 28. Можно поэкспериментировать с разными типами интерполяторов.



Рисунок 28 – Варианты интерполяторов

Итак, в нашем случае открывающий тэг set должен выглядеть следующим образом:

```
<set xmlns:android="http://schemas.android.com/apk/res/android"
    android:interpolator="@android:anim/bounce_interpolator">
```

С описанием анимации закончили, теперь необходимо перейти в файл MainActivity.java и выполнить анимацию после нажатия на кнопку. Для этого в методе onCreate создаём ссылку на кнопку:

```
final Button button = findViewById(R.id.button);
```

И создаём для неё listener и onClick. В onClick добавляем анимацию:

```
Animation animation =
    AnimationUtils.loadAnimation(MainActivity.this, R.anim.tween_anim);
button.startAnimation(animation);
```

Импортируем все зависимости и исправляем ошибки, после чего запускаем проект на эмуляторе. Теперь необходимо изменить параметры в файле `tween_anim.xml` на собственные, чтобы все не сдавали одну и ту же анимацию. Поэкспериментируйте с различными параметрами, можете также производить анимацию не с кнопкой, а с каким-нибудь другим элементом. Результат выполнения работы показан на рисунке 29.

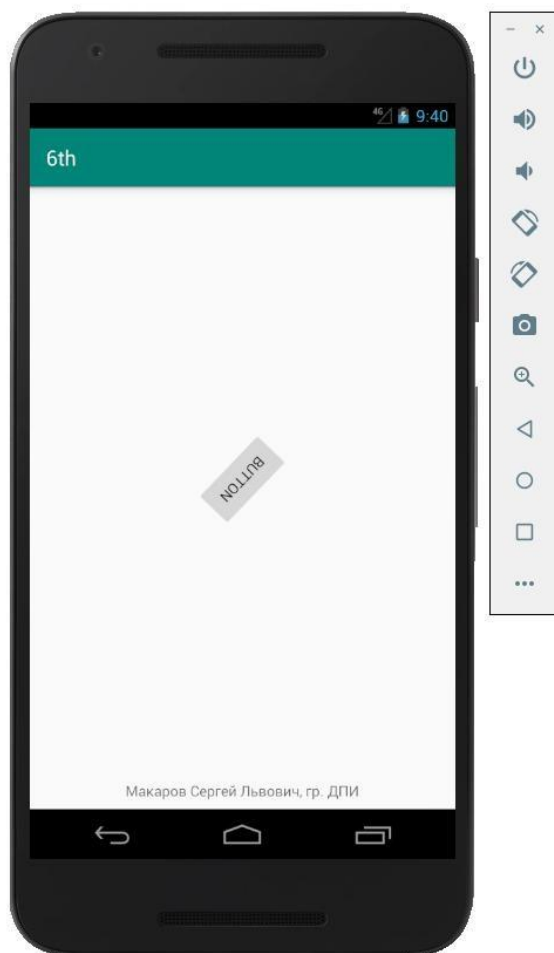


Рисунок 29 – Результат анимации

Лабораторная работа №7. Работа с картами

Задание: создать приложение, отображающее после запуска карты Google или какие-нибудь другие карты.

Создайте новый проект, но на этот раз выберите Google Maps Activity вместо Empty Activity. Для того, чтобы пользоваться картами Google, необходимо получить персональный ключ для приложения. Переходим в файл `res/values/google_maps_api.xml` (открывается по умолчанию), и в комментариях видим инструкцию на английском языке о том, как получить ключ для приложения. Если коротко, то необходимо перейти по персональной ссылке из комментария, залогиниться в свой Google аккаунт, нажать кнопку Continue и затем Create API key, после чего перед вами появится окно API key created с ключом, начинающимся на "AIza". Копируем значение ключа из поля и вставляем в файл `res/values/google_maps_api.xml` вместо фразы YOUR_KEY_HERE.

Теперь переходим в файл `MapsActivity.java`, и в самом последнем методе `onMapReady` добавляем следующее в начало, после строки `mMap = googleMap;`:

```
LocationManager locationManager = (LocationManager)
this.getSystemService(Context.LOCATION_SERVICE);
```

Затем строчкой ниже начинаем писать `LocationListener locationManager`
`= new Loc` и дальше выбираем первую подсказку.

Появится 4 метода, в первом методе `onLocationChanged` пишем следующее:

```
LatLng latLng = new LatLng(location.getLatitude(),
location.getLongitude()); mMap.clear();
mMap.moveCamera(CameraUpdateFactory.newLatLng(latLng));
mMap.animateCamera(CameraUpdateFactory.zoomTo(15));
mMap.addMarker(new MarkerOptions().position(latLng).title("I am
here"));
```

После этих четырёх методов (после символа `};` - не забудьте поставить точку с запятой) пишем следующее:

```
locationManager.requestLocationUpdates(LocationManager.NETWORK_PROVIDER, 0, 0, locationManager);
locationManager.requestLocationUpdates(LocationManager.GPS_PROVIDER, 0, 0, locationManager);
```

Здесь мы запрашиваем обновление местоположения по вышкам сотовой связи и по GPS. Код просит добавить проверку разрешений для пользователя, добавляем эту проверку (выделяем строку с ошибкой, слева видим красную лампочку с восклицательным знаком внутри, нажимаем на неё и выбираем Add permission check) и одновременно в файл манифеста

добавляем соответствующие разрешения. Разрешение

ACCESS_FINE_LOCATION уже есть, добавим недостающее:

```
<uses-permission
android:name="android.permission.ACCESS_COARSE_LOCATION" />
```

Далее вернёмся в MapsActivity.java и в методе onMapReady закомментируем всё, что идёт в конце и относится к Сиднею (после *// Add a marker in Sydney and move the camera*), и после этого вставим две строчки:

```
mMap.setMyLocationEnabled(true);
mMap.getUiSettings().setZoomControlsEnabled(true); mMap.setMapType(2);
```

Таким образом, на карте отобразится кнопка текущего местоположения и кнопки зума.

Прежде чем запускать приложение, необходимо создать новый эмулятор с поддержкой Google Play services (Google APIs), если у вас ещё нет такого эмулятора, так как на обычном эмуляторе карту вы не увидите, а увидите вместо неё надпись "Your_app_name won't run without Google Play services, which are not supported by your

device.". Затем, возможно, после запуска приложения вы можете получить сообщение о том, что

"Your_app_name won't run unless you update Google Play services", так как для работы приложения нужна версия 2 этих сервисов – нажмите кнопку Update в этом случае (кнопка будет работать только в том случае, если ваш эмулятор поддерживает функциональность Google Play). Лучше всего

сконфигурировать эмулятор с одной из последних версий API (начиная с Lollipop) – тогда не надо будет обновлять Google Play services до последней версии. Если после запуска приложения появляется предложение установить Instant Run, надо согласиться.

Также помните о добавлении вашего ФИО в приложение – в этот раз это будет сделать сложнее, чем обычно, так как надо самостоятельно создать layout в файле res -> layout -> activity_maps.xml, обернуть в него fragment с картой и добавить элемент TextView.

Запускаем приложение, однако эмулятор не имеет данных о местоположении, но их можно ему передать! Для этого в панели инструментов справа от эмулятора нажмите на три точки внизу, после этого откроется окно, показанное на рисунке 30. Справа в окне видно, что можно ввести значения широты и долготы и передать их приложению с помощью кнопки SEND. Введите 55.769794 в поле Longitude и 37.655640 в поле

Latitude (координаты Москвы) и нажмите кнопку SEND.

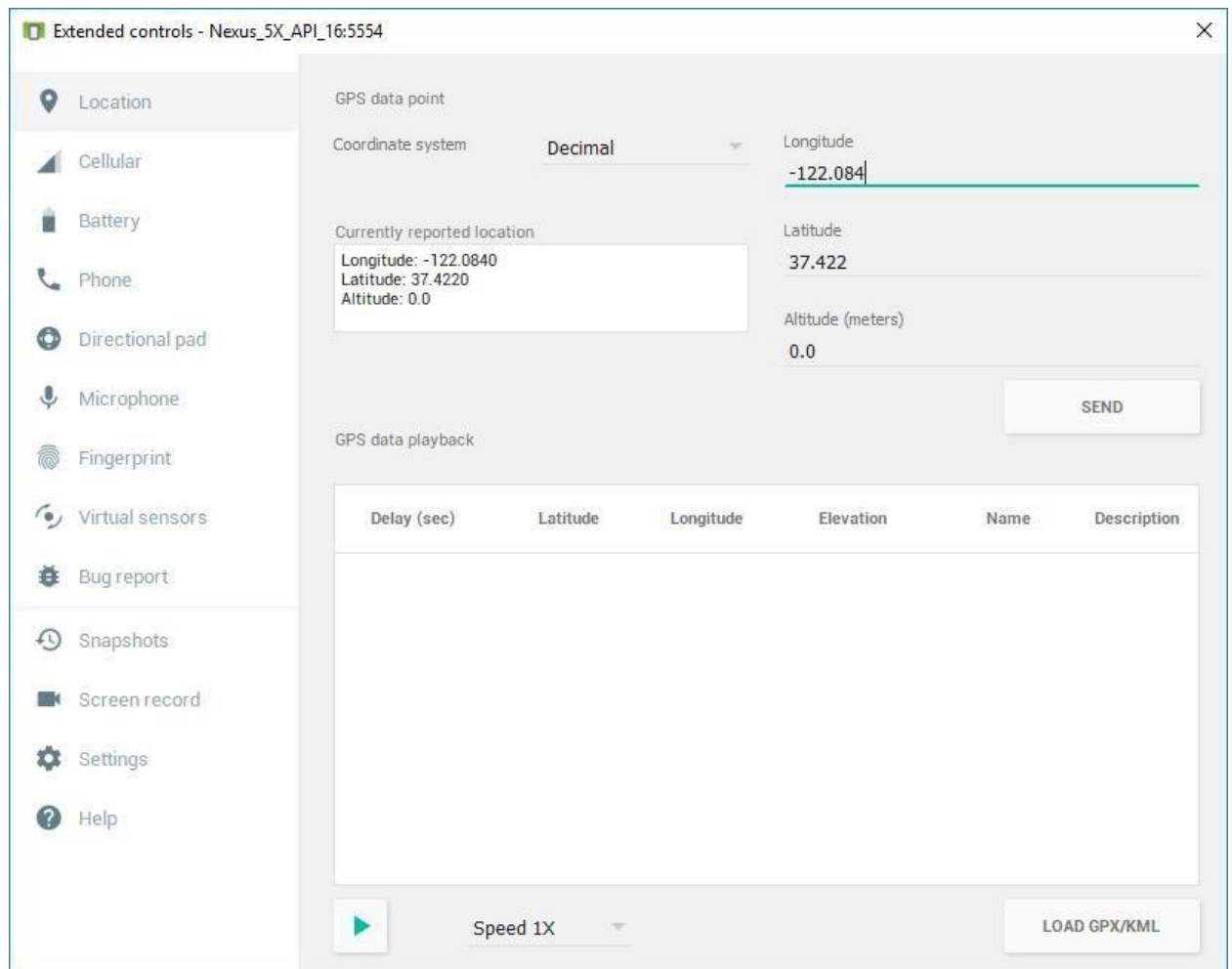


Рисунок 30 – Окно дополнительного управления эмулятором

Теперь эмулятор знает координаты и отображает своё местоположение по ним. Пример интерфейса работающего приложения показан на рисунках 31 и 32. Приложение можно запустить и на вашем реальном устройстве, на котором точно есть Google Play services.

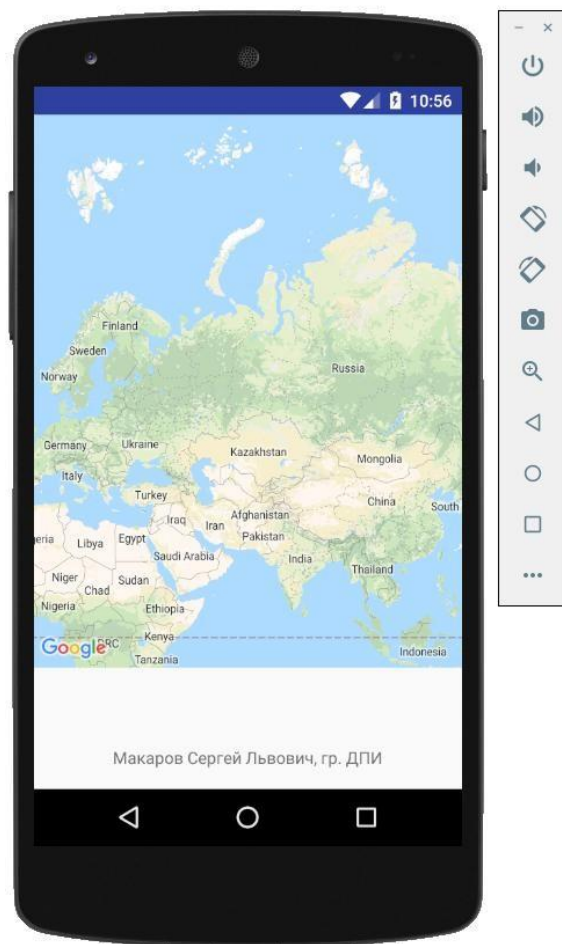


Рисунок 31 – Пример выполнения лабораторной работы №7 на эмуляторе

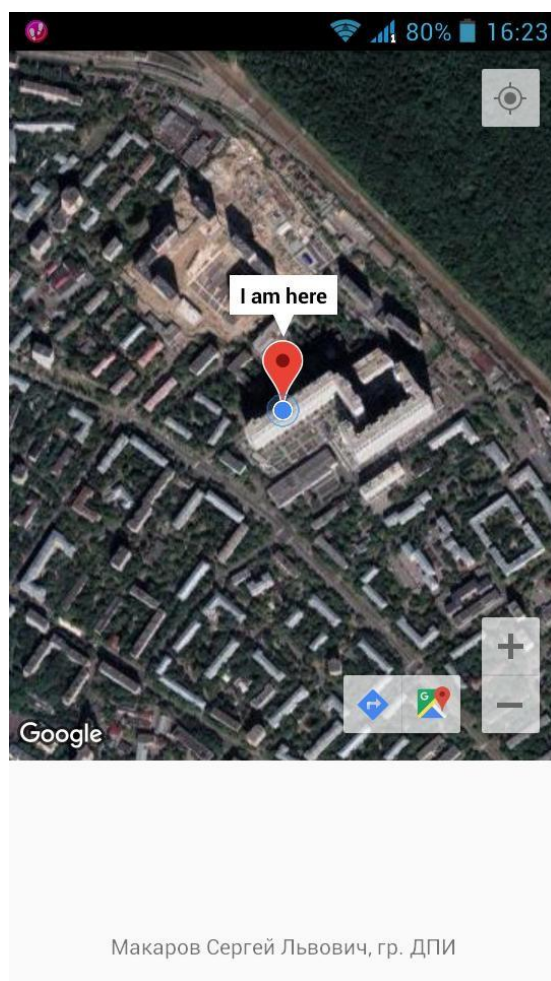


Рисунок 31 – Пример выполнения лабораторной работы №7 на смартфоне

Лабораторная работа №8. Создание виджета

Задание: создать собственный виджет с настройками. Например, виджет, который открывает какой-то сайт, адрес которого можно поменять в настройках.

Создайте новый проект без Activity, то есть при создании необходимо выбрать пункт Add No Activity вместо обычного Empty Activity. Теперь необходимо создать activity для виджета. Для этого нажмите правой кнопкой мыши по папке app, затем New -> Widget -> App Widget. Здесь задайте необходимые параметры для виджета. Можно оставить все пункты по умолчанию, однако нужно поставить галочку в

пункте Configuration Screen, чтобы в проект добавилось activity для настройки виджета.

Перейдите в файл `res/xml/new_app_widget_info.xml` и в параметре `android:updatePeriodMillis` смените значение «86400000» на «0», так как обновлять данный виджет не нужно. Затем перейдите в файл `manifests/AndroidManifest.xml` и перед тэгом `application` добавьте приложению разрешение пользоваться интернетом:

```
<uses-permission android:name="android.permission.INTERNET" />
```

Теперь перейдите в файл `NewAppWidget.java`, в методе `updateAppWidget` удалите весь код и напишите следующий:

```
Intent intent=new Intent(Intent.ACTION_VIEW,
Uri.parse("https://google.com"));
PendingIntent pending= PendingIntent.getActivity(context, 0, intent,
0);
RemoteViews views = new RemoteViews(context.getPackageName(),
R.layout.new_app_widget);
views.setOnClickPendingIntent(R.id.appwidget_text, pending);
appWidgetManager.updateAppWidget(appWidgetId, views);
```

Здесь устанавливается, что при нажатии на виджет необходимо открыть браузер и перейти по ссылке `google.com`.

Теперь необходимо найти и удалить в этом классе метод `onDeleted`.

Затем перейдите в файл `NewAppWidgetConfigureActivity.java`, удалите весь код в этом классе и добавьте следующие строчки:

```
private NewAppWidgetConfigureActivity context; private int
widgetID;
```

Строчкой ниже начните писать `protected` и в появившемся списке выберите `protected void onCreate (savedInstanceState)`, метод `onCreate` создастся автоматически. Далее в методе `onCreate` необходимо написать:

```
setContentView(R.layout.new_app_widget_configure);
setResult(RESULT_CANCELED);
context = this;
Bundle extras = getIntent().getExtras();
```

Затем добавляем следующее условие:

```
if (extras != null) {      widgetID =
extras.getInt(AppWidgetManager.EXTRA_APPWIDGET_ID,
AppWidgetManager.INVALID_APPWIDGET_ID);      final
AppWidgetManager widgetManager =
AppWidgetManager.getInstance(context);      final
RemoteViews views = new
RemoteViews(context.getPackageName(), R.layout.new_app_widget);
final EditText editText = (EditText)
findViewById(R.id.appwidget_text);
    Button button = (Button) findViewById(R.id.add_button);
}
```

Далее в условии задайте `listener` и `onClick` для объявленной кнопки и в методе `onClick` напишите следующее:

```
Intent intent=new Intent(Intent.ACTION_VIEW,
Uri.parse(editText.getText().toString()));
PendingIntent pending= PendingIntent.getActivity(context, 0, intent,
0);
views.setOnClickPendingIntent(R.id.appwidget_text, pending);
widgetManager.updateAppWidget(widgetID, views); Intent
resultValue = new Intent();
resultValue.putExtra(AppWidgetManager.EXTRA_APPWIDGET_ID, widgetID);
setResult(RESULT_OK, resultValue); finish();
```

Когда виджет добавляется на экран смартфона, появляется страница с настройками, где необходимо прописать желаемый адрес, начиная с «`http://`», и после

нажатия на кнопку виджет добавится на экран смартфона и будет работать только с заданной ссылкой.

Для того, чтобы изменить внешний вид виджета или его окна конфигурации/настроек, перейдите в файлы `res -> layout -> new_app_widget.xml` и `new_app_widget_configure.xml` соответственно.

Например, в последнем файле можно добавить свои ФИО и поместить текстовое поле для адреса и кнопку по центру окна, изменить `LinearLayout` на `RelativeLayout`, в текстовом поле можно написать «`http://`», чтобы пользователю не нужно было набирать это вручную; а в первом – поменять слово `EXAMPLE` на другое, изменить цвет виджета, его размеры в файле `res/xml/new_app_widget_info.xml` и т.д.

Запустить проект не получится – в нём нет `activity`. Поэтому постройте проект (`Build -> Build APK(s)`) и скопируйте и установите `apk` файл на ваше устройство (справа внизу нажмите `locate`, и откроется папка с только что построенным `apk` файлом виджета). Затем скопируйте и установите виджет в соответствии с правилами вашей версии ОС Android на ваше мобильное устройство – виджет будет отображаться среди других виджетов, его надо найти и перетащить на один из рабочих столов, при этом откроется сконфигурированное в коде окно настройки, где надо будет ввести адрес и нажать кнопку `Add Widget`.

Что касается эмулятора, то сначала его надо запустить. Затем, чтобы скопировать готовый `apk` файл на эмулятор в Android Studio, нужно выбрать пункт главного меню `View -> Tool Windows -> Device File Explorer`. В открывшемся окне появится структура каталогов и файлов эмулятора. Откройте папку `data -> app`. В этой папке вы можете увидеть ранее установленные файлы `apk` от наших предыдущих проектов. Нажмите правой кнопкой мыши по этой папке, выберите `Upload`, найдите только что созданный `apk` файл виджета (обычно он находится в папке `имя_проекта\app\build\outputs\apk\debug\`) и нажмите кнопку `ОК`, см. рисунок 32. После этого перейдите в окно эмулятора, нажмите на кнопку `Все программы` и

перейдите на закладку WIDGETS, см. рисунки 33 и 34 (приведена инструкция и показан интерфейс для ОС Android 4.1.2) – вы должны увидеть виджет (внизу у него будет написано имя_проекта, например – 8th2try, рисунок 35; при этом перезагружать эмулятор не надо).

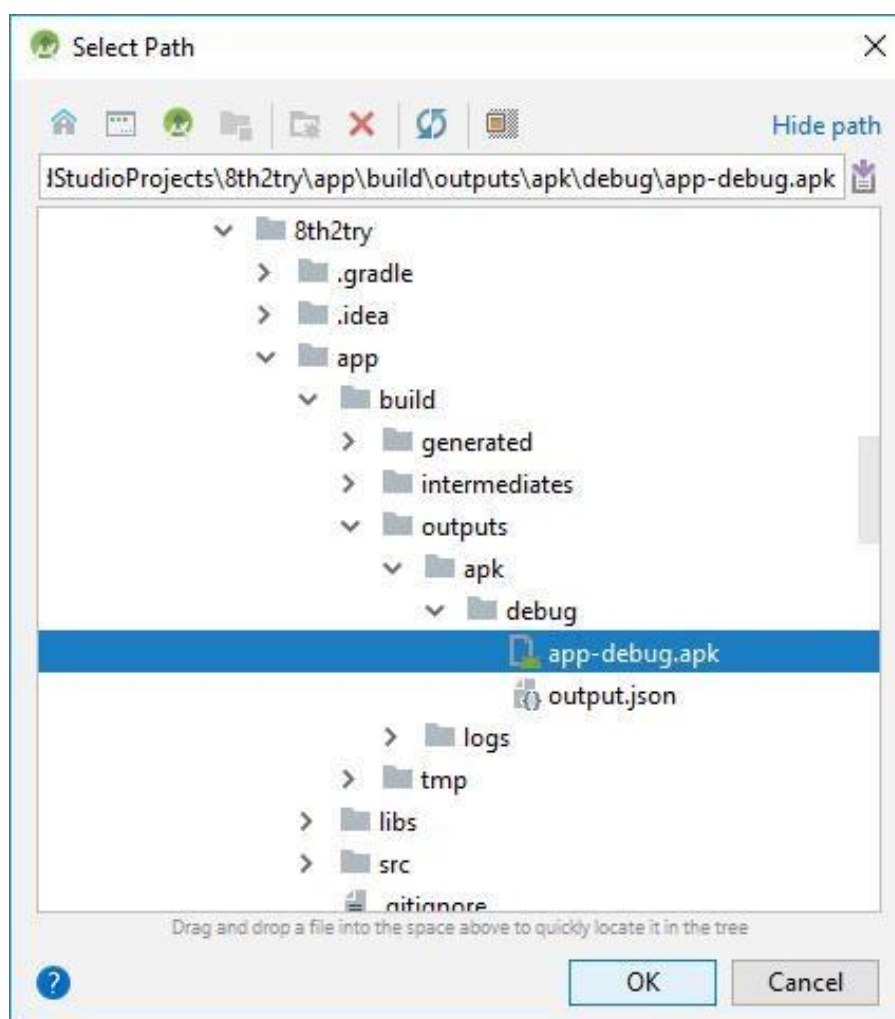


Рисунок 32 – Копирование файла виджета из папки проекта

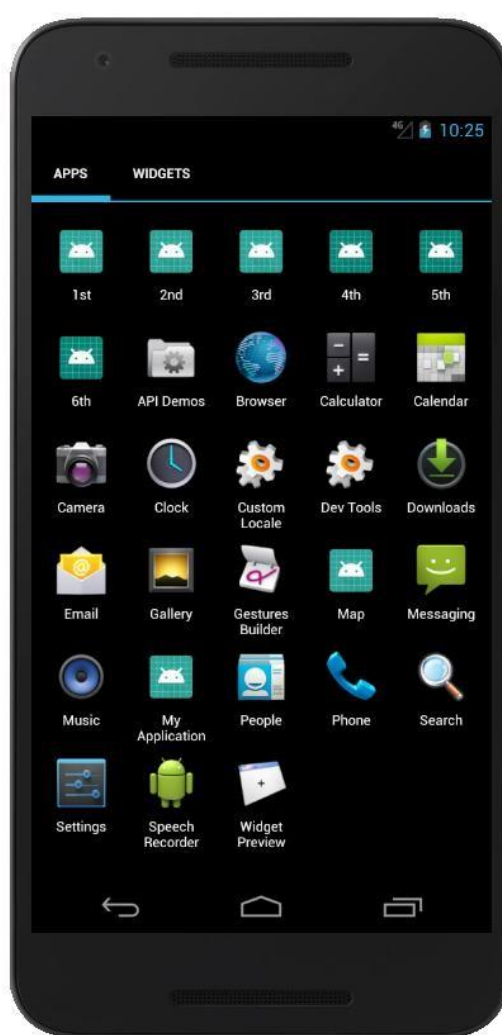


Рисунок 33 – Все программы Рисунок 34 – Установленные приложения

Перетащите виджет на один из экранов и в настройках введите любой адрес, который обязательно должен начинаться с «http://»! Затем нажмите кнопку Add Widget и кликните по виджету, после чего должен запускаться стандартный браузер с заданной в настройках ссылкой. Примеры страницы настройки и виджета представлены на рисунках 36 и 37.

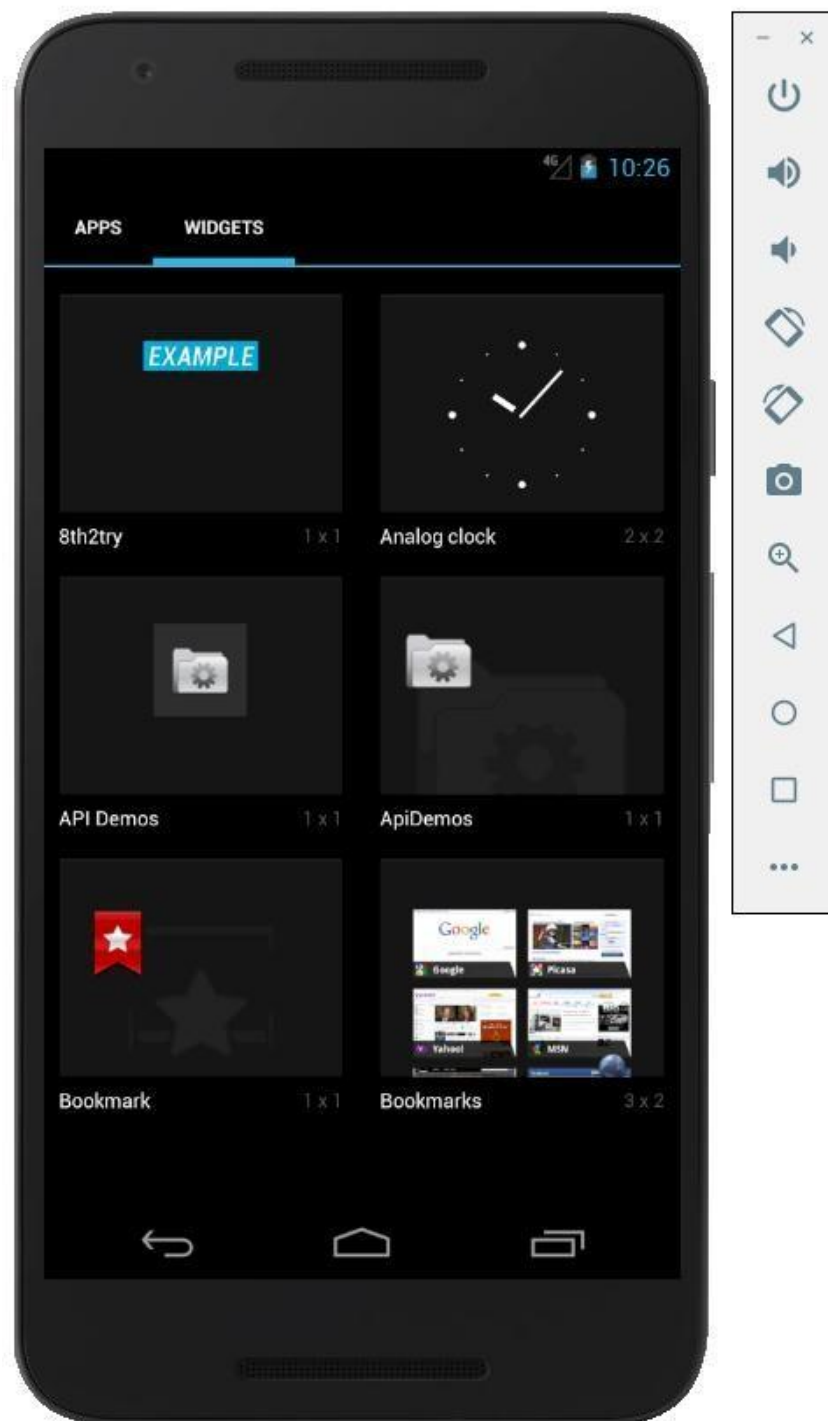


Рисунок 35 – Скопированный виджет 8th2try

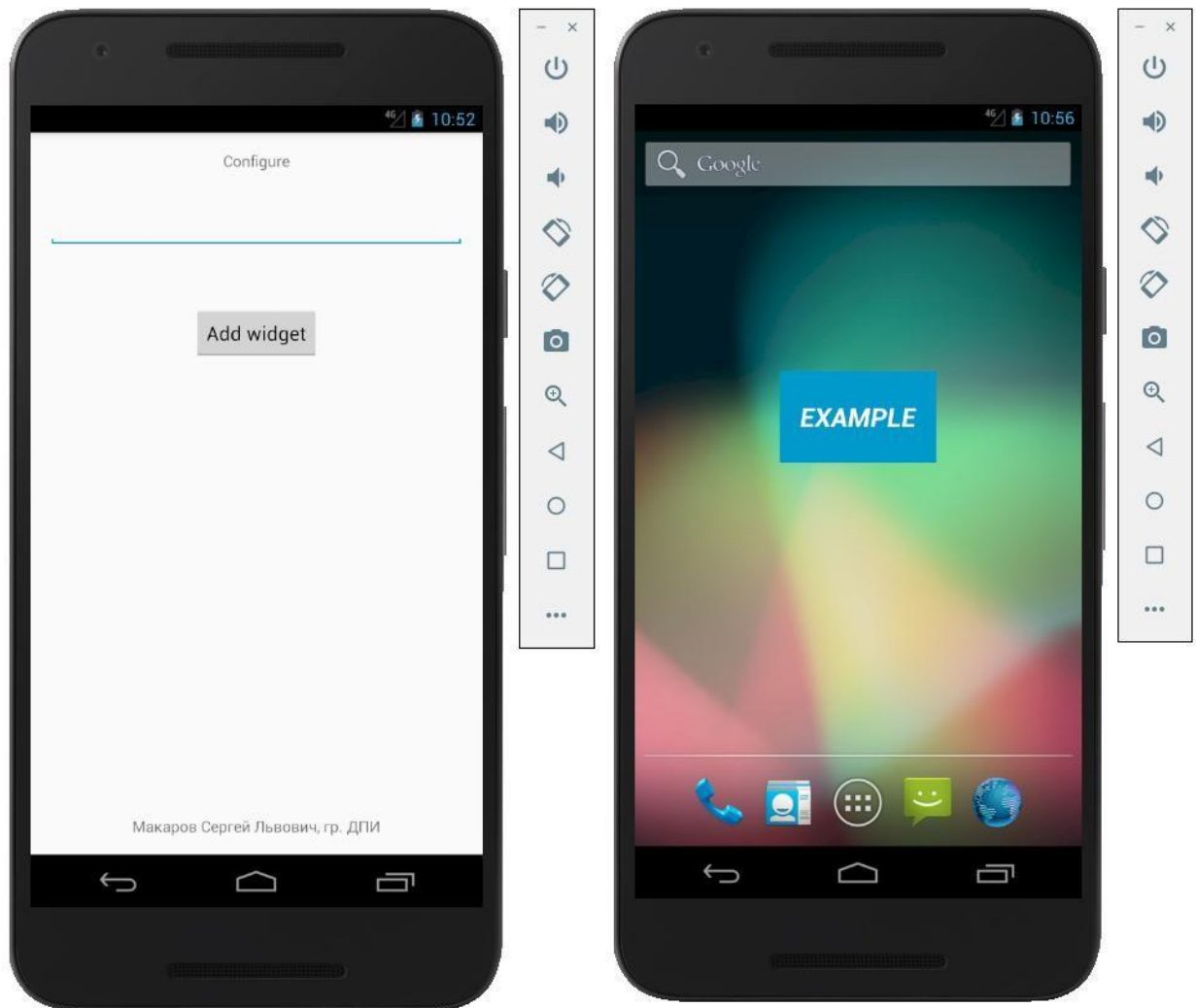


Рисунок 36 – Окно настройки виджета

Рисунок 37 – Готовый виджет

Лабораторная работа №9. Работа с меню

Задание: создать приложение, использующее опциональное и контекстное меню для какого-нибудь интерфейсного элемента. Естественно, выбор пунктов меню должен что-то менять в интерфейсных элементах или их отображении. Например, очистить поле ввода через контекстное меню, или отобразить невидимые интерфейсные элементы через установку галок в опциональном меню.

В операционной системе Android есть два вида меню: контекстное и опциональное. Опциональное меню появляется при нажатии на кнопку меню на

устройстве, либо при нажатии кнопки меню в программе (три точки или три тире в правом или левом верхнем углу в зависимости от версии ОС). Контекстное меню появляется при длительном нажатии на каком-либо элементе пользовательского интерфейса.

Создайте новый проект с Empty Activity. Конечно, можно создать проект, выбрав Basic Activity, при этом опциональное меню добавится автоматически: в папке res каждого проекта будет отдельная папка menu, в которой располагается файл menu_main.xml, описывающий опциональное меню приложения по умолчанию. В то же время, для опционального меню в файле MainActivity.java добавится заготовленный код с двумя методами для опционального меню: onCreateOptionsMenu и onOptionsItemSelected; а в интерфейсе приложения и в коде по умолчанию будет один пункт меню Settings.

Однако наша цель – научиться создавать меню самостоятельно, поэтому всё надо делать вручную – это недолго. Создадим папку menu в папке res (правой кнопкой мыши по папке res -> New -> Directory) и добавим в неё файл menu.xml: это можно сделать, нажав правой кнопкой мыши по папке menu и выбрав New и появившийся пункт Menu resource file. Заметьте, этот пункт контекстного меню папки menu отсутствует в контекстных меню других папок. В открывшемся окне назовите файл также menu, см. рисунок

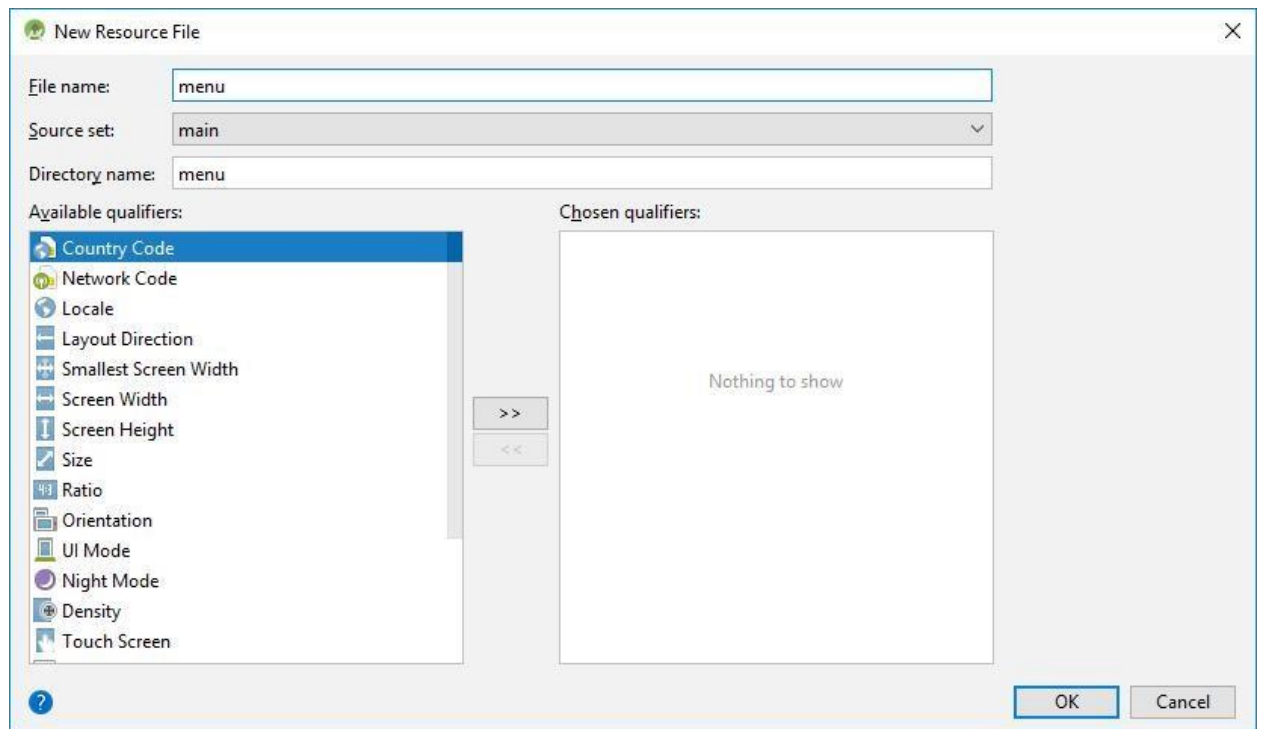


Рисунок 38 – Создание файла опционального меню

Перейдите в файл `menu.xml` (закладка Text) и добавьте новый пункт опционального меню:

```
<item android:id="@+id/show_text" android:title="Скрыть текст"
android:checkable="true" />
```

Теперь необходимо этот пункт меню отобразить в приложении. Перейдите в файл `MainActivity.java` и добавьте метод `onOptionsItemSelected` после метода `onCreate`: начните печатать `onOpt...` и выберите конструктор для этого метода. В методе `onOptionsItemSelected` перед `return` напишите следующее:

```
int id = item.getItemId(); if (id
== R.id.show_text) {      if
(item.isChecked()) {
TextView textView =
findViewById(R.id.text1);
textView.setVisibility(TextView.V
ISIBLE);
item.setChecked(false);
```

```

        } else
    {
        TextView textView = findViewById(R.id.text1);
        textView.setVisibility(TextView.INVISIBLE);
        item.setChecked(true);
    }
}

```

В данном коде в опциональное меню добавляется новый пункт, который в зависимости от состояния поля checkbox скрывает или показывает элемент TextView. Однако только этого метода onOptionsItemSelected недостаточно, необходимо добавить в MainActivity.java ещё один метод:

```

@Override
public boolean onCreateOptionsMenu(Menu menu) {
    getMenuInflater().inflate(R.menu.menu, menu);    return
    super.onCreateOptionsMenu(menu);
}

```

В этом методе опциональное меню menu заполняется содержимым, которое лежит в файле menu.xml, т.е. – нашим единственным пунктом Скрыть текст. Кроме того, без этого метода меню не будет видно в интерфейсе приложения. Запустите проект и проверьте, что всё работает (рисунок 39).

Теперь создадим контекстное меню, для этого необходимо создать ещё один xml-файл в папке menu. Нажмите по папке menu правой кнопкой мыши, затем New -> Menu resource file. Оставьте все поля по умолчанию и назовите файл contextmenu. После создания перейдите в данный файл (закладка Text) и напишите:

```

<item android:id="@+id/color_red" android:title="Красный" /> <item
android:id="@+id/color_black" android:title="Чёрный" />

```

Вернитесь в файл MainActivity.java и в методе onCreate напишите:

```

TextView textView = findViewById(R.id.text1);
registerForContextMenu(textView);

```

Таким образом, мы зарегистрировали элемент `TextView` в контекстном меню, и теперь добавленное контекстное меню будет работать для этого текстового элемента. Затем создайте новый метод `onCreateContextMenu` после метода `onCreate`. Начните писать `onCreateC` и выберите шаблон. В методе `onCreateContextMenu` первой строчкой перед существующим кодом напишите:

```
getMenuInflater().inflate(R.menu.contextmenu, menu);
```

Далее необходимо создать ещё один метод, по аналогии с меню опций: `onContextItemSelected`. Начните писать `onContextI` и выберите предложенный шаблон. В созданном методе `onContextItemSelected` нужно описать кнопки и действия:

```
int id = item.getItemId(); if (id == R.id.color_red) {  
    TextView textView = (TextView) findViewById(R.id.text1);  
    textView.setTextColor(Color.parseColor("red"));  
}  
if (id == R.id.color_black) {  
    TextView textView = (TextView) findViewById(R.id.text1);  
    textView.setTextColor(Color.parseColor("black"));  
}
```

Контекстное меню создано. Запустите приложение, нажмите и держите кнопку мыши / палец на элементе `TextView`, после чего появится контекстное меню с двумя созданными пунктами, которые меняют цвет текста (рисунок 40).

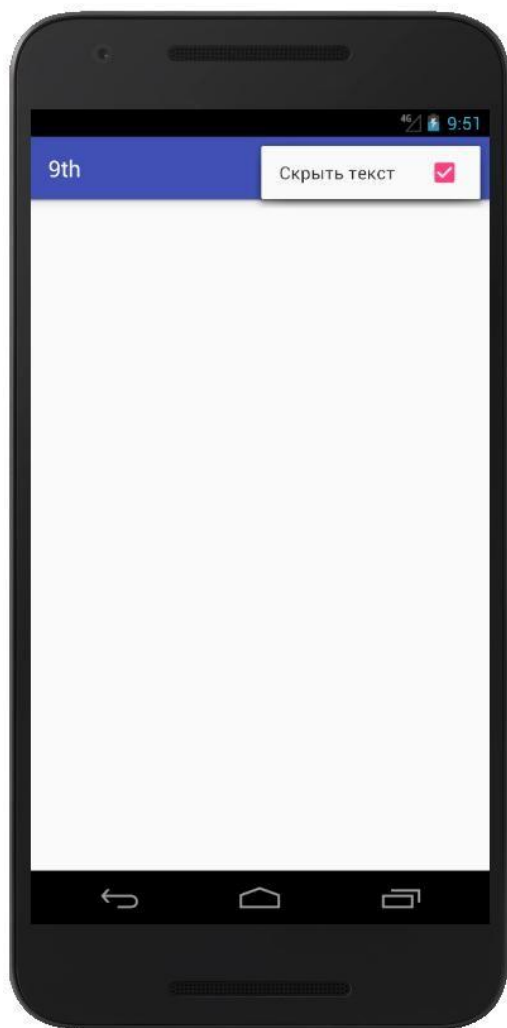


Рисунок 39 – Опциональное меню

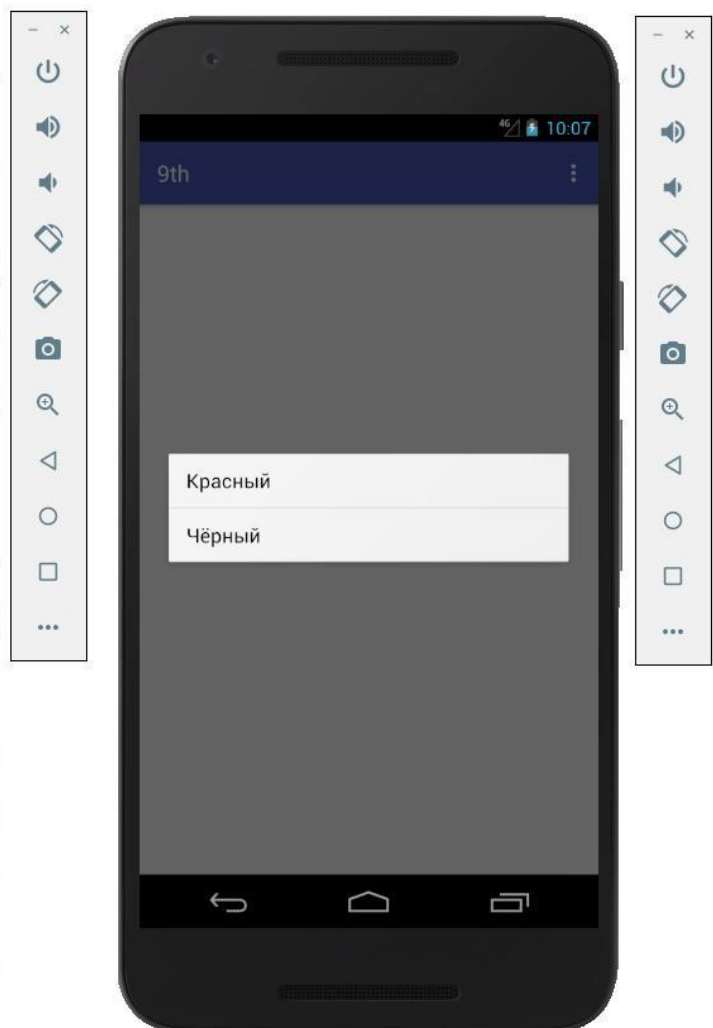


Рисунок 40 – Контекстное меню

Вы наверняка заметили, что в этом задании не были упомянуты ФИО. Сделайте ещё один пункт опционального меню О программе, в котором выведите с помощью Toast следующее: Автор – ФИО, гр. (создайте новый строковый ресурс, как обычно), добавив в соответствующее место кода следующее:

```
Toast.makeText(MainActivity.this, R.string.fio,
    Toast.LENGTH_LONG).show();
```

В результате появится информация о разработчике программы и новый пункт меню, как показано на рисунках 41 и 42.

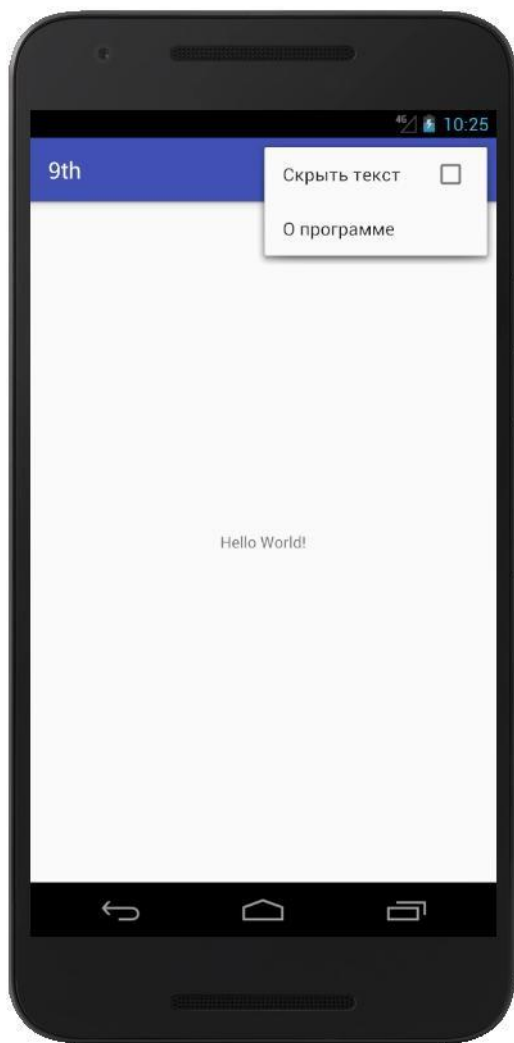


Рисунок 41 – Пункт "О программе"

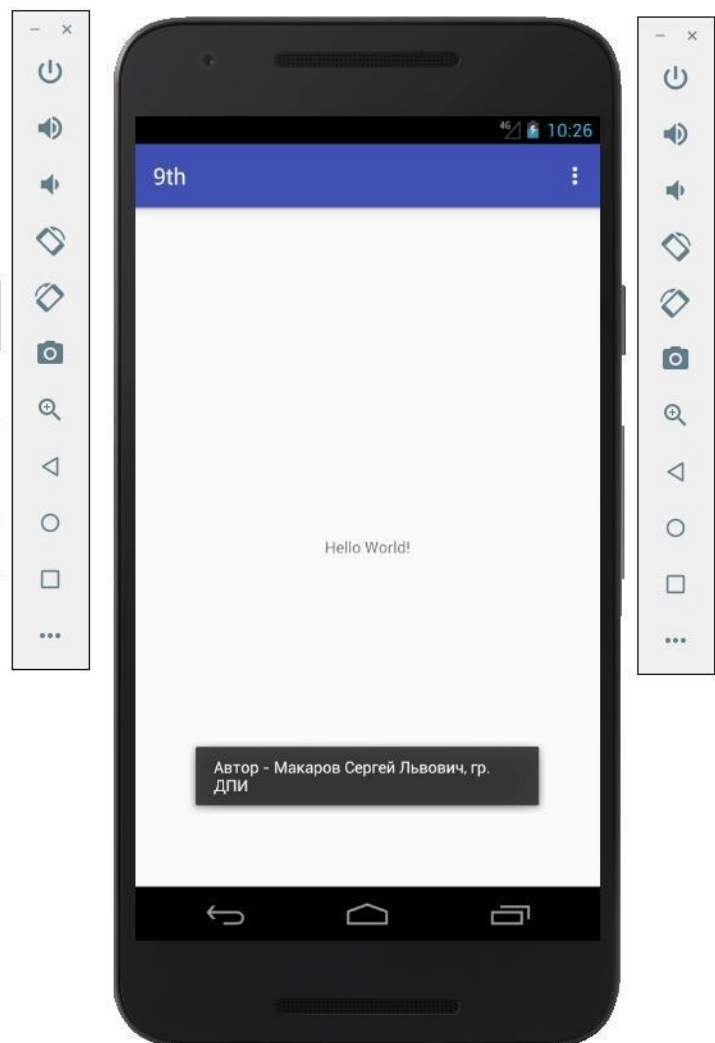


Рисунок 42 – Toast об авторе

Лабораторная работа №10. Работа с диалоговыми окнами

Задание: создать приложение, отображающее после некоторых действий (нажатия на кнопку, например, или проверки корректности ввода текста в EditText) диалоговое окно, свидетельствующее об ошибке/информирующее/предупреждающее пользователя о чём-то.

Создайте новый проект с Empty Activity, перейдите в файл `activity_main.xml`, удалите `TextView` и поместите в центр экрана кнопку "Выход". Далее перейдите в файл `MainActivity.java`, в методе `onCreate` создайте ссылку на кнопку, а затем создайте для неё `listener` и метод `onClick`.

В методе `onClick` напишите следующий код:

```
AlertDialog.Builder dialog = new
AlertDialog.Builder(MainActivity.this); dialog.setMessage("Вы
действительно хотите выйти?"); dialog.setCancelable(false);
dialog.setPositiveButton("Да", new
DialogInterface.OnClickListener() {
    @Override
    public void onClick(DialogInterface dialog, int which) {
        MainActivity.this.finish();
    } });
dialog.setNegativeButton("Нет", new
DialogInterface.OnClickListener() {
    @Override
    public void onClick(DialogInterface dialog, int which) {
dialog.cancel();
    }
});
AlertDialog alertDialog = dialog.create(); alertDialog.show();
```

Здесь происходит построение и отрисовка диалогового окна, в котором указывается сообщение и устанавливаются две кнопки. При нажатии на кнопку "Да" закроется приложение, а при нажатии на кнопку "Нет" закроется диалоговое окно. Пример выполнения представлен на рисунках 43 и 44.



Рисунок 43 – Стартовое окно

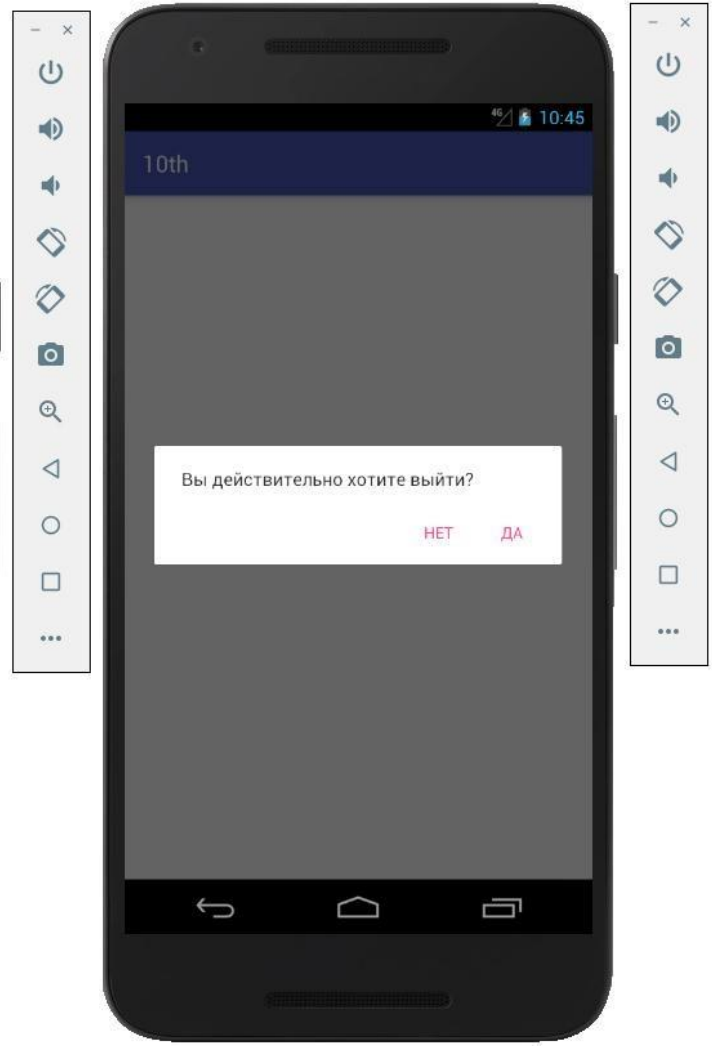


Рисунок 44 – Диалоговое окно

Теперь было бы логично совместить это задание с предыдущим заданием, так как выводить информацию о программе в Toast непривычно и не очень красиво. Добавьте в приложение меню опций, в него добавьте пункт "О программе" и сформируйте по нажатию на этот пункт диалоговое окно с информацией о программе и её авторе, например, так:

```
AlertDialog.Builder dialog = new
AlertDialog.Builder(MainActivity.this); try {
    dialog.setMessage(getTitle().toString() + " версия " +
getPackageManager().getPackageInfo(getPackageName(), 0).versionName +
"\r\n\r\nПрограмма с примером выполнения диалогового окна
\r\n\r\n Автор - Макаров Сергей Львович, гр. ДПИ"); }
catch (PackageManager.NameNotFoundException e) {
    e.printStackTrace();
```

```
}
dialog.setTitle("О программе"); dialog.setNeutralButton("OK", new
DialogInterface.OnClickListener() {
    @Override
    public void onClick(DialogInterface dialog, int which) {
dialog.dismiss();
    } });
dialog.setIcon(R.mipmap.ic_launcher_round); AlertDialog
alertDialog = dialog.create(); alertDialog.show();
```

Результат добавления пункта меню "О программе" с диалоговым окном можно увидеть на рисунках 45 и 46. Теперь нет необходимости писать свои ФИО и группу в элементе TextView – у нас есть хороший способ показать сведения об авторе. В последующих заданиях можно копировать этот код, чтобы пункт меню "О программе" всегда присутствовал в ваших приложениях.

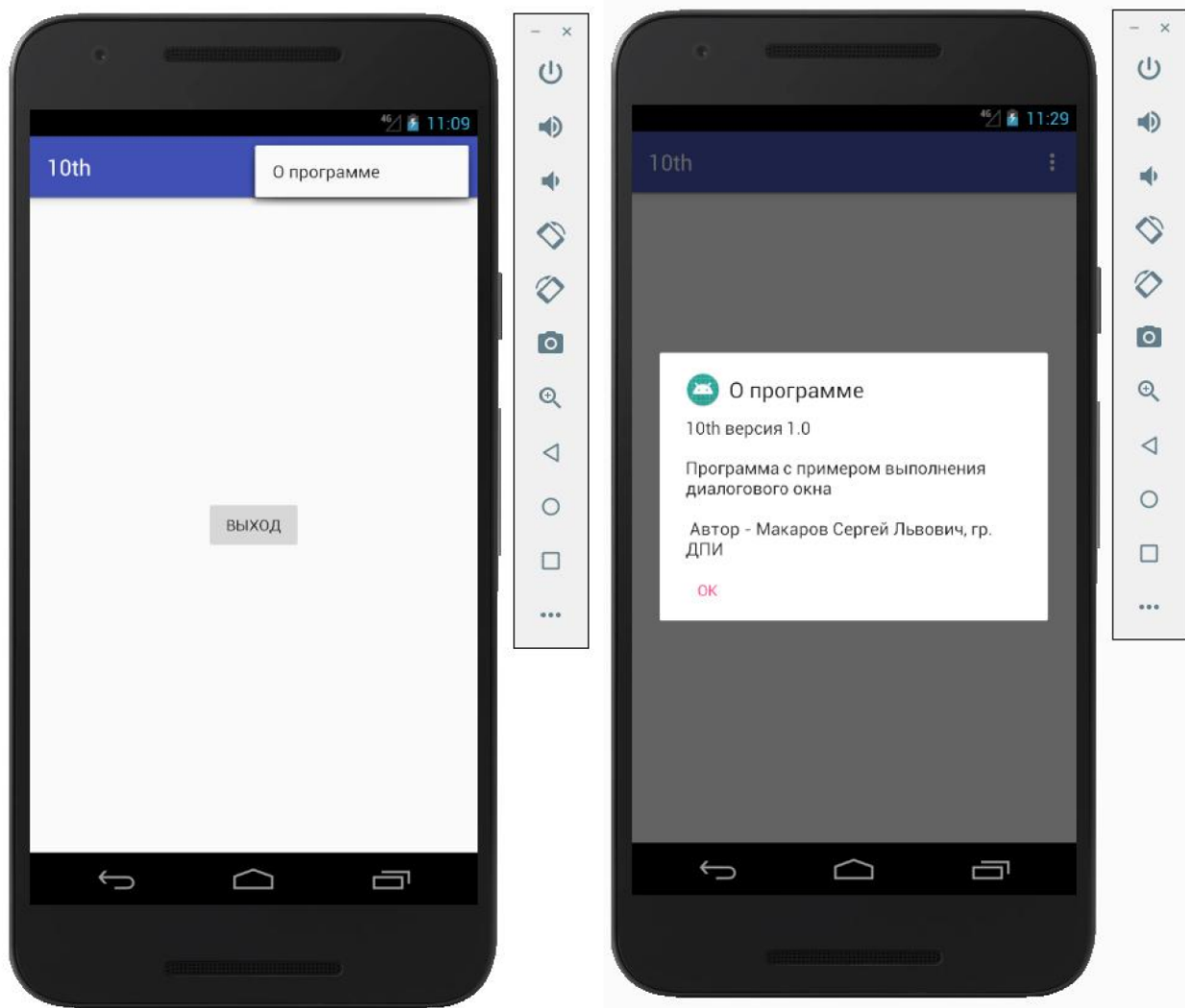


Рисунок 45 – Пункт меню "О программе" Рисунок 46 – Диалоговое окно "О программе"

Лабораторная работа №11. Работа с уведомлениями

Задание: создать приложение, помещающее по нажатию на кнопку какое-то сообщение со звуком в панель уведомлений/статус-панель на эмуляторе.

Создайте стандартный проект с Empty Activity и поместите кнопку в интерфейс приложения. Уведомление будет приходить после нажатия на данную кнопку. Перейдите в файл MainActivity.java и в методе onCreate создайте ссылку на кнопку, а затем создайте для неё listener и метод onClick. Далее в методе onClick настройте уведомление (данный код актуален только для версий Android ниже Oreo, современный код см. после скриншотов):

```
Context context = MainActivity.this;
Notification notification = new Notification.Builder(context)
    .setContentTitle("Hi from Alex")
    .setContentText("Hey, listen!")
    .setTicker("new notification!")
    .setSmallIcon(android.R.drawable.ic_dialog_alert)

    .setSound(Uri.parse("android.resource://" + getPackageName() + "/" + R
        .raw.al_heylisten))
    .build();
NotificationManager notificationManager = (NotificationManager)
    getSystemService(Context.NOTIFICATION_SERVICE);
notificationManager.notify(0, notification);
```

Здесь мы устанавливаем заголовок (setContentTitle) и текст (setContentText) для уведомления, а также небольшой текст, выводящийся в небольшую панель уведомлений ("шторку") рядом с иконкой (setTicker, см. рисунок 47), иконку и звуковой файл, который будет воспроизводиться при получении уведомления. Звуковой файл нужно поместить в папку res/raw, однако для начала её стоит создать. Нажмите правой кнопкой мыши по папке res и создайте Android resource directory. Resource type выберите raw и нажмите ОК. Обратите внимание, что имя звукового файла не может начинаться с цифры. Не забудьте добавить в приложение опциональное меню с пунктом о программе, который открывает диалоговое окно с вашими ФИО, см. предыдущие 2 задания. Теперь всё готово, можно запускать приложение и нажимать на кнопку, после чего в панели уведомлений появится уведомление от приложения, как показано на рисунках 47-48.

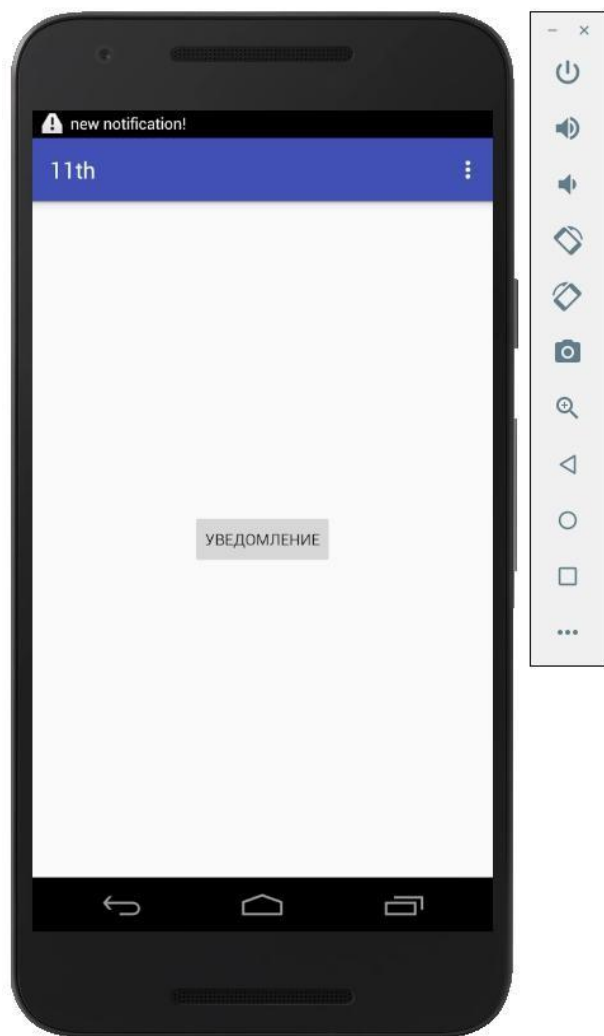


Рисунок 47 – Отображение краткого уведомления в панели уведомлений

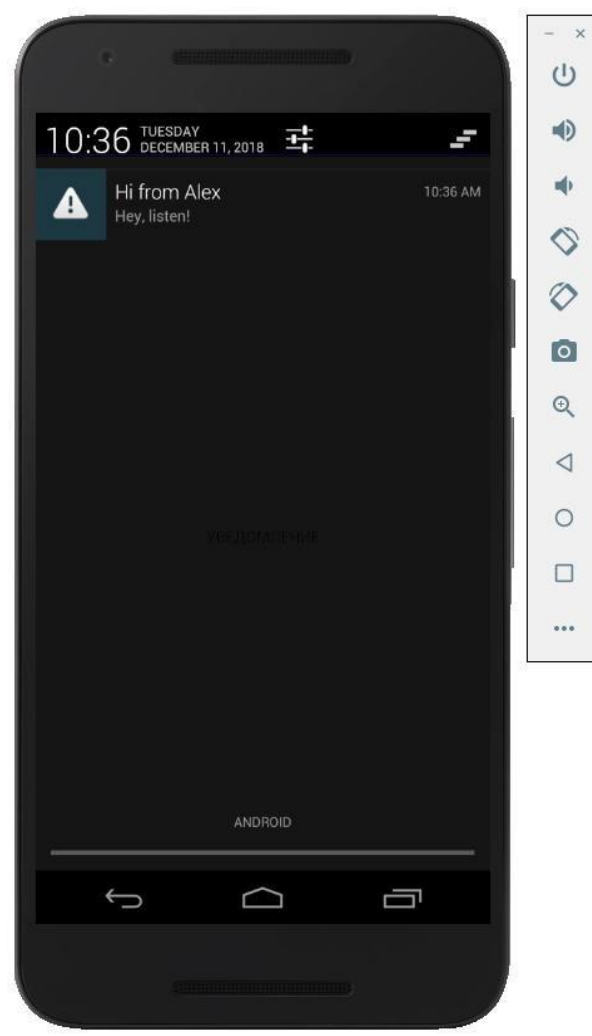


Рисунок 48 – Отображение уведомления в панели уведомлений

Для версий Android, начиная с Oreo (Android 8, или API 26) нужен другой код. Дело в том, что начиная с Oreo появились так называемые каналы, которые пользователь приложения может настроить самостоятельно, перейдя в настройки приложения и открыв пункт уведомлений (Notifications). Поэтому, если у Вас приложение только для Oreo и выше, в коде нужно создавать и настраивать канал уведомлений `NotificationChannel`. Если в `gradle`-файле приложения заданы `minSdkVersion` и `targetSdkVersion` больше либо равные 26 (Oreo), предусматривать проверку текущей версии Android на устройстве не надо – просто надо взять новый код с поддержкой каналов. Однако часто бывает, что приложение должно

поддерживать и старые версии, и, например, `minSdkVersion=16` при `targetSdkVersion=28`. Тогда в коде нужно делать проверку версии Android на устройстве, и для версии, начиная с Oreo (O), работать с каналами, как показано в коде ниже:

```
Context context = MainActivity.this;
NotificationChannel newnotchan= null; if
(android.os.Build.VERSION.SDK_INT >=
android.os.Build.VERSION_CODES.O) {
newnotchan= new
NotificationChannel("mychannell", "mychannel", NotificationManager
.IMPORTANCE_HIGH);
    AudioAttributes audioAttributes = new
AudioAttributes.Builder()
        .setContentType(AudioAttributes.CONTENT_TYPE_MUSIC)
        .setUsage(AudioAttributes.USAGE_MEDIA)
        .build();

newnotchan.setSound(Uri.parse(ContentResolver.SCHEME_ANDROID_RES
OURCE+"://"+getPackageName()+"/"+R.raw.al_heylisten),
audioAttributes);
}
NotificationManager notificationManager = (NotificationManager)
getApplicationContext().getSystemService(Context.NOTIFICATION_SE
RVICE);
if (Build.VERSION.SDK_INT >= Build.VERSION_CODES.O) {
notificationManager.createNotificationChannel(newnotchan);
}
Notification notification = null;

if (android.os.Build.VERSION.SDK_INT >=
android.os.Build.VERSION_CODES.O) {      notification
= new
Notification.Builder(context, "mychannell")
    .setContentTitle("Hi from Alex")
    .setContentText("Hey, listen!")
    .setTicker("new notification!")
    .setChannelId("mychannell")
    .setSmallIcon(android.R.drawable.ic_dialog_alert)
    .setOngoing(true)
    .build();
}

notificationManager.notify(0, notification);
```

Обратите внимание – для того, чтобы слышать именно тот звук, который расположен в папке raw, нужно сконфигурировать для канала так называемые AudioAttributes, а метод setSound, в котором нужны путь к файлу и эти аудиоатрибуты, затем использовать для канала, а не для уведомления. В приведённом выше коде отсутствует часть для версий Android ниже Oreo в конструкторе else, но она есть в начале описания этой лабораторной работы, и её в этот конструктор не составляет труда добавить, таким образом, сделав это приложение универсальным.

В последней строки вы, наверняка, заметили ошибку – в последних версиях Android нужно дополнительно добавить разрешение для приложения размещать уведомления в файл манифеста:

```
<uses-permission android:name="android.permission.POST_NOTIFICATIONS" />
```

Кроме этого, после установки приложения на телефон/смартфон нужно дать разрешение приложению на отправку уведомлений. Это делается в настройках системы – приложения – ваше приложение – уведомления – поставить переключатель в положение ON

(Settings/Apps/YourNotificationAppName/Notifications/Toggle on). После этого, если вы уже безрезультатно запускали приложение, можно увидеть название канала, который используется для отправки уведомлений приложением. Результат работы приложения показан на скриншотах ниже, при этом проигрывается нужный звук уведомления.

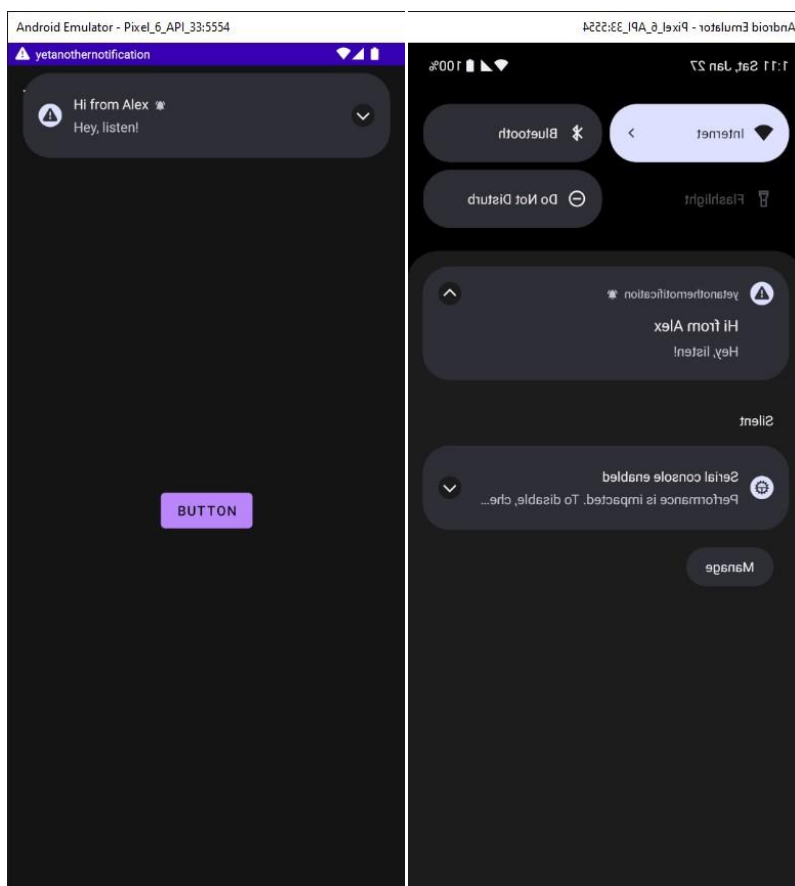
Если вы хотите, чтобы разрешения для приложения выдавались системой автоматически, и чтобы не надо было вручную давать разрешение приложению на отправку уведомлений, как написано в предыдущем абзаце, можно предусмотреть разрешение уведомления прямо в коде приложения с помощью динамических

разрешений. Для этого надо добавить в код следующее: метод `requestMultiplePermissions()` в любое место описания класса `MainActivity`, и затем метод `onRequestPermissionsResult()`:

```
public void requestMultiplePermissions() {
    ActivityCompat.requestPermissions(this,
        new String[] {
            POST_NOTIFICATIONS
        },
        PERMISSION_REQUEST_CODE);
}
public void onRequestPermissionsResult(int requestCode, @NonNull String[]
permissions, @NonNull int[] grantResults) {    if (requestCode ==
PERMISSION_REQUEST_CODE) {
        if (grantResults[0] == PackageManager.PERMISSION_GRANTED) {
return;
        } else finish();
    }
    super.onRequestPermissionsResult(requestCode, permissions, grantResults);
}
```

Соответственно, в код нажатия кнопки метода `onClick()` (в самое начало) нужно добавить строку:

```
requestMultiplePermissions();
```



Лабораторная работа №12. Работа с аудио

Задание: создать приложение, по нажатию кнопки в котором проигрывается какой-то звук.

Создайте стандартный проект, но на этот раз – с Basic Activity. У нас уже есть кнопка на экране. Теперь необходимо в папке res создать папку raw, как это делалось в прошлой лабораторной работе, и добавить туда какой-то звуковой файл. После этого перейдите в файл MainActivity.java и в методе onCreate в методе onClick кнопки FloatingActionButton добавьте всего две строчки:

```
MediaPlayer mediaPlayer = MediaPlayer.create(MainActivity.this,  
R.raw.dimon);  
mediaPlayer.start();
```

Также можно изменить строчку с методом Snackbar.make():

```
Snackbar.make(view, "Your should hear a sound",  
Snackbar.LENGTH_LONG)  
    .setAction("Action", null).show();
```

Не забудьте добавить в приложение опциональное меню с пунктом о программе, который открывает диалоговое окно с вашими ФИО. В данном случае мы использовали Basic Activity, поэтому все необходимые методы в коде уже есть, а пункт меню Settings можно поменять на "О программе". Запустите проект. После нажатия на кнопку должен проигрываться звуковой файл. Бывает так, что приложение начинает работать не с первого раза, тогда нужно выполнить Build -> Clean Project и заново загрузить его в эмулятор.

Лабораторная работа №13. Работа с видео

Задание: создать приложение, при запуске которого проигрывается какое-то видео.

Создайте стандартный проект с Empty Activity, перейдите в файл `activity_main.java`, удалите стандартное текстовое поле, включите магнит и перетащите на экран элемент `VideoView` из категории `Widgets`. Теперь создайте папку `raw` (правой кнопкой мыши по папке `res` -> `New` -> `Directory` -> `raw`) и поместите в неё видео. Приложение сможет воспроизвести только видео в формате `*.mp4` и `*.3gp`.

Перейдите в файл `MainActivity.java` и в методе `onCreate` создайте ссылку на `VideoView`:

```
VideoView videoView = findViewById(R.id.videoView);
```

Далее укажите путь к видеофайлу:

```
videoView.setVideoURI(Uri.parse("android.resource://" +  
getPackageName()+ "/" + R.raw.video));
```

И иницилируйте показ видео с помощью класса `MediaController`, помещающего элементы управления видео в виджет `videoView`:

```
videoView.setMediaController(new MediaController(this));  
videoView.start();  
videoView.requestFocus();
```

Не забудьте добавить в приложение опциональное меню с пунктом о программе, который открывает диалоговое окно с вашими ФИО.

Запустите приложение, и сразу же после запуска начнёт проигрываться видео. Если нажать на область воспроизведения, то снизу появятся элементы управления видео, как показано на рисунке 49.

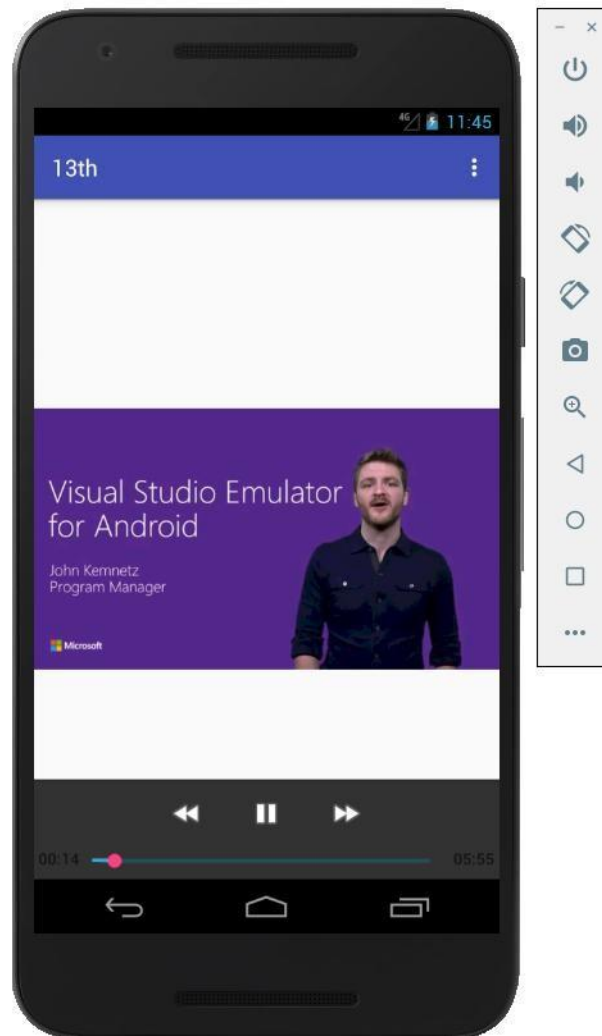


Рисунок 49 – Запущенное приложение с элементами управления видео

Обратите внимание, что видео может и не проигрываться на эмуляторе, но прекрасно воспроизводиться на реальном устройстве.

Для того чтобы проигрывать видео из интернета по ссылке, нужно воспользоваться методом `setVideoPath` объекта `videoView`, например:

```
videoView.setVideoPath("http://video.ch9.ms/some.mp4");
```

и добавить соответствующее разрешение в `AndroidManifest.xml` перед

тэгом <application>:

```
<uses-permission android:name="android.permission.INTERNET" />
```

Лабораторная работа №14. Работа с камерой

Задание: создать приложение, при запуске которого активируется фотокамера телефона, производится снимок, и этот снимок помещается в ImageView интерфейса приложения.

Создайте проект с Empty Activity, перейдите в файл activity_main.xml, удалите стандартное текстовое поле и расположите на экране приложения элементы ImageView и Button. Расставьте элементы так, чтобы элемент ImageView занимал практически весь экран (у него в ширине и высоте должно быть установлено значение match_parent).

Далее перейдите в файл MainActivity.java и объявите перед методом onCreate переменную imageView:

```
ImageView imageView;
```

Затем внутри метода onCreate свяжите переменные (объекты) с интерфейсом, как обычно:

```
imageView = findViewById(R.id.imageView);  
Button button = findViewById(R.id.button);
```

Далее создайте для кнопки listener и метод onClick. В методе onClick напишите:

```
Intent intent = new Intent(MediaStore.ACTION_IMAGE_CAPTURE);
startActivityForResult(intent, 0);
```

То есть после нажатия на кнопку загружается экран с камерой телефона, где можно сделать снимок. Теперь необходимо создать метод onActivityResult, который будет срабатывать после возвращения на начальное activity:

```
@Override
protected void onActivityResult(int requestCode, int resultCode,
Intent data) {
    super.onActivityResult(requestCode, resultCode, data);      Bitmap
    bitmap = (Bitmap) data.getExtras().get("data");
    imageView.setImageBitmap(bitmap);
}
```

Приложение готово. Не забудьте добавить в приложение опциональное меню с пунктом о программе, который открывает диалоговое окно с вашими ФИО и краткой информацией о приложении. Запустите приложение, нажмите на кнопку, и должно появиться окно, где эмулируется работа камеры (рисунок 50). Сделайте снимок и вернитесь в activity (при необходимости нажмите на галочку), где в элементе ImageView уже будет находиться сделанный снимок (рисунок 51).

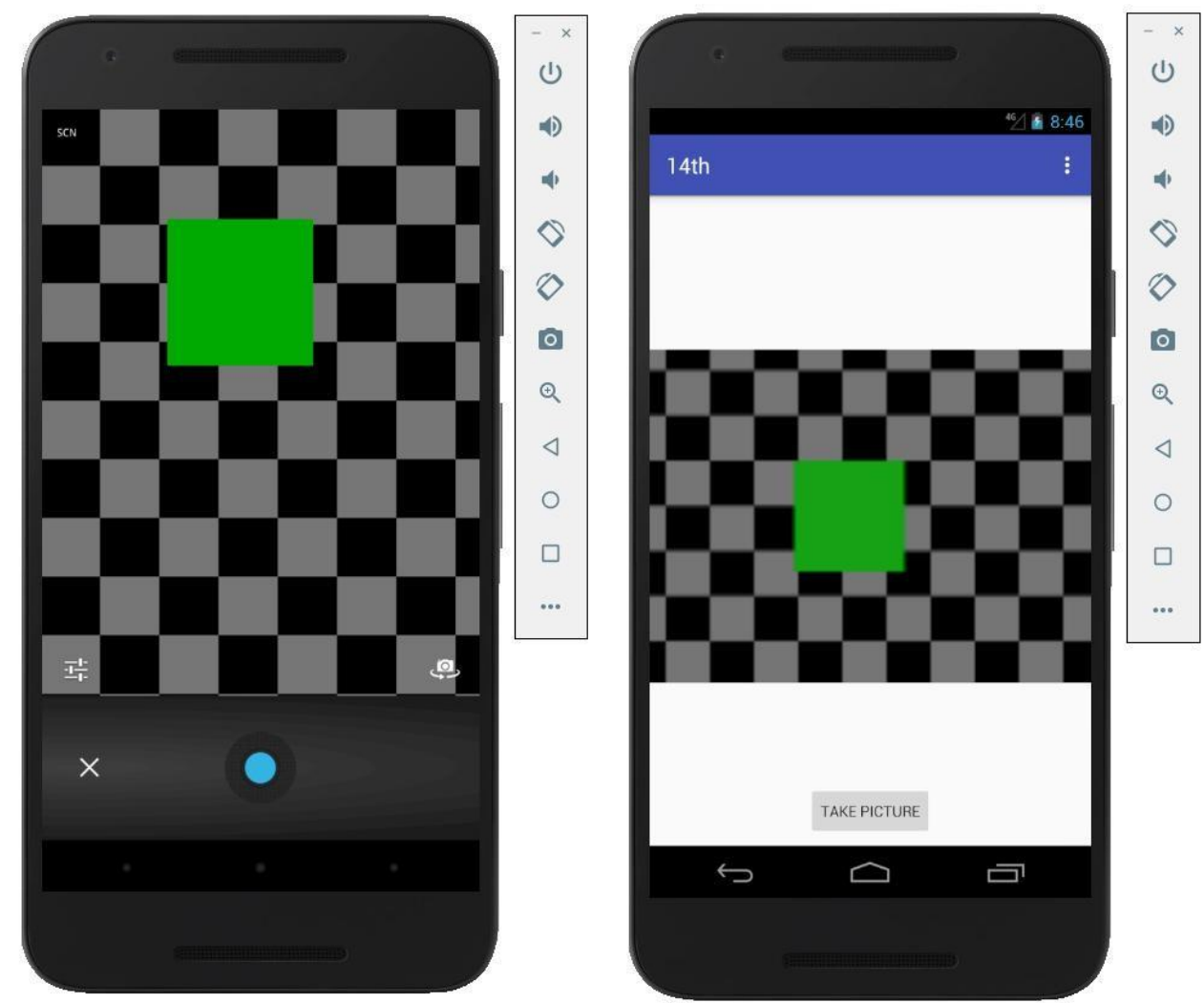


Рисунок 50 – Окно камеры

Рисунок 51 – Activity со снимком

Если к компьютеру подключена веб-камера, или она есть у Вас на ноутбуке, можно попытаться вывести изображение с неё. Для этого зайдите в список симуляторов (Tools -> Android -> AVD Manager), нажмите на значок в виде карандаша (справа), затем Show Advanced Settings и поменяйте в разделе Camera пункт Emulated на Webcam0. Сохраните настройки и попробуйте заново запустить приложение. Не забудьте, что если Вы выбрали Webcam0 для Front Camera, надо нажать на соответствующий значок в правом нижнем углу интерфейса захвата изображения (см. рис. 50), чтобы переключиться с основной камеры на фронтальную (сэлфи) камеру.

Лабораторная работа №15. Работа с настройками и БД

Задание: создать приложение, работающее с SharedPreferences и сохраняющее настройки, а также работающее с БД SQLite - заполняющее БД по нажатию кнопки 1 с помощью EditText, и выводящее все записи этой БД в какой-нибудь интерфейсный элемент с помощью кнопки 2 (в виде списка, datagrid или просто правильно настроенного TextView).

Практически во всех приложениях есть какие-то данные, которые надо сохранять при перезапуске приложения, например настройки. Чтобы приложение имело возможность сохранить данные, обычно используют Shared Preferences.

Создайте проект с Settings Activity, перейдите в файл SettingsActivity.java. В последних версиях Android Studio в этом файле используется уже готовый фрагмент с некоторыми настройками, поэтому менять его не надо.

Для начала добавим в приложение класс MainActivity.java и файл интерфейса main_activity.xml (правый клик мыши по названию упаковки класса -> New -> Activity -> Empty Activity). Затем добавим в MainActivity.java опциональное меню с пунктом о программе, который открывает диалоговое окно с вашими ФИО и краткой информацией о приложении. Затем добавим новый пункт в файл menu.xml и в код метода onOptionsItemSelected - кнопку Settings для перехода на экран SettingsActivity, соответственно:

```
<item android:id="@+id/settings" android:title="Настройки"/>

if (item.getItemId() == R.id.settings) {

}
```

Для этого в операторе if для пункта settings осуществим переход:


```
Intent intent = new Intent(MainActivity.this,
SettingsActivity.class);
startActivity(intent);
```

Последнее, что нужно сделать – это сообщить системе, что главным в нашем приложении является MainActivity, а не SettingsActivity. Для этого перейдём в файл манифеста приложения AndroidManifest.xml и перенесём следующие строки из тэга activity для SettingsActivity в тэг activity для класса MainActivity:

```
android:exported="true"
android:label="@string/app_name">
<intent-filter>
    <action android:name="android.intent.action.MAIN" />

    <category android:name="android.intent.category.LAUNCHER" />
</intent-filter>
```

Запустите приложение, откроется пустое окно, содержащее только опциональное меню, см. рис. 52. Перейдите в настройки, измените параметры настроек и выйдите из приложения. Затем снова запустите приложение и вернитесь в настройки, параметры остались такими же, какими они были до выхода из приложения. Пример стандартных настроек приведён на рисунке 53.

Возможно, у вас не будет работать кнопка Back на SettingsActivity, расположенная вверху слева (стрелка назад, рис. 53). Для того, чтобы она работала, нужно добавить строку

```
android:parentActivityName=".MainActivity"
```

в файл манифеста в тэг activity, отвечающий за SettingsActivity, чтобы приложение знало, какая активити в вашем приложении является главной/родительской.

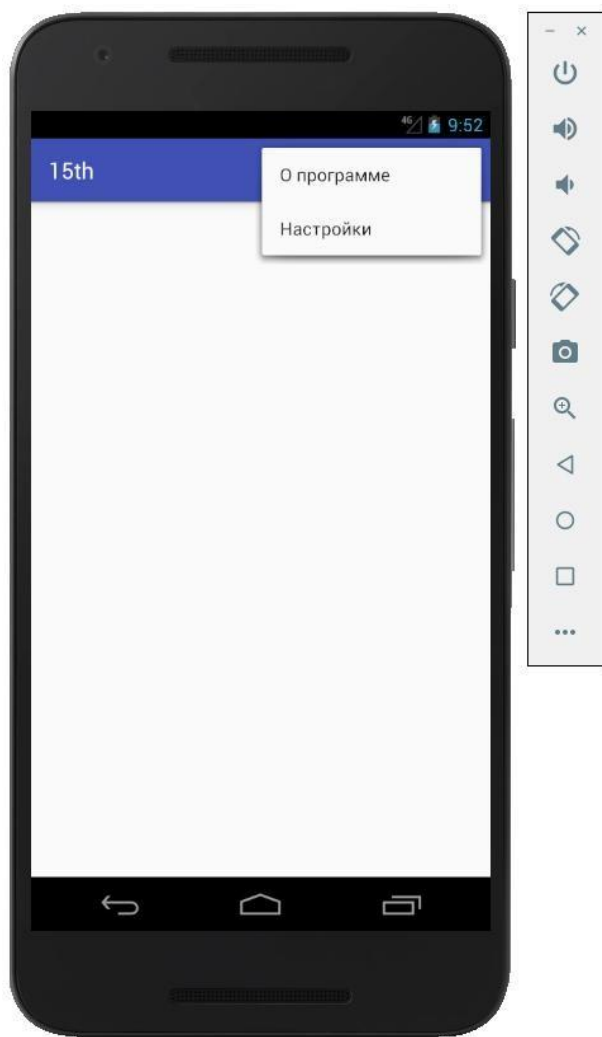


Рисунок 52 – Интерфейс приложения

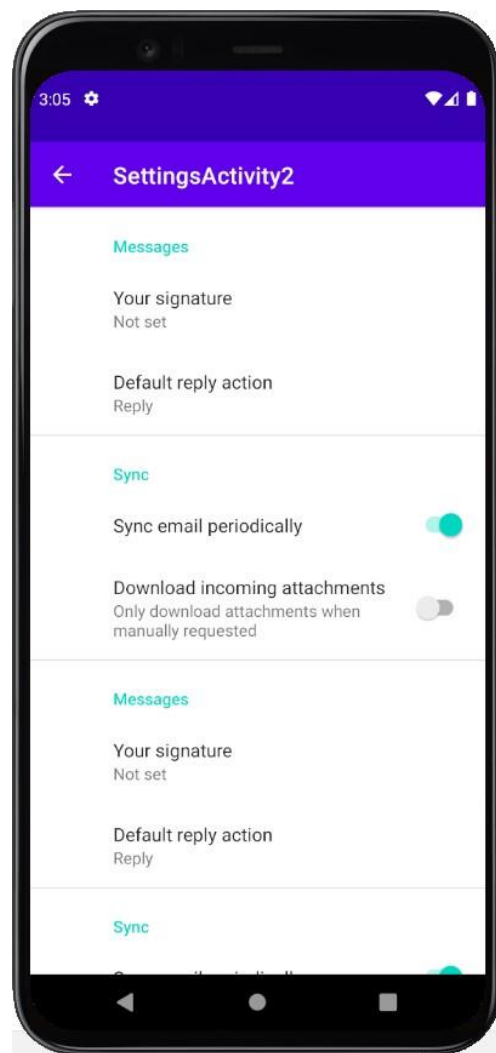


Рисунок 53 – Настройки программы

Однако в этом проекте всё сделано за нас, ни о чём думать не надо, всё уже готово с помощью класса `SettingsActivity`. Поэтому, чтобы лучше прочувствовать механизм `SharedPreferences`, сделаем следующее. Создадим элемент `EditText` в интерфейсе приложения. Затем создадим переменную в классе `MainActivity.java`:

```
private EditText edit1;
```

В методе `onCreate` класса `MainActivity.java` добавим ссылку на переменную и создадим настройки с помощью класса `SharedPreferences`, после этого тексту в `EditText` присвоим значение, сохранённое ранее:

```
edit1 = findViewById(R.id.editText);
SharedPreferences save = getSharedPreferences("SAVE", 0);
edit1.setText(save.getString("text", ""));
```

Текст мы будем сохранять по закрытию приложения, поэтому создадим с помощью конструктора метод `onStop` и добавим туда следующее:

```
SharedPreferences save = getSharedPreferences("SAVE", 0);
SharedPreferences.Editor editor = save.edit(); //создаём редактор shared preferences
editor.putString("text", edit1.getText().toString()); //сохраняем текст из edit1
editor.commit(); //применение редактирования shared preferences
```

Проверим работу приложения – запускаем, набираем текст, выходим из приложения, затем запускаем снова и видим, что текст сохранился.

Теперь рассмотрим работу приложения с базой данных. Для этого понадобятся базовые знания SQL.

Перейдите в файл `MainActivity.java` и в методе `onCreate` создайте базу данных с названием «DBName»:

```
SQLiteDatabase db = openOrCreateDatabase("DBName", MODE_PRIVATE, null);
```

Далее в базе данных нужно создать таблицу:

```
db.execSQL("CREATE TABLE IF NOT EXISTS MyTable5 (_id INTEGER PRIMARY KEY AUTOINCREMENT, Name VARCHAR);");
```

И теперь необходимо заполнить созданную таблицу:

```
db.execSQL("INSERT INTO MyTable5 VALUES ('1','some text');");
```

После работы с базой данных её обязательно необходимо закрыть:

```
db.close();
```

Запустите приложение, и если не возникло никаких ошибок, значит создалась база данных, затем в ней создалась таблица и в таблице создалась запись.

Так как не было создано никакого взаимодействия с интерфейсом, то для проверки содержимого базы данных необходимо закомментировать последнюю строку кода, отвечающую за заполнение базы данных (создание первой записи). Далее перед кодом закрытия базы данных необходимо создать указатель:

```
Cursor cursor = db.rawQuery("SELECT * FROM Mytable5", null);
```

И передвинуть его на первую запись:

```
cursor.moveToFirst();
```

Теперь нужно вывести в лог поле Name из первой записи:

```
Log.d("MEME", cursor.getString(cursor.getColumnIndex("Name")));
```

После этого запустите приложение и в Android Studio на нижней панели перейдите в Logcat. Далее в поисковой строке данного раздела нужно написать «MEME» и нажать Enter, после чего по заданному фильтру найдётся нужный нам лог:

2024-02-10	14:20:23.675	10735-10735	MEME
com.example.sharedprefsndb		D	some text

Данный лог свидетельствует о том, что была корректно создана база данных, таблица и запись в таблице, а также корректно составлен запрос на извлечение нужных данных.

Теперь необходимо добавить в приложение работу с базой данных через интерфейсные элементы. Интерфейс нашего приложения пустой, этим надо воспользоваться. Например, можно добавить поле EditText и кнопку Button для добавления записи в таблицу, а также ListView и кнопку Button для отображения всех данных в таблице. Можно также добавить кнопки для редактирования и удаления записей из БД – таким образом, мы охватим все наиболее используемые команды языка SQL: SELECT, INSERT, UPDATE, DELETE (или полный CRUD – Create, Replace, Update, Delete). Пример интерфейса показан на рисунке 54.

Сформулируем логику приложения. Как показано на рисунке 54, мы хотим, чтобы в приложении можно было добавлять запись в таблицу базы данных с помощью кнопки Add и поля EditText, чтобы можно было просматривать список всех записей в этой таблице, а также - чтобы можно было редактировать запись в таблице и удалять запись. Допустим, что редактировать запись мы будем с помощью диалогового окна, а для отдельной записи в списке ListView предусмотрим элементы TextView и 2 Button для отображения записи и редактирования + удаления записи из таблицы. Таким образом, у нас будет кастомный список ListView и кастомный диалог AlertDialog в приложении. Можно также сделать это приложение с помощью RecyclerView.

Первое, что нужно сделать, это – нарисовать соответствующий интерфейс для элемента списка и диалога. Создадим в папке Layout 2 файла: list_item.xml и dialog.xml. Файл dialog.xml будет содержать только один элемент – EditText для ввода нового значения записи таблицы базы данных, больше ничего не нужно. Его можно расположить по центру экрана с помощью ConstraintLayout. Пример

расположения элементов в `list_item.xml` с помощью того же `ConstraintLayout` приведён на рисунке 55.



Рисунок 54 – Пример интерфейса для приложения с БД

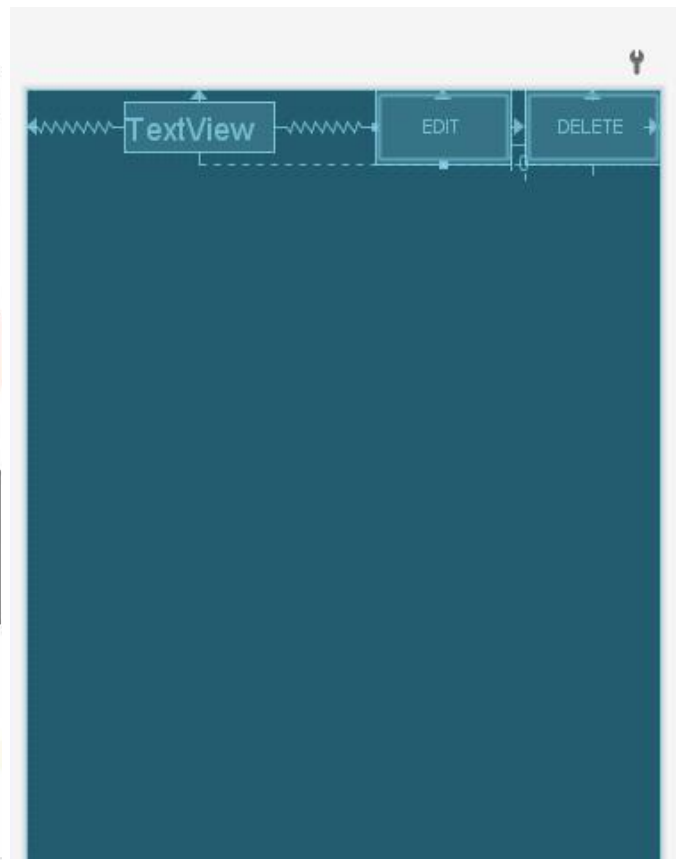


Рисунок 55 – Пример расположения элементов в `list_item.xml`

Далее в `MainActivity` создадим некоторые переменные, которые нам понадобятся, и напишем код для метода `onCreate`, в котором мы будем загружать данные из БД при загрузке приложения и добавлять новую запись в БД:

```

public class MainActivity extends ListActivity {
    Integer i;      String[]
    from;      int[] to;
    static ListView listView;

    @Override
    protected void onCreate(Bundle savedInstanceState) {
        super.onCreate(savedInstanceState);
        setContentView(R.layout.activity_main);          from = new
        String[]{"Name"};          to = new int[] {R.id.textView};
        Button btnadd = findViewById(R.id.buttonAdd);
        final EditText editadd =
        findViewById(R.id.editTextAddingARecord);
        SQLiteDatabase db =
        openOrCreateDatabase("DBName", MODE_PRIVATE, null);
        db.execSQL("CREATE TABLE IF NOT EXISTS MyTable5 (_id
        INTEGER PRIMARY KEY AUTOINCREMENT, Name VARCHAR);");
        Cursor cursor = db.rawQuery("SELECT * FROM Mytable5", null);
        i=cursor.getCount()+1;
        if (cursor.getCount()>0) {
            MyCursorAdapter scAdapter = new
            MyCursorAdapter(MainActivity.this, R.layout.list_item, cursor, from
            , to);
            listView = getListView();
            listView.setAdapter(scAdapter);
        }
        db.close();

        btnadd.setOnClickListener(new View.OnClickListener() {
            @Override
            public void onClick(View view) {
                //TODO
            }
        });
    }
}

```

Код метода onClick кнопки ADD будет следующим:

```

db.execSQL("INSERT INTO MyTable5 VALUES
('"+i+"', '"+editadd.getText().toString()+"');");
//i++;
Cursor cursor = db.rawQuery("SELECT * FROM Mytable5", null);
MyCursorAdapter scAdapter = new
MyCursorAdapter(MainActivity.this, R.layout.list_item, cursor, from
, to);

```

```

listView = getListView();
listView.setAdapter(scAdapter);
db.close();
Toast.makeText(getListView().getContext(), "a row added to the
table", Toast.LENGTH_LONG).show();

```

Однако, чтобы избежать метаморфоз с PRIMARY KEY при добавлении новой записи после удаления некоторых старых нужно написать дополнительный код в начале этого метода, чтобы найти подходящее значение для id очередной записи, которое удовлетворяло бы ограничению на уникальность. Иначе после удаления 2 записи при наличии 1 и 3 записи в таблице при попытке добавления очередной записи добавится запись с id=2, после чего при очередном добавлении записи приложение вылетит с ошибкой, т.к. запись с id=3 в таблице уже есть. Этот код выглядит следующим образом:

```

SQLiteDatabase db =
openOrCreateDatabase("DBName", MODE_PRIVATE, null);
Cursor cursor2 = db.rawQuery("SELECT * FROM Mytable5", null);
i=cursor2.getCount()+1;
//цикл для того, чтобы подбирать значения _id и не допускать
повторения одинаковых значений (primary key как-никак) for (int
k=1; k<=i; k++) {
    Cursor cursor3 = db.rawQuery("SELECT * FROM Mytable5 WHERE
_id="+k+"", null);
    if (cursor3.getCount()==0) {
i=k;
        break;
    }
}
}

```

Обратите внимание, что ListView в интерфейсе activity_main.xml необходимо присвоить id «@android:id/list». Сделать это можно в текстовом представлении, заменив в тэге ListView старую строку на следующую:

```

android:id="@android:id/list"

```


И, как Вы уже заметили, для того, чтобы приведённый выше код работал, нужно создать дополнительный класс MyCursorAdapter (чтобы не пихать весь код в MainActivity.java), занимающийся обработкой нажатий кнопок EDIT и DELETE в интерфейсе приложения для каждой отдельной записи:

```
public class MyCursorAdapter extends SimpleCursorAdapter {
    private int layout_;      private Cursor cursor;      String[]
    from;      int[] to;      ListView listView;
    EditText edit2;

    public MyCursorAdapter(Context context, int layout, Cursor c,
        String[] from, int[] to) {
        super(context, layout, c, from, to);
        layout_=layout;      cursor=c;
    }

    @Override
    public void bindView(View view, Context _context, Cursor cursor) {
        String data =
        cursor.getString(cursor.getColumnIndex("Name"));
        int id = cursor.getInt(cursor.getColumnIndex("_id"));
        TextView text =
        view.findViewById(R.id.textViewListItemText);
        text.setText(data);
        Button butdel = view.findViewById(R.id.buttonDelete);
        Button butedit = view.findViewById(R.id.buttonEdit);
        listView = MainActivity.listView;
        butdel.setOnClickListener(new View.OnClickListener() {
            @Override
            public void onClick(View view) {
                SQLiteDatabase db =
                _context.openOrCreateDatabase("DBName",MODE_PRIVATE,null);
                db.execSQL("DELETE FROM MyTable5 WHERE
                _id="+id+"");
                Cursor cursor = db.rawQuery("SELECT * FROM Mytable5",
                null);
                from = new String[]{"Name"};
                to =new int[] {R.id.textView};
                MyCursorAdapter scAdapter = new
                MyCursorAdapter(_context,R.layout.list_item,cursor,from,to);
                listView.setAdapter(scAdapter);      db.close();
                Toast.makeText(_context,"row deleted from the db
                id="+id,Toast.LENGTH_LONG).show();
            }
        });
    }
}
```

```

        }
    });
    butedit.setOnClickListener(new View.OnClickListener() {
        @Override
        public void onClick(View view) {
AlertDialog.Builder dialog = new AlertDialog.Builder(_context);
            dialog.setMessage("Enter new value:");
dialog.setTitle("Changing the item");
            LayoutInflater inflater = new
LayoutInflater(_context) {
@Override
                public LayoutInflater cloneInContext(Context
context) {
                    return null;
                }
            };
            View dialogview =
inflater.inflate(R.layout.dialog, null);
dialog.setView(dialogview);
            edit2 =
dialogview.findViewById(R.id.editTextCnahgeDBRecord);
edit2.setText(text.getText().toString());
dialog.setNeutralButton("OK", new
DialogInterface.OnClickListener() {
@Override
                public void onClick(DialogInterface dialog, int i)
{
                    SQLiteDatabase db =
_context.openOrCreateDatabase("DBName", MODE_PRIVATE, null);
db.execSQL("UPDATE MyTable5 SET Name='"+edit2.getText().toString()+"'
WHERE _id="+id+"");
                    Cursor cursor = db.rawQuery("SELECT * FROM
Mytable5", null);
                    from = new String[]{"Name"};
to =new int[] {R.id.textView};
MyCursorAdapter scAdapter = new
MyCursorAdapter(_context,R.layout.list_item,cursor,from,to);
listView.setAdapter(scAdapter);
db.close();
                    Toast.makeText(_context,"row edited from the
db row id="+id,Toast.LENGTH_LONG).show();
dialog.dismiss();
                }
            });
            dialog.setIcon(R.mipmap.ic_launcher_round);
AlertDialog alertDialog = dialog.create();
alertDialog.show();
        }
    });
}

```

```

    }

    @Override
    public View onCreateView(Context context, Cursor cursor,
        ViewGroup parent) {
        LayoutInflater inflater = (LayoutInflater)
            context.getSystemService(context.LAYOUT_INFLATER_SERVICE);
        View view = inflater.inflate(layout_, parent, false);
        return view;
    }
}

```

Возможно, возникнет проблема с методом `cursor.getColumnIndex` - его можно заменить по совету Android Studio на метод `cursor.getColumnIndexOrThrow`.

Также можно всё – и Shared Preferences, и базу данных сделать в одном приложении, поменяв `extends ListActivity` в классе `MainActivity.java` обратно на `AppCompatActivity` и подумав, как исправить ошибки.

Чтобы при вводе с клавиатуры она не перемещала кнопки и всё остальное вверх при своём появлении внизу экрана, можно указать параметр

```
android:windowSoftInputMode="adjustPan"
```

в файле манифеста в тэге главной активити нашего приложения.

И всё - приложение, работающее с базой данных и включающее основные операции SQL завершено. Единственное, что нужно помнить – это приложение не идеально; все операции с записями хорошо бы перенести в отдельный класс (как и `SELECT`, и `INSERT`), причём – в отдельные методы этого класса, называющиеся соответствующим образом; затем – интерфейс, конечно же, нужно загружать в

отдельном асинхронном потоке, т.к. – представьте, что у Вас в таблице 1000 строк, а не 10-15; что тогда будет с работой приложения?

Лабораторная работа №16. Облачное мобильное приложение

Задание: Создать простейшее облачное мобильное приложение, используя Firebase и Android Studio.

Для выполнения этого задания можно выбрать любой облачный сервис, будь то push-уведомления, база данных реального времени, аналитика мобильного приложения (не в Google Play, а с помощью сторонних средств, например, Flurry, MixPanel, Crashlytics и т.д.), облачное хранилище, использование облачных сервисов, связанных с тестированием, распознаванием изображений и т.д. Рассмотрим один из простых примеров – создание push-уведомлений с помощью Firebase.

Первое, что нужно сделать – это создать новый проект в консоли Firebase (<https://console.firebase.google.com/>). Добавить проект – назовите както проект, выберите местоположение и нажмите на чекбокс "Я принимаю", а затем – на кнопку Создать проект, см. рисунок 46. Затем нажмите на Продолжить.

Добавить проект

Название проекта

Введите название

+ iOS + </>

Подсказка. В проекты входят приложения для разных платформ. ?

Идентификатор проекта ?

my-awesome-project-id

Местоположения ?

Соединенные Штаты (Analytics)

nam5 (us-central) (Cloud Firestore) 

☒ Применить в Firebase установленные по умолчанию настройки использования данных Google Analytics

✓ Открыть доступ к данным Analytics всем функциям Firebase

✓ Разрешить Google использовать ваши данные Analytics для усовершенствования продуктов и сервисов

✓ Разрешить Google использовать ваши данные Analytics для предоставления технической поддержки

✓ Разрешить Google использовать ваши данные Analytics для сравнения

✓ Разрешить доступ к вашим данным Analytics специалистам Google по работе с аккаунтами

☐ Я принимаю [Условия защиты данных при взаимодействии между контролерами](#). Требуется, чтобы разрешить Google использовать ваши данные Analytics для усовершенствования продуктов и сервисов. [Подробнее...](#)

Отмена

Создать проект

Рисунок 46 – Создание проекта в Firebase

Откроется окно управления проектом, в котором нам нужно нажать на кнопку с иконкой ОС Android над надписью Добавьте приложение. После этого нам потребуется ввести название пакета, поэтому перейдём в Android Studio и создадим

новый проект с Empty Activity. Добавим в проект опциональное меню с пунктом вызова окна О программе, как обычно. Затем перейдём в файл манифеста и скопируем значение переменной package, которое вставим в окно Firebase в строку Название пакета Android. Дополнительно можно заполнить поля псевдонима и хэша сертификата, но это необязательно. Нажмём на кнопку Зарегистрировать приложение.

Далее скачаем файл конфигурации google-services.json и поместим его в корень нашего проекта. Для этого переключим вид в Project Explorer (слева вверху) с Android на Project, щёлкнем правой кнопкой мыши по папке app и нажмём Paste, и в открывшемся окне – ОК. В режиме Project мы увидим файл json, а в режиме Android его не видно. Затем переключитесь обратно в режим Android.

В окне Firebase браузера нажмём Далее.

Теперь надо изменить файлы gradle. Следуйте инструкциям в окне браузера, так как там может быть более новая версия, чем здесь. Итак, в файл build.gradle уровня проекта (Project: название) в dependencies надо добавить строку

```
classpath 'com.google.gms:google-services:4.0.1'
```

В файл build.gradle уровня приложения (Module: app) добавьте следующее в секцию dependencies:

```
implementation 'com.google.firebase:firebase-core:16.0.1' implementation  
'com.google.firebase:firebase-messaging:17.4.0'
```

и в самый конце этого файла:

```
apply plugin: 'com.google.gms.google-services'
```

После этого синхронизируйте проект (Sync Now). В окне браузера нажмите кнопку Далее. После этого обязательно запустите приложение! При этом эмулятор или реальное устройство должны быть подключены к интернету. Если всё в порядке, в окне проверки связи с приложением браузера будет выведена соответствующая зелёная надпись (Поздравляем! Вы добавили сервис Firebase в свое приложение). Если связи с приложением нет, повторите предыдущие шаги.

Теперь удалим TextView "Hello World!", добавим в интерфейс на его место кнопку, и напишем внутри обработчика нажатия на неё следующий код:

```
String tkn = FirebaseInstanceId.getInstance().getToken();
Toast.makeText(MainActivity.this, "Current token ["+tkn+"]",
    Toast.LENGTH_LONG).show();
Log.d("App", "Token ["+tkn+"]");
```

Добавим в папку с MainActivity.java следующий класс в отдельном java-файле FireIDService.java:

```
public class FireIDService extends FirebaseInstanceIdService {
    @Override
    public void onTokenRefresh() {
        String tkn =
FirebaseInstanceId.getInstance().getToken();
        Log.d("Not", "Token ["+tkn+"]");
    }
}
```

А затем добавим следующий класс, отвечающий за сервис, обрабатывающий входящее push-уведомление:

```
public class FireMsgService extends FirebaseMessagingService {

    @Override
    public void onMessageReceived(RemoteMessage remoteMessage) {
super.onMessageReceived(remoteMessage);
```



```

        Log.d("Msg", "Message received [" + remoteMessage + "]);

        // Create Notification
        Intent intent = new Intent(this, MainActivity.class);
        intent.addFlags(Intent.FLAG_ACTIVITY_CLEAR_TOP);
        PendingIntent pendingIntent = PendingIntent.getActivity(this,
1410,
            intent, PendingIntent.FLAG_ONE_SHOT);

        NotificationCompat.Builder notificationBuilder = new
NotificationCompat.Builder(this)

        .setSmallIcon(R.drawable.common_full_open_on_phone)
            .setContentTitle("Message")

        .setContentText(remoteMessage.getNotification().getBody())
            .setAutoCancel(true)
            .setContentIntent(pendingIntent);
        NotificationManager notificationManager =
            (NotificationManager)
getSystemService(Context.NOTIFICATION_SERVICE);

        notificationManager.notify(1410, notificationBuilder.build());
    }
}

```

И последнее, что нужно сделать – добавить в файл манифеста соответствующий сервис внутри тэга application:

```

<service android:name=".FireIDService" <intent-filter>
<action android:name="com.google.firebase.INSTANCE_ID_EVENT"/>
    </intent-filter>
</service>

```

Теперь постройте арк-файл и установите приложение на эмуляторе или на реальном устройстве. После этого нажмите в браузере на кнопку Открыть консоль, нажмите на название своего проекта и выберите кнопку настроек справа от названия. Откроется окно настроек проекта, в котором на закладке

Cloud Messaging можно увидеть ключ сервера для аутентификации. Зная этот ключ, можно посылать сообщения внутри приложения, с помощью другого приложения и с помощью самой консоли Firebase, при этом планируя их на определённое время, например, и для определённой аудитории.

Чтобы отправить сообщение, перейдите в категорию Grow -> Cloud Messaging и нажмите на кнопку Send your first message. Заполните поля (текст сообщения), нажмите кнопку Далее. Выберите приложение на следующем шаге (Аудитория) – при этом Вы можете выбирать сегмент пользователей – либо все пользователи, у которых установлено приложение, либо конкретного пользователя, либо – пользователей, подписанных на определённую тему. Нажмите кнопку Далее. В секции Планирование можно настроить расписание, когда пользователи получат сообщение, либо просто оставить Now для немедленной отправки сообщения. Нажмите Далее. В следующей секции можно задавать события-конверсии, чтобы понимать, откуда приходят пользователи – это больше связано с аналитикой приложения. Если перейти с помощью кнопки Далее к следующей секции, можно настроить дополнительные параметры, например – ключ конкретного пользователя, который получит уведомление. Для завершения нажмите кнопку Проверить. Вы увидите подтверждающее окно с уведомлением, в котором надо нажать кнопку опубликовать (рис. 47).

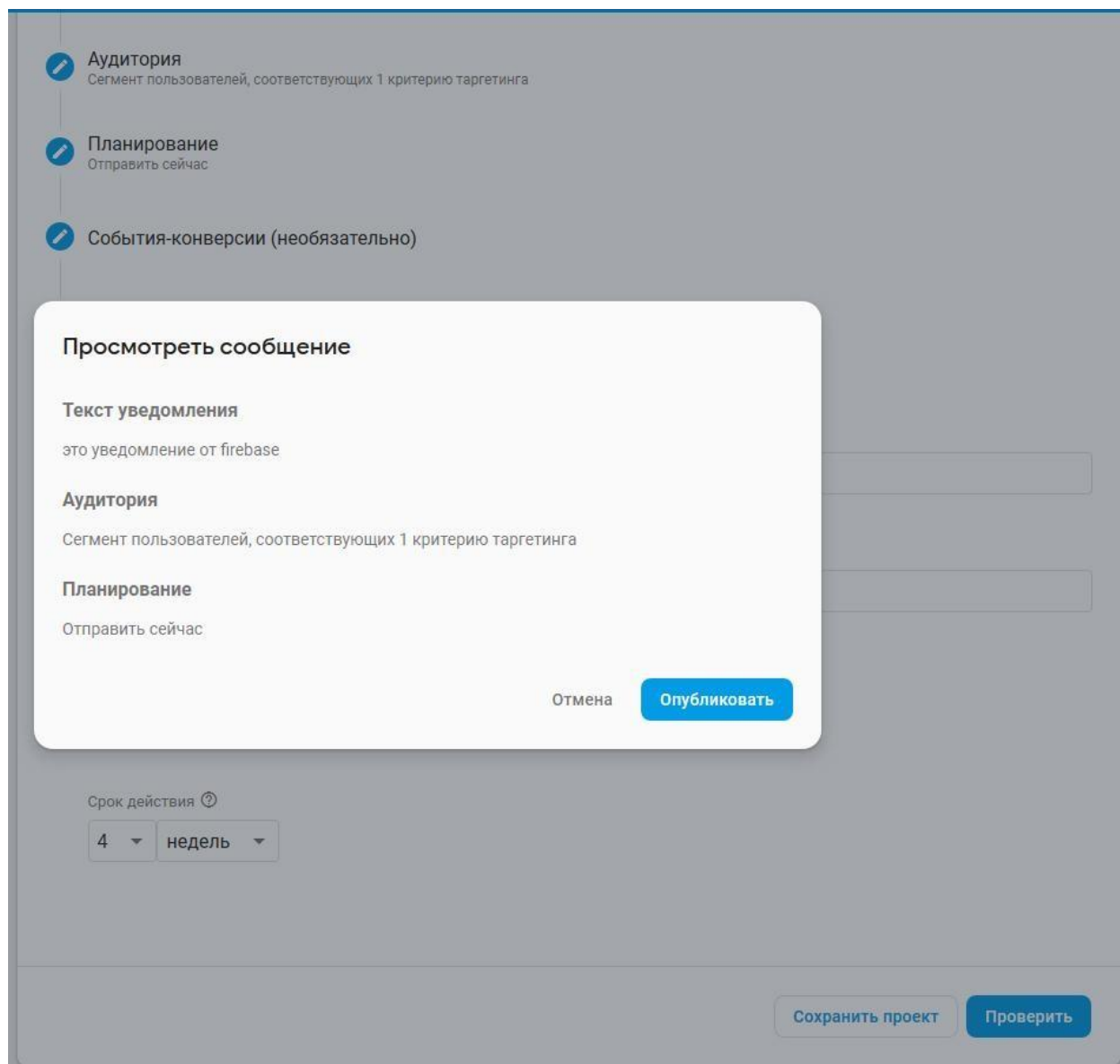
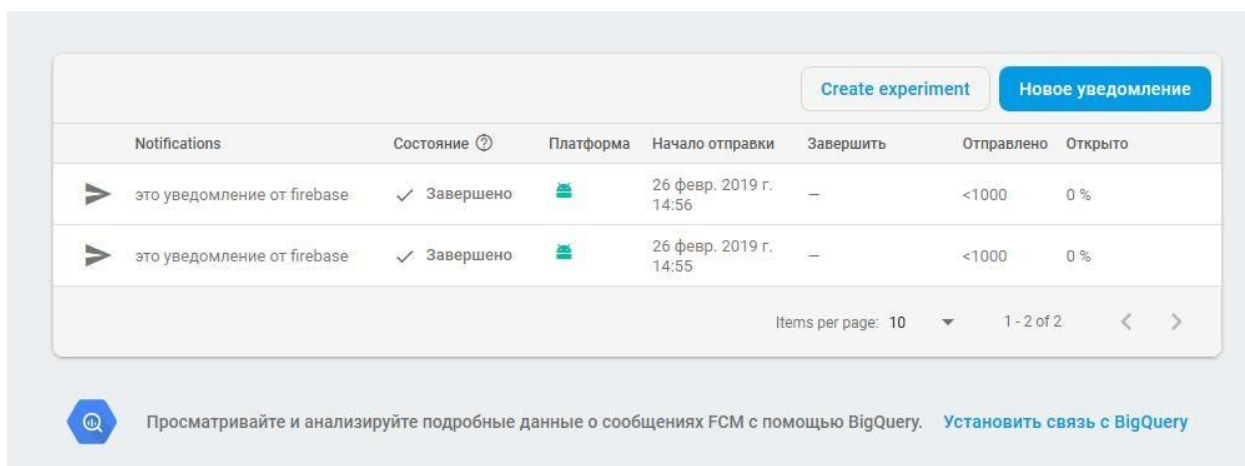


Рисунок 47 – Публикация push-уведомления с помощью Firebase

После нажатия на кнопку Опубликовать, даже если у Вас приложение не запущено на мобильном устройстве, появится уведомление с небольшой картинкой и стандартным звуком уведомления для Вашего устройства. В панели уведомлений Вы увидите тему уведомления и текст. При нажатии на уведомление запустится Ваше приложение. При выключенном интернете Вы увидите уведомление сразу, как только подключитесь к интернету. При этом консоль Firebase переключится на страницу с уведомлениями, где

отобразится созданное уведомление с указанием некоторых подробностей, и где можно будет его продублировать, создать новое и создать эксперимент с определённой целевой аудиторией (рис. 48).



Notifications						
Notifications	Состояние ?	Платформа	Начало отправки	Завершить	Отправлено	Открыто
▶ это уведомление от firebase	✓ Завершено		26 февр. 2019 г. 14:56	—	<1000	0 %
▶ это уведомление от firebase	✓ Завершено		26 февр. 2019 г. 14:55	—	<1000	0 %

Items per page: 10 1 - 2 of 2 < >

 Просматривайте и анализируйте подробные данные о сообщениях FCM с помощью BigQuery. [Установить связь с BigQuery](#)

Рисунок 48 – Результат публикации push-уведомления

Можно написать приложение, в котором будут 2 кнопки: одна будет подписываться на уведомления, а другая – формировать и присылать уведомление. Можно написать 2 приложения – одно отправляет уведомления, другое принимает. А можно использовать какой-то другой механизм работы с облаком, например, выводить в приложение аналитику по его крашам у пользователей с помощью Firebase.

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ
ПО МДК 11.01 ТЕХНОЛОГИЯ РАЗРАБОТКИ И ЗАЩИТЫ БАЗ
ДАННЫХ**

**для специальности: 09.02.07 «Информационные системы и
программирование»**

**Ставрополь
2025**

Критерии оценивания практических умений:

«Отлично» - ставится, если студент:

- а) уверенно и правильно выполняет манипуляцию в точном соответствии с алгоритмом;
- б) обнаруживает полное понимание целей выполняемой манипуляции, может обосновать свои действия, пользуясь профессиональной терминологией, правильно отвечает на дополнительные вопросы;
- в) свободно владеет речью (демонстрирует связность и последовательность в изложении);
- г) демонстрирует умение действовать в стандартных и нестандартных профессиональных ситуациях.

«Хорошо» - ставится, если студент обнаруживает практические умения, удовлетворяющие тем же требованиям, что и для отметки «отлично», но допускает единичные негрубые ошибки, которые сам же исправляет после замечания преподавателя.

«Удовлетворительно» - ставится, если студент обнаруживает практические умения, но:

- а) допускает неточности при выполнении алгоритма, не приводящие к негативным последствиям, затрудняется обосновать свои действия, затрудняется при ответе на дополнительные вопросы;
- б) излагает материал недостаточно связно и последовательно с частыми заминками и перерывами;
- в) испытывает затруднения в действиях при нестандартных профессиональных ситуациях.

«Неудовлетворительно» - ставится, если студент допускает грубые нарушения алгоритма действий и ошибки, влекущие за собой возникновение последствий, отсутствие умения действовать в стандартных профессиональных ситуациях.

Оглавление

Практическая работа № 1.....	6
1. Цель работы.....	6
2. Теоретическая часть	6
3. Практическая часть	7
4. Задание.....	17
Практическая работа № 2.....	18
1. Цель работы.....	18
2. Теоретическая часть	18
3. Практическая часть	19
4. Задание.....	22
Практическая работа № 3.....	24
1. Цель работы.....	24
2. Теоретическая часть	24
3. Практическая часть	25
4. Задание.....	30
Практическая работа № 4.....	31
1. Цель работы.....	31
2. Теоретическая часть	31
3. Практическая часть	36
4. Задание.....	41
Практическая работа № 5.....	42
1. Цель работы.....	42
2. Теоретическая часть	42
3. Практическая часть	43
4. Задание.....	48
Практическая работа № 6.....	49
1. Цель работы.....	49
2. Теоретическая часть	49
3. Практическая часть	50
4. Задание.....	57
Практическая работа № 7.....	58
1. Цель работы.....	58
2. Теоретическая часть	58
3. Практическая часть	59
4. Задание.....	63

Практическая работа № 8.....	64
1. <i>Цель работы</i>	64
2. <i>Теоретическая часть</i>	64
3. <i>Практическая часть</i>	65
4. <i>Задание</i>	72
Практическая работа № 9.....	74
1. <i>Цель работы</i>	74
2. <i>Теоретическая часть</i>	74
3. <i>Практическая часть</i>	75
4. <i>Задание</i>	77
Практическая работа № 10.....	78
1. <i>Цель работы</i>	78
2. <i>Теоретическая часть</i>	78
3. <i>Практическая часть</i>	80
4. <i>Задание</i>	82
Практическая работа № 11.....	83
1. <i>Цель работы</i>	83
2. <i>Теоретическая часть</i>	83
3. <i>Практическая часть</i>	85
4. <i>Задание</i>	90
Практическая работа № 12.....	91
1. <i>Цель работы</i>	91
2. <i>Теоретическая часть</i>	91
3. <i>Практическая часть</i>	93
4. <i>Задание</i>	100
Практическая работа № 13.....	101
1. <i>Цель работы</i>	101
2. <i>Теоретическая часть</i>	101
3. <i>Практическая часть</i>	102
4. <i>Задание</i>	107
Практическая работа № 14.....	109
1. <i>Цель работы</i>	109
2. <i>Теоретическая часть</i>	109
3. <i>Практическая часть</i>	110
4. <i>Задание</i>	113

Практическая работа № 15.....	114
1. Цель работы.....	114
2. Теоретическая часть	114
3. Практическая часть	115
4. Задание.....	121
Практическая работа № 16.....	122
1. Цель работы.....	122
2. Теоретическая часть	122
3. Практическая часть	125
4. Задание.....	129
Практическая работа № 17.....	130
1. Цель работы.....	130
2. Теоретическая часть	130
3. Практическая часть	132
4. Задание.....	136
Практическая работа № 18.....	138
1. Цель работы.....	138
2. Теоретическая часть	138
3. Практическая часть	140
4. Задание.....	143
Практическая работа № 19.....	145
1. Цель работы.....	145
2. Теоретическая часть	145
3. Практическая часть	146
4. Задание.....	148
Практическая работа № 20.....	149
1. Цель работы.....	149
2. Теоретическая часть	149
3. Практическая часть	150
4. Задание.....	151
Практическая работа.....	155
Библиографический список	158

Практическая работа № 1

Знакомства с MS SQL Server

1. Цель работы

Изучить интерфейс среды управления SQL Server Management Studio.

2. Теоретическая часть

Всякая профессиональная деятельность так или иначе связана с информацией, с организацией ее сбора, хранения, выборки. Можно сказать, что неотъемлемой частью повседневной жизни стали базы данных, для поддержки которых требуется некоторый организационный метод, или механизм. Такой механизм называется системой управления базами данных (СУБД).

База данных (БД) – совместно используемый набор логически связанных данных (и их описание), предназначенный для удовлетворения информационных потребностей организации.

СУБД (система управления базами данных) – программное обеспечение, с помощью которого пользователи могут определять, создавать и поддерживать базу данных, а также получать к ней контролируемый доступ. Системы управления базами данных существуют уже много лет, многие из них обязаны своим происхождением системам с неструктурированными файлами на больших ЭВМ. Наряду с общепринятыми современными технологиями в области систем управления базами данных начинают появляться новые направления, что обусловлено требованиями растущего бизнеса, все увеличивающимися объемами корпоративных данных и, конечно же, влиянием технологий Internet.

Microsoft SQL Server является одной из наиболее популярных систем управления базами данных в мире. Данная СУБД подходит для самых различных проектов: от небольших приложений до больших высоконагруженных проектов. SQL Server был создан компанией Microsoft. Первая версия вышла в 1987 году. SQL Server долгое время был исключительно системой управления базами данных для Windows, однако начиная с версии 16 эта система доступна и на Linux (и на Mac, с помощью Docker).

Центральным аспектом в MS SQL Server, как и в любой СУБД, является база данных. База данных представляет хранилище данных, организованных определенным способом. Нередко физически база данных представляет файл на жестком диске, хотя такое соответствие необязательно. Для хранения и администрирования баз данных применяются системы управления базами данных (database management system) или СУБД (DBMS). И как раз MS SQL Server является одной из такой СУБД.

Для организации баз данных MS SQL Server использует реляционную модель. Эта модель баз данных была разработана еще в 1970 году Эдгаром Коддом. А на сегодняшний день она фактически является стандартом для организации баз данных. Реляционная модель предполагает хранение данных в виде таблиц, каждая из которых состоит из строк и столбцов. Каждая строка хранит отдельный объект, а в столбцах размещаются атрибуты этого объекта.

Для взаимодействия с базой данных применяется язык SQL (Structured Query Language). Клиент (например, внешняя программа) отправляет запрос на языке SQL посредством специального API. СУБД должным образом интерпретирует и выполняет запрос, а затем посылает клиенту результат выполнения.

Язык SQL был разработан в компании IBM для системы баз данных, которая называлась System/R. При этом сам язык назывался SEQUEL, расшифровывалась как Structured English QUery Language – «структурированный английский язык запросов». Хотя в итоге ни база данных, ни сам язык не были впоследствии официально опубликованы, по традиции сам термин SQL нередко произносят как "сиквел".

В 1989 году Американский Национальный Институт Стандартов (ANSI) кодифицировал язык и опубликовал его первый стандарт. После этого стандарт периодически обновлялся и дополнялся. Последнее его обновление состоялось в 2016 году (SQL:2016). Но несмотря на наличие стандарта нередко производители СУБД используют свои собственные реализации языка SQL, которые немного отличаются друг от друга. Практически в каждой СУБД применяется свой процедурный язык, в частности, в Oracle Database используется PL/SQL (поддерживается также в DB2 и Timesten), в Interbase и Firebird – PSQL, в DB2 – SQL PL, в Microsoft SQL Server и Adaptive Server Enterprise – Transact-SQL, в PostgreSQL – PL/pgSQL. В рамках текущей книги будет рассматриваться T-SQL.

Подмножества языка SQL:

DDL (Data Definition Language / Язык определения данных). К этому типу относятся различные команды, которые создают базу данных, таблицы, индексы, хранимые процедуры и т.д.

DML (Data Manipulation Language / Язык манипуляции данными). К этому типу относят команды на выбор данных, их обновление, добавление, удаление – в общем все те команды, с помощью которых можно управлять данными.

DCL (Data Control Language / Язык управления доступа к данным). К этому типу относят команды, которые управляют правами доступа к данным.

3. Практическая часть

3.1. Установка SQL Server Developer Edition

SQL Server Developer – обладающий полным набором функций бесплатный выпуск, лицензируемый, для использования в качестве базы данных, для разработки и тестирования, и не предназначенный для применения в рабочей среде.

Для установки SQL Server с сайта <https://www.microsoft.com/ru-ru/sql-server/sql-server-downloads> выберите Developer Edition и нажмите кнопку «Скачать». После скачивания автоматически запускается установщик. Выберите тип установки – «Базовая» (рис. 1):

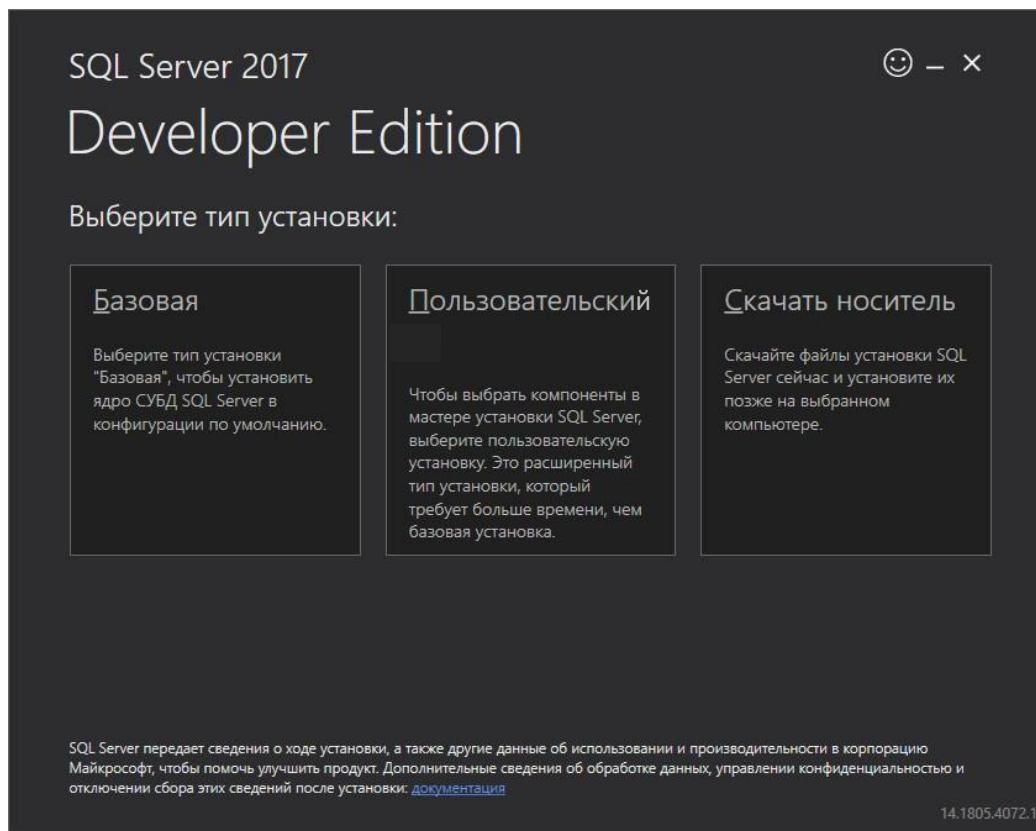


Рис. 1. Выбор тип установки

После принятия условия соглашения, укажите целевое расположение SQL Server.

3.2. Установка SQL Server Management Studio

SQL Server Management Studio (SSMS) – это интегрированная среда для управления любой инфраструктурой SQL, от SQL Server до баз данных SQL Azure. SSMS предоставляет средства для настройки, наблюдения и администрирования экземпляров SQL Server и баз данных. С помощью SSMS можно развертывать, отслеживать и обновлять компоненты уровня данных, используемые вашими приложениями, а также создавать запросы и скрипты.

Скачайте SQL Server Management Studio (SSMS) с сайта: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/sql/ssms/download-sql-server-management-studio-ssms?view=sql-server-ver15>

3.3. Открытие среды SQL Server Management Studio

- Запускайте SQL Server Management Studio.
- В диалоговом окне **Соединение с сервером** подтвердите заданные по умолчанию параметры и нажмите кнопку **Подключиться**. Для соединения необходимо, чтобы поле Имя

сервера содержало имя компьютера, на котором установлен SQL Server. Если компонент Database Engine представляет собой именованный экземпляр, то поле «Имя сервера» должно также содержать имя экземпляра в формате <имя_компьютера> \<имя_экземпляра>.

- Выбрать имя сервера (в данном случае это REM-DESKTOP).

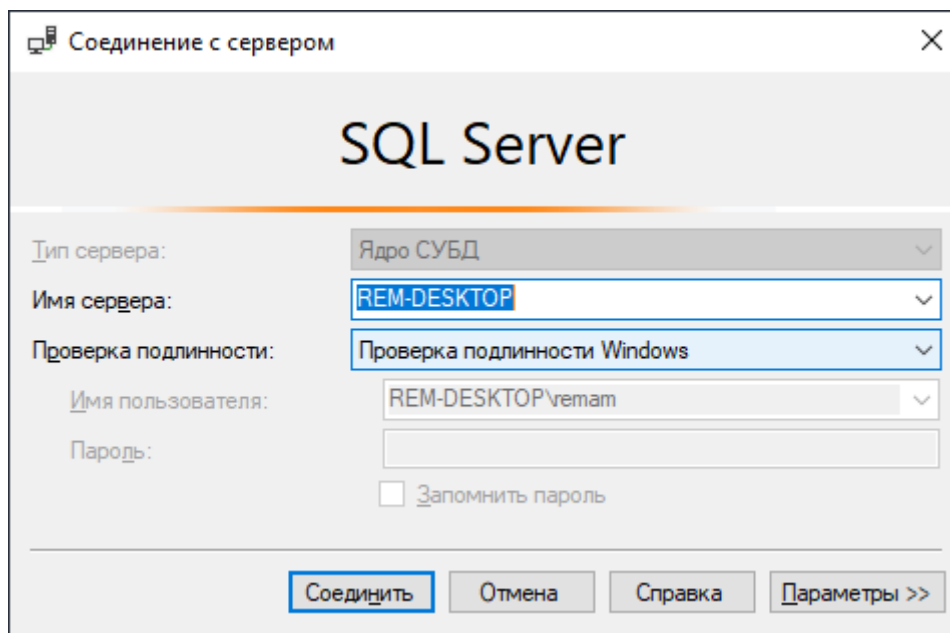


Рис. 2. Соединение с SQL Server

MS SQL Server использует два режима аутентификации: аутентификацию Windows и аутентификацию MS SQL Server (SQL Server authentication). Для аутентификации по умолчанию используется аутентификация Windows. Windows Authentication mode (Проверка подлинности Windows) – это режим, который использует для подключения к серверу только логины Windows (рис. 2). В этом случае пользователям нет необходимости вводить какие-то пароли при подключении к SQL Server, если они уже вошли в сеть Windows.

Для использования аутентификации SQL Server вначале необходимо создать учетную запись в самом SQL Server. В отличие от логинов Windows, логины SQL Server – это самостоятельные учетные записи со своими именами и паролями, информация о которых хранится в системной базе данных SQL Server. При подключении к серверу при помощи логина SQL Server вам придется указать имя логина и пароль.

3.4. Создание учетной записи

Создайте новую учетную запись с именем STUDENT. В Management Studio список учетных записей, сконфигурированных на сервере, содержится в папке «**Безопасность\Имена для входа**». Чтобы добавить новую учетную запись, необходимо выделить узел «**Имена для входа**» в контекстном меню и выбрать пункт «**Создать имя для входа...**».

В открывшемся окне (рис. 3) в поле «Имя для входа» введите *STUDENT*. Далее выберите переключатель «Проверка подлинности SQL Server» и в поле «Пароль» наберите пароль. Снимите флажок «Пользователь должен сменить пароль при следующем входе». Остальные поля оставьте без изменений.

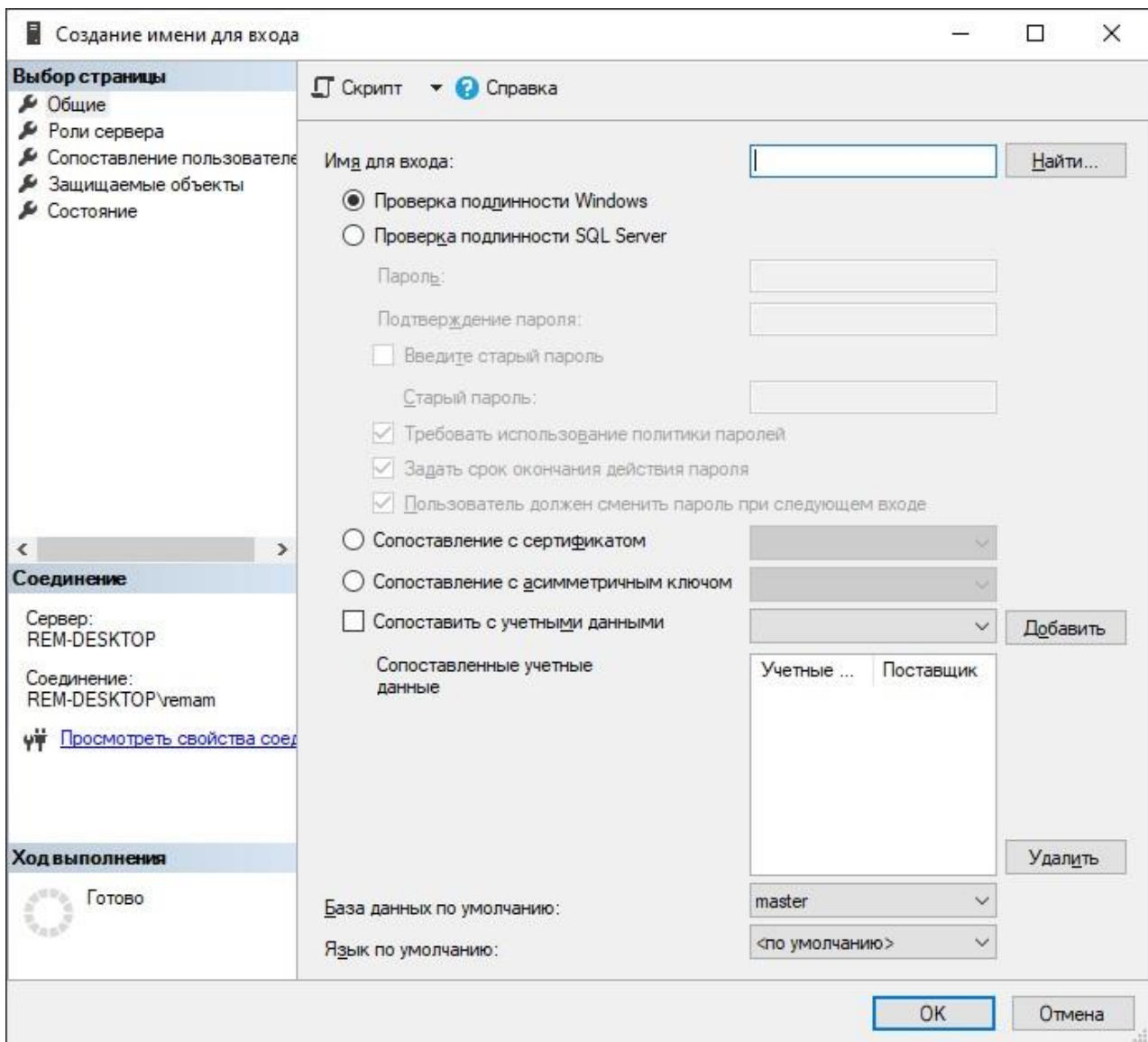


Рис. 3. Создание новой учетной записи

3.5. Создание базы данных

Базу данных может создать только пользователь с правами администратора. Выберите в контекстном меню папки «Базы данных» команду «Создать базу данных...» (рис. 4).

В поле «Имя базы данных» введите имя создаваемой базы данных (БД) – «Учебная» (рис. 5). Здесь также можно изменить путь сохранения созданной БД. *Обратите внимание, что создаётся пустая база данных (контейнер).*

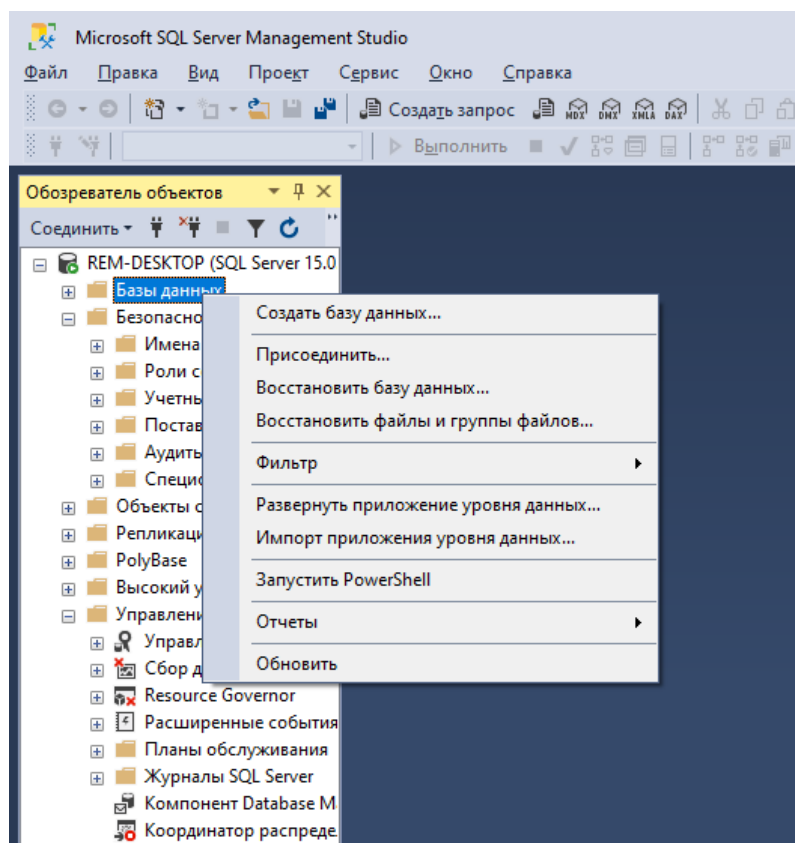


Рис. 4. Пункт контекстного меню «Создать базу данных...»

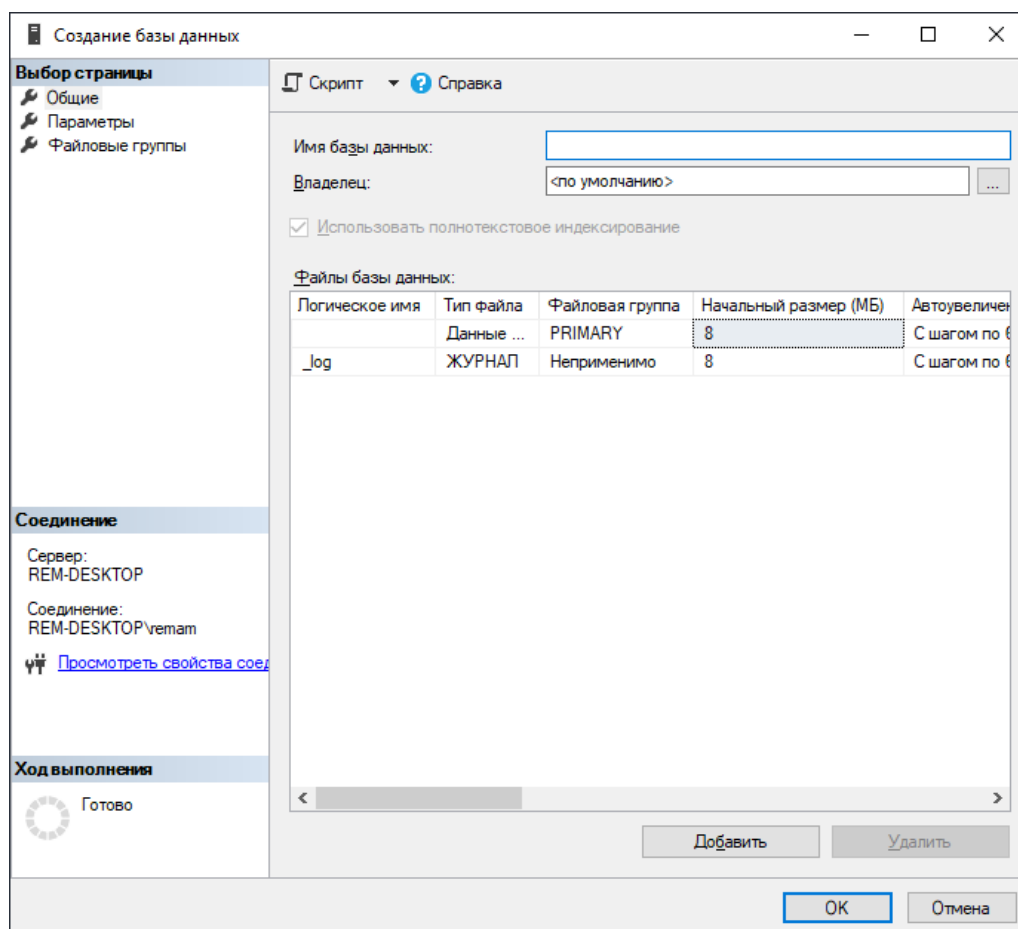


Рис. 5. Создание новой базы данных

После создания БД окно «Обозреватель объектов» обновится. В ветке «Базы данных» появится новая база данных «Учебная». Эта база данных принадлежит пользователю по имени **sysadmin** (системный администратор).

3.6. Создание нового пользователя

Создание пользователя в SQL Server осуществляется посредством создания учетной записи. Пользователи БД – это специальные объекты, которые создаются на уровне базы данных и используются для предоставления разрешений в базе данных (на таблицы, представления, хранимые процедуры). Логины и пользователи БД – это совершенно разные объекты.

Чтобы добавить в базу данных «Учебная» нового пользователя, надо:

1. выделить узел «\Базы данных\Учебная\Безопасность\Пользователи» и в контекстном меню выбрать пункт «Создать пользователя...» (рис. 6).

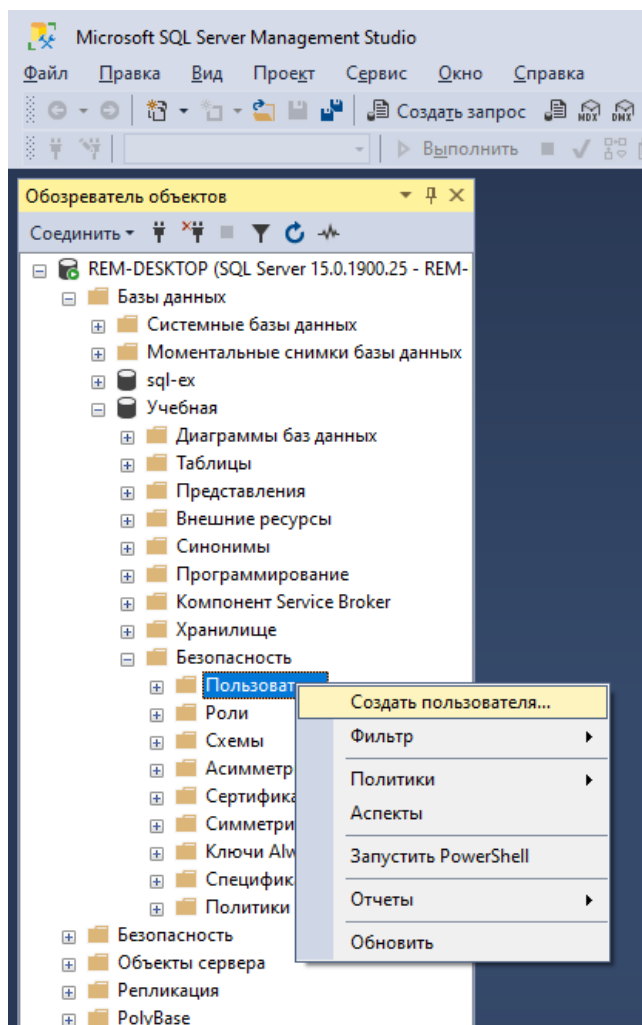


Рис. 6. Пункт контекстного меню «Создать пользователя...»

2. В открывшемся окне в поля «Имя пользователя» и «Имя для входа» ввести имя – *Student*.

3. На странице «Собственные схемы» в списке «Схемы, принадлежащие данному пользователю:» установить флажок **db_owner**→ОК (рис. 7).

Таким образом, на основе учетной записи *Student* будет **создан новый пользователь** для БД «Учебная» с правами владельца этой базы данных.

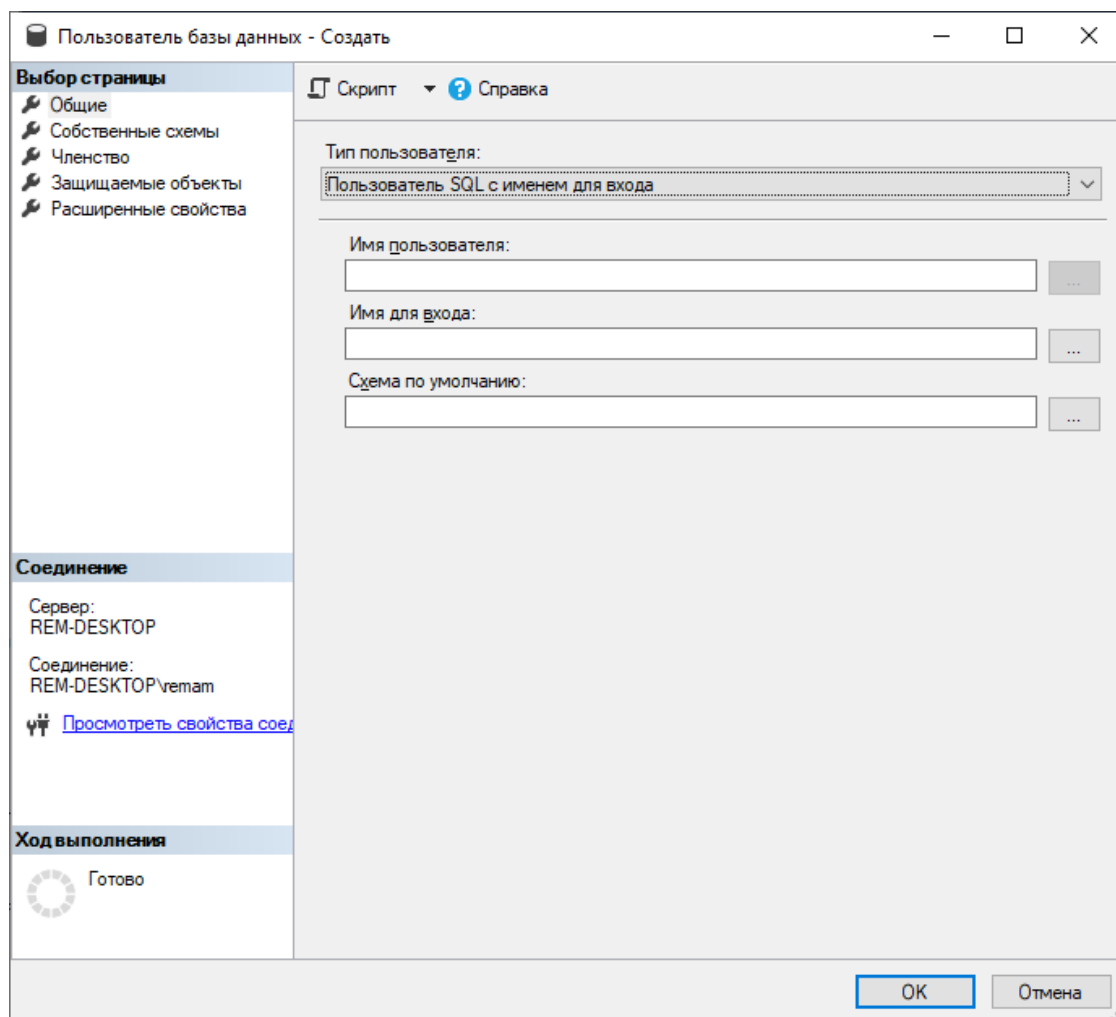


Рис. 7. Добавление в БД нового пользователя

3.7. Создание и заполнение таблиц

В «Обозревателе объектов» выберите базу данных «Учебная». На строке инструментов нажмите «Создать запрос» или используйте горячие клавиши <Ctrl>+<N> (рис. 8).

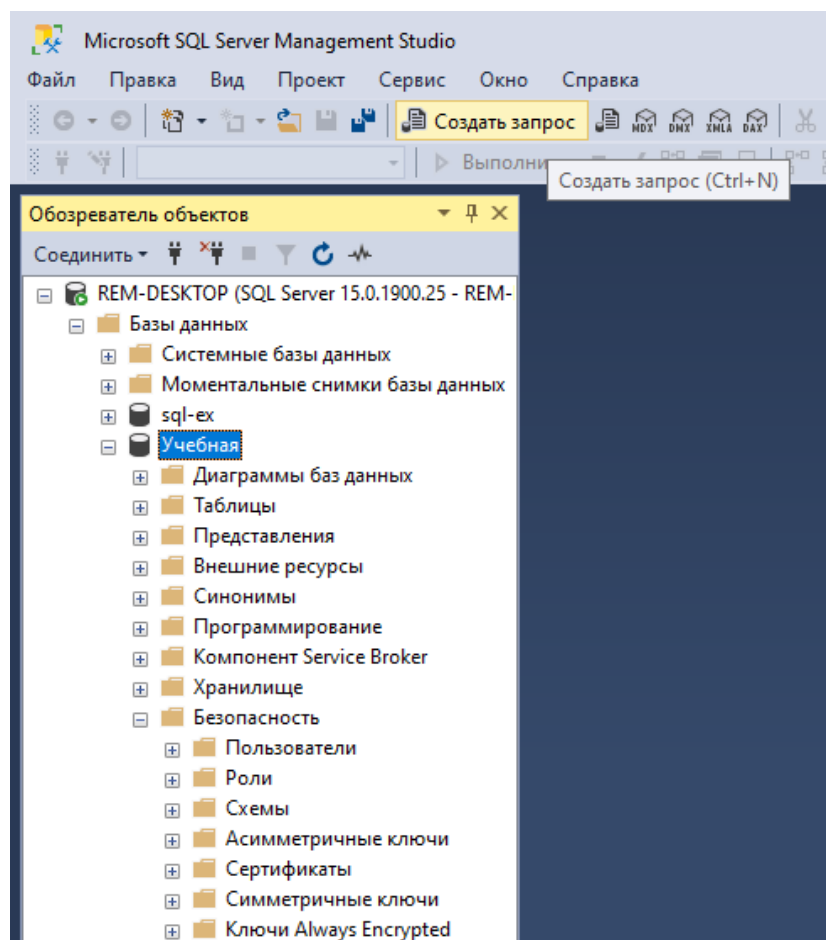


Рис. 8. Выбор БД «Учебная»

На открывшем окне редактора наберите код из приложения.

На строке инструментов нажмите «Выполнить» или используйте горячую клавишу <F5> для выполнения команд.

3.8. Резервное копирование БД

Сведения, хранящиеся в базах данных, являются стратегической ценностью любой компании, поэтому их сохранность очень важна.

1. Выберем в контекстном меню базы данных «Учебная» пункт «Задачи» → «Создать резервную копию» (рис. 9).

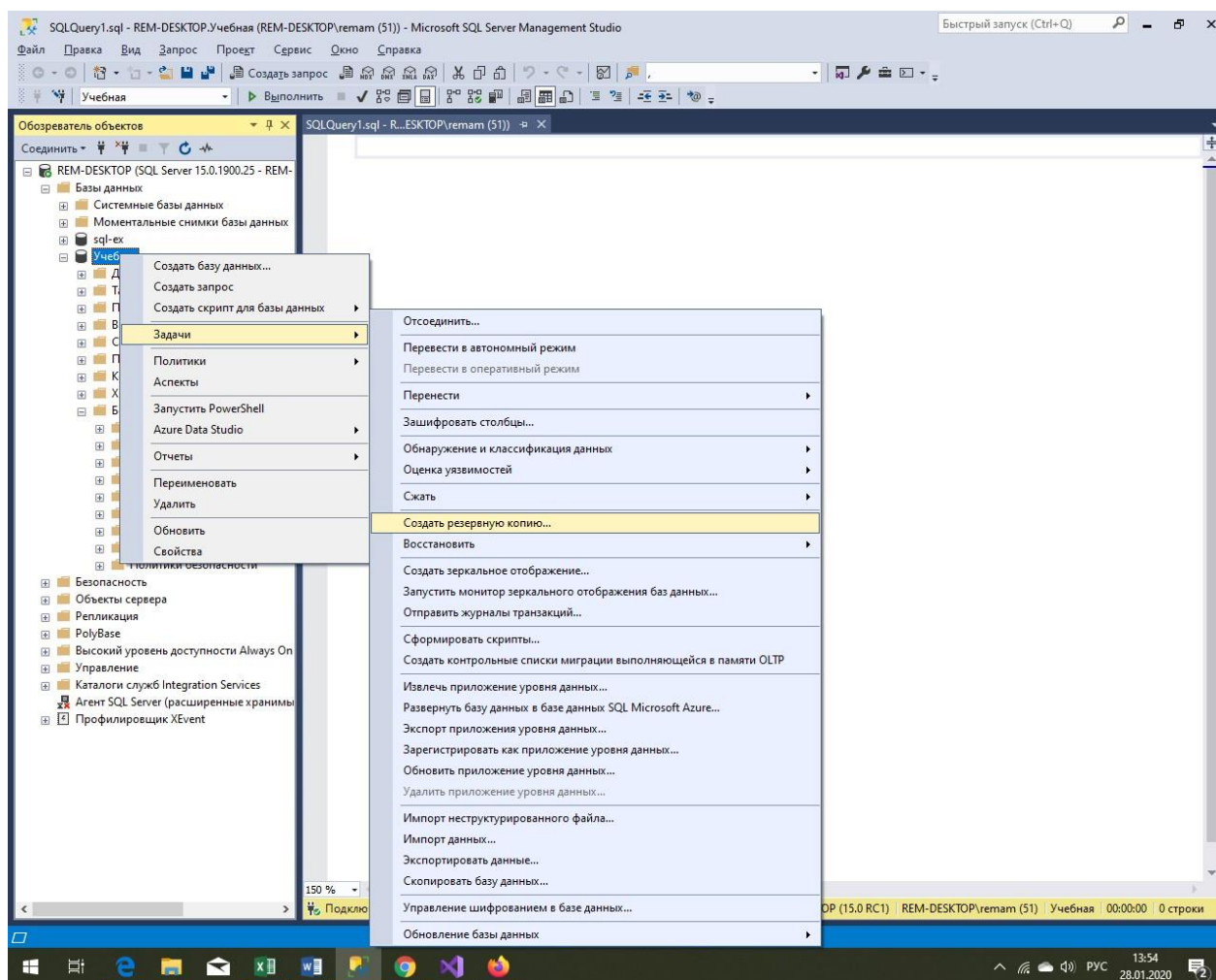


Рис. 9. Пункт контекстного меню «Создать резервное копию...»

2. В открывшемся диалоге «Резервное копирование базы данных – Учебная» (рис. 10) установите некоторые параметры:

- База данных – *Учебная* (это база данных для резервного копирования);
- Тип архивной копии – *Полная* (тип резервной копии – полный; для первого резервного копирования применяется только такой; если резервная копия уже имеется, и вы желаете не создавать заново полную копию, а внести изменения в старую, выберите *Разностная*);
- Компонент архивной копии – *База данных*;
- Архивировать в: – *Диск*.

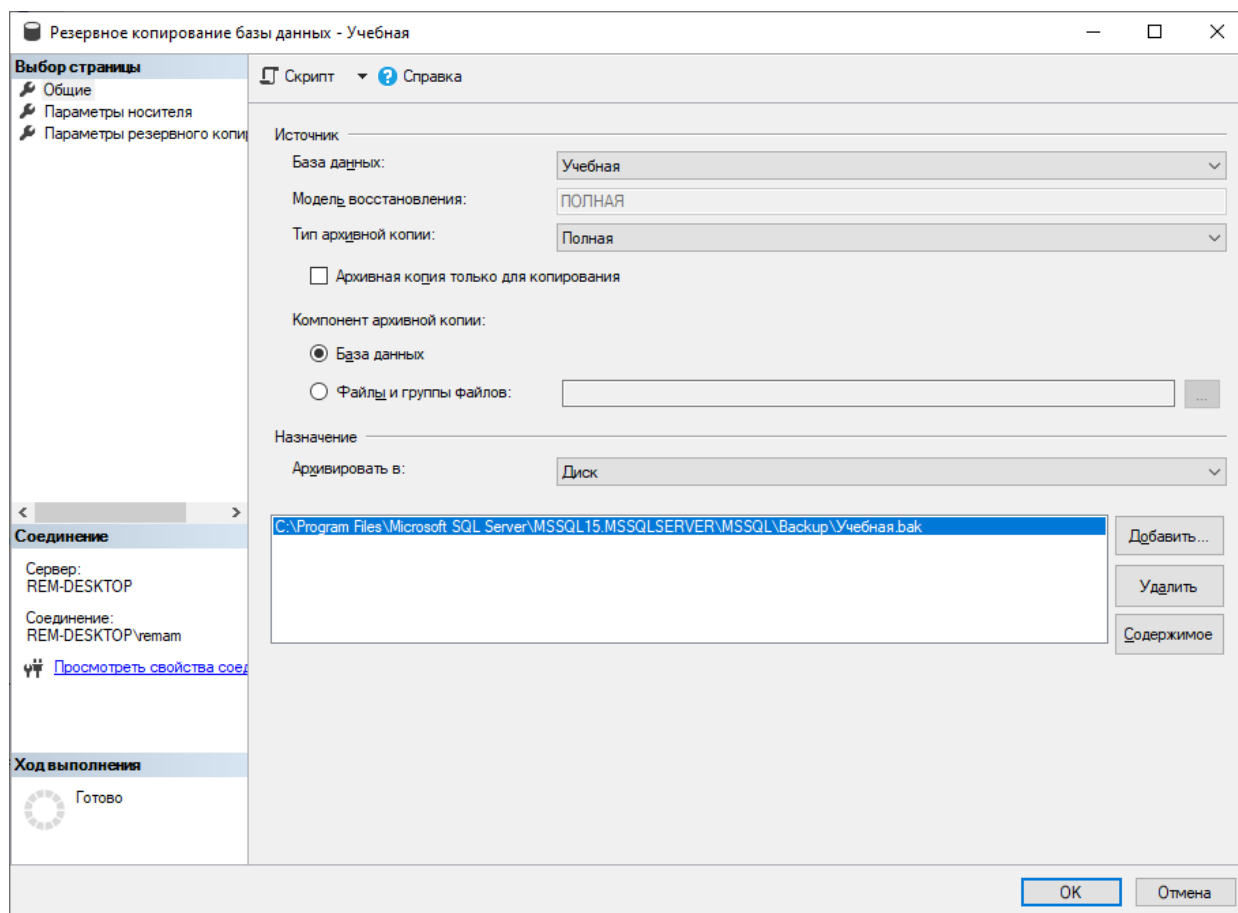


Рис. 10. Диалоговое окно Back Up Database

3. Нажмите кнопку «Добавить...» в этом диалоге. Откроется диалоговое окно «Выбор места расположения резервной копии» (рис. 11). В поле окна «Имя файла» введите имя файла, в который будет выполнено резервное копирование.

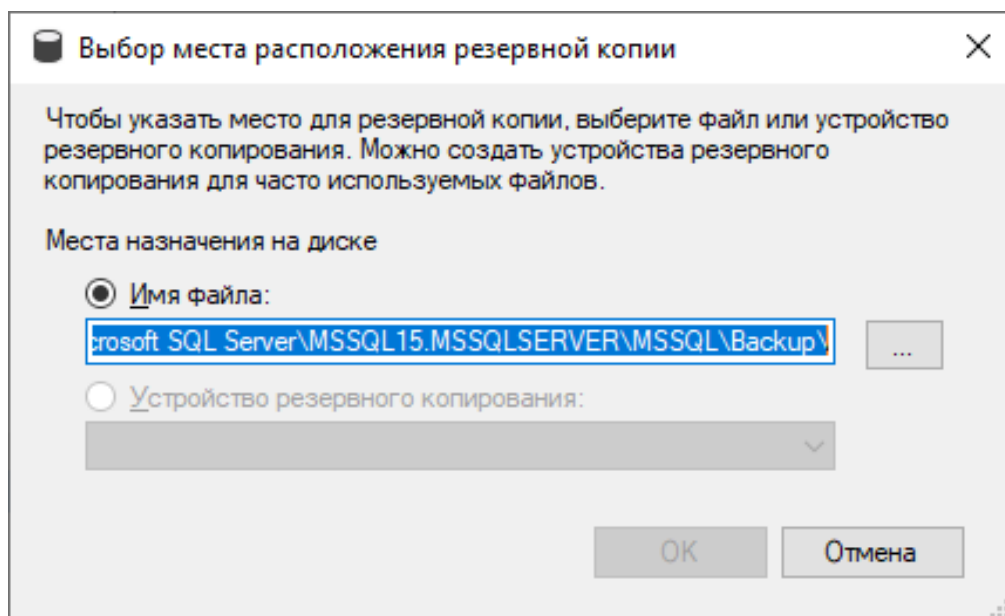


Рис. 11. Диалоговое окно «Выбор места расположения резервной копии»

4. Нажмите ОК в диалоговом окне «Выбор места расположения резервной копии». Оно закроется, а в списке «Назначение» появится строка, которую ввели. Выберите ее и нажмите кнопку ОК. Произойдет резервное копирование по указанному пути.

4. Задание

1. Установите SQL Server Developer Edition.
2. Установите SQL Server Management Studio (SSMS).
3. Создайте учетную запись пользователя MS SQL-Server.
4. Создайте новую базу данных.
5. Создайте нового пользователя базы данных.
6. Соединитесь с базой данных под учетной записью пользователя.
7. Создайте структуру базы в соответствии с порядком выполнения работы.
8. Выполните резервное копирование базы данных.

Практическая работа № 2

Команда SELECT

1. Цель работы

1. Изучение основ выборки данных.
2. Изучение конструкции DISTINCT | ALL.
3. Изучение сортировки данных.
4. Изучение конструкции TOP.
5. Изучение конструкции OFFSET и FETCH.

2. Теоретическая часть

Подавляющее большинство пользователей используют SQL для организации выборки данных. Для выборки данных из БД используется запрос SELECT. Он позволяет фильтровать выбранные данные и преобразовать их к нужному виду. Результатом выполнения запроса SELECT является другая таблица, к которой снова может быть применен запрос SELECT.

Полный синтаксис инструкции SELECT сложен, однако основные предложения можно вкратце описать следующим образом:

```
[ WITH { [ XMLNAMESPACES , ] [ <common_table_expression> ] } ]  
SELECT select_list [ INTO new_table ]  
[ FROM table_source ]  
[ WHERE search_condition ]  
[ GROUP BY group_by_expression ]  
[ HAVING search_condition ]  
[ ORDER BY order_expression [ ASC | DESC ] ]
```

Обработка элементов запроса SELECT выполняется в следующей последовательности:

1. FROM – определяет имена используемых таблиц;
2. WHERE – фильтрует строки таблицы в соответствии с заданными условиями;
3. GROUP BY – группирует строки, имеющие одинаковые значения в указанном столбце;
4. HAVING – фильтрует группы строк в соответствии с указанным условием;
5. SELECT – форматирует выходные данные;
6. ORDER BY – сортирует результаты выполнения запроса.

Порядок предложений в запросе SELECT не может быть изменен. Предложения SELECT и FROM являются обязательными, присутствие остальных зависит от контекста.

В предложении SELECT указывается список столбцов, которые должны быть возвращены запросом. Можно указать исходные элементы или вычисляемые поля во время выполнения запроса.

Конструкция DISTINCT | ALL исключает / разрешает вывод повторяющихся строк. Конструкция ALL используется по умолчанию.

* означает вывод всех столбцов указанной таблицы. В случае, если выборка производится из нескольких таблиц, перед символом звездочки может указываться имя таблицы.

SQL-запрос может содержать вычисляемые столбцы, значения которых могут определяться на основе значений данных, хранящихся в БД конструкции. Вычисляемым столбцам следует давать название с помощью ключевого слова AS.

Вычисляемый столбец можно создать как: <Новое поле> = <выражение>

Если название столбца состоит из нескольких слов, разделенных пробелами, следует их записать в квадратных скобках: [].

Сортировка данных выполняется с помощью команды ORDER BY, которая добавляется в конец запроса, после чего перечисляется список столбцов. Для каждого столбца указывается тип сортировки ASC | DESC (ascending – по возрастанию | descending – по убыванию). ASC – по умолчанию, можно не указывать.

Конструкция TOP <N> позволяет выбрать определенное количество строк из таблицы. Дополнительный оператор PERCENT позволяет выбрать процентное количество строк из таблицы. Дополнительный оператор WITH TIES позволяет выбрать все строки с такими же свойствами.

Конструкция OFFSET <N> ROWS указывает число строк, которые необходимо пропустить, прежде чем будет начат возврат строк из выражения запроса.

Конструкция FETCH NEXT <N> ROWS ONLY указывает число строк, возвращаемых после обработки предложения OFFSET.

На языке T-SQL регистр не имеет значение (case insensitive).

3. Практическая часть

Дана таблица *Академики*:

ФИО	Дата_рождения	Специализация	Год_присвоения_звания
Аничков Николай Николаевич	1885-11-03	медицина	1939
Бартольд Василий Владимирович	1869-11-15	историк	1913
Белопольский Аристарх Аполлонович	1854-07-13	астрофизик	1903
Бородин Иван Парфеньевич	1847-01-30	ботаник	1902
Вальден Павел Иванович	1863-07-26	химик-технолог	1910
Вернадский Владимир Иванович	1863-03-12	геохимик	1908
Виноградов Павел Гаврилович	1854-11-30	историк	1914
Ипатьев Владимир Николаевич	1867-11-21	химик	1916

ФИО	Дата_рождения	Специализация	Год_присвоения_звания
Истрин Василий Михайлович	1865-02-22	филолог	1907
Карпинский Александр Петрович	1847-01-07	геолог	1889
Коковцов Павел Константинович	1861-07-01	историк	1906
Курнаков Николай Семёнович	1860-12-06	химик	1913
Марр Николай Яковлевич	1865-01-06	лингвист	1912
Насонов Николай Викторович	1855-02-26	зоолог	1906
Ольденбург Сергей Фёдорович	1863-09-26	историк	1903
Павлов Иван Петрович	1849-09-26	физиолог	1907
Перетц Владимир Николаевич	1870-01-31	филолог	1914
Соболевский Алексей Иванович	1857-01-07	лингвист	1900
Стеклов Владимир Андреевич	1864-01-09	математик	1912

Пример 1: Вывести список академиков:

SELECT

*

FROM

Академики

Пример 2: Вывести ФИО и дату рождения всех академиков:

SELECT

ФИО, Дата_рождения

FROM

Академики

Пример 3: Создайте вычисляемое поле «Информация», содержащее информацию об академике в таком виде: «Академик Петров Петр Петрович, специализация: математика»:

SELECT

'Академик ' + ФИО + ', специализация: ' + Специализация AS Информация

FROM

Академики

Пример 4: Вывести ФИО академиков и номер следующего года после присвоения звания:

SELECT

ФИО

, [Через год] = Год_присвоения_звания + 1

FROM

Академики

Пример 5: Выведите список специализаций, убрав дубликаты:

```
SELECT DISTINCT
    Специализация
FROM
    Академики
```

Пример 6: Вывести список академиков, отсортированный по возрастанию года присвоения звания:

```
SELECT
    *
FROM
    Академики
ORDER BY
    Год_присвоения_звания
```

Пример 7: Вывести список академиков, отсортированный в обратном алфавитном порядке по полю «Специализация» и в алфавитном порядке по полю «ФИО»:

```
SELECT
    *
FROM
    Академики
ORDER BY
    Специализация DESC
    ,ФИО ASC
```

Пример 8: Вывести первые две строки из списка академиков, отсортированного в алфавитном порядке по полю «ФИО»:

```
SELECT TOP 2
    *
FROM
    Академики
ORDER BY
    ФИО ASC
```

Пример 9: Вывести первые 30% строк из списка академиков, отсортированного по возрастанию года присвоения звания:

```
SELECT TOP 30 PERCENT
    *
FROM
    Академики
ORDER BY
    Год_присвоения_звания
```

Пример 10: Вывести из таблицы «Академики», отсортированной по возрастанию года присвоения звания, список академиков, у которых год присвоения звания – один из первых четырех в отсортированной таблице:

```
SELECT TOP 4 WITH TIES
    *
FROM
    Академики
ORDER BY
    Год_присвоения_звания
```

Пример 11: Вывести, начиная с третьего, список академиков, отсортированный в алфавитном порядке ФИО:

```
SELECT
    *
FROM
    Академики
ORDER BY
    ФИО
OFFSET 2 ROWS
```

Пример 12: Вывести, начиная с третьего и до десятого, список академиков, отсортированный в алфавитном порядке ФИО:

```
SELECT
    *
FROM
    Академики
ORDER BY
    ФИО
OFFSET 2 ROWS
FETCH NEXT 8 ROWS ONLY
```

4. Задание

1. Вывести ФИО, специализацию и дату рождения всех академиков.
2. Создать вычисляемое поле «О присвоении звания», которое содержит информацию об академике в виде: «Петров Петр Петрович получил звание в 1974».
3. Вывести ФИО академиков и вычисляемое поле «Через 5 лет после присвоения звания».
4. Вывести список годов присвоения званий, убрав дубликаты.
5. Вывести список академиков, отсортированный по убыванию даты рождения.

6. Вывести список академиков, отсортированный в обратном алфавитном порядке специализаций, по убыванию года присвоения звания, и в алфавитном порядке ФИО.
7. Вывести первую строку из списка академиков, отсортированного в обратном алфавитном порядке ФИО.
8. Вывести фамилию академика, который раньше всех получил звание.
9. Вывести первые 10% строк из списка академиков, отсортированного в алфавитном порядке ФИО.
10. Вывести из таблицы «Академики», отсортированной по возрастанию года присвоения звания, список академиков, у которых год присвоения звания – один из первых пяти в отсортированной таблице.
11. Вывести, начиная с десятого, список академиков, отсортированный по возрастанию даты рождения.
12. Вывести девятую и десятую строку из списка академиков, отсортированного в алфавитном порядке ФИО.

Практическая работа № 3

Фильтрация данных

1. Цель работы

1. Изучение основ фильтрации данных.
2. Изучение операций сравнения.
3. Изучение логических операторов.
4. Изучение BETWEEN.
5. Изучение LIKE.
6. Изучение NULL.
7. Изучение IN.

2. Теоретическая часть

Для фильтрации данных применяется оператор WHERE. Синтаксис: WHERE <условие>. В условиях поле таблицы сравнивается с константой или с выражением. Символьные константы пишутся в одинарных кавычках. Числовые константы и названия столбцов пишутся без кавычек.

Чтобы строка попала в результат, условие должно быть истинно. В условиях используются операции сравнения. В Transact-SQL применяются следующие операции сравнения:

- = – равенство;
- <> или != – неравенство;
- < – меньше;
- > – больше;
- !< – не меньше;
- !> – не больше;
- <= – меньше или равно;
- >= – больше или равно.

Можно использовать несколько условий для фильтрации данных. Для объединения их в одно выражение используются логические операторы. В Transact-SQL применяются следующие логические операторы:

AND – логическое умножение или конъюнкция (И). Бинарный оператор, объединяет два условия; если оба условия истинны, результат – истина, иначе – ложь.

OR – логическое сложение или дизъюнкция (ИЛИ). Бинарный оператор, объединяет два условия; если хотя бы одно из этих условий истинно, то общее условие оператора OR также будет истинно.

NOT – логическое отрицание или инверсия (НЕ). Унарный оператор, применяется к одному условию. Если выражение в этой операции ложно, то общее условие истинно.

Самый высокий приоритет у оператора NOT. Самый низкий – у OR. Если эти операторы встречаются в одном выражении, то сначала выполняется NOT, потом AND, а затем OR. При записи условий использование скобок – хороший тон программирования.

Оператор BETWEEN используется для сравнения с диапазоном от начального и до конечного значения. Начальное и конечное значения включены в промежуток.

Оператор LIKE используется для сравнения с шаблоном строки. Для определения шаблона применяются специальные символы:

% – любая последовательность символов, в том числе пустая;

_ – любой символ;

[] – символ, который указан в квадратных скобках;

[-] – символ из определенного диапазона;

[^] – символ, который не указан после символа ^.

В базах данных, для обозначения неизвестного значения, используется понятие NULL. Для проверки неизвестного значения нельзя использовать операторы сравнения. Допускается только IS NULL или IS NOT NULL.

Оператор IN используется для сравнения с набором значений. Список значений указывается в скобках.

3. Практическая часть

Дана таблица **Страны**:

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Австрия	Вена	83858	8741753	Европа
Азербайджан	Баку	86600	9705600	Азия
Албания	Тирана	28748	2866026	Европа
Алжир	Алжир	2381740	39813722	Африка
Ангола	Луанда	1246700	25831000	Африка
Аргентина	Буэнос-Айрес	2766890	43847000	Южная Америка
Афганистан	Кабул	647500	29822848	Азия
Бангладеш	Дакка	144000	160221000	Азия
Бахрейн	Манама	701	1397000	Азия
Белиз	Бельмопан	22966	377968	Северная Америка
Белоруссия	Минск	207595	9498400	Европа
Бельгия	Брюссель	30528	11250585	Европа
Бенин	Порто-Ново	112620	11167000	Африка
Болгария	София	110910	7153784	Европа
Боливия	Сукре	1098580	10985059	Южная Америка
Ботсвана	Габороне	600370	2209208	Африка

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Бразилия	Бразилиа	8511965	206081432	Южная Америка
Буркина-Фасо	Уагадугу	274200	19034397	Африка
Бутан	Тхимпху	47000	784000	Азия
Великобритания	Лондон	244820	65341183	Европа
Венгрия	Будапешт	93030	9830485	Европа
Венесуэла	Каракас	912050	31028637	Южная Америка
Восточный Тимор	Дили	14874	1167242	Азия
Вьетнам	Ханой	329560	91713300	Азия

Пример 1: Вывести список стран, площадь которых больше 1 млн. кв. км:

```
SELECT Название
      ,Столица
      ,Площадь
      ,Население
      ,Континент
FROM   Страны
WHERE  Площадь > 1000000
```

Пример 2: Вывести список стран, население которых не больше 1 млн. чел.:

```
SELECT Название
      ,Столица
      ,Площадь
      ,Население
      ,Континент
FROM   Страны
WHERE  Население !> 1000000
```

Пример 3: Вывести список африканских стран:

```
SELECT Название
      ,Столица
      ,Площадь
      ,Население
      ,Континент
FROM   Страны
WHERE  Континент = 'Африка'
```

Пример 4: Вывести список всех стран, кроме европейских:

```
SELECT Название
      ,Столица
      ,Площадь
      ,Население
      ,Континент
FROM
      Страны
WHERE
      Континент != 'Европа'
```

Пример 5: Вывести список стран, население которых больше 1 млн. чел., а площадь меньше 100 тыс. кв. км:

```
SELECT Название
      ,Столица
      ,Площадь
      ,Население
      ,Континент
FROM
      Страны
WHERE
      (Население > 1000000) AND (Площадь < 100000)
```

Пример 6: Вывести список стран, которые находятся в Европе и их население больше 10 млн. чел., или находятся в Азии, а население больше 50 млн. чел.:

```
SELECT Название
      ,Столица
      ,Площадь
      ,Население
      ,Континент
FROM
      Страны
WHERE
      (Континент = 'Европа') AND (Население > 10000000)
      OR
      (Континент = 'Азия') AND (Население > 50000000)
```

Пример 7: Вывести список стран, население которых от 10 до 100 млн. чел., а площадь от 100 до 200 тыс. кв. км:

```
SELECT Название
```

```
,Столица
,Площадь
,Население
,Континент
FROM
    Страны
WHERE
    (Население BETWEEN 10000000 AND 100000000)
    AND
    (Площадь >= 100000) AND (Площадь <= 200000)
```

Пример 8: Вывести отсортированный в алфавитном порядке список стран от Бенина до Ватикана:

```
SELECT Название
,Столица
,Площадь
,Население
,Континент
FROM
    Страны
WHERE
    Название BETWEEN 'Бенин' AND 'Ватикан'
ORDER BY
    Название
```

Пример 9: Вывести список стран, название которых начинается с буквы «С»:

```
SELECT Название
,Столица
,Площадь
,Население
,Континент
FROM
    Страны
WHERE
    Название LIKE 'С%'
```

Пример 10: Вывести список стран, в названии которых вторая буква – «а», а последняя – я»:

```
SELECT Название
,Столица
,Площадь
```



```
        ,Население
        ,Континент
FROM
        Страны
WHERE
        Название LIKE ' _a%я'
```

Пример 11: Вывести список стран, в названии которых третья буква – «а», «о» или «у»:

```
SELECT Название
        ,Столица
        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
FROM
        Страны
WHERE
        Название LIKE ' _[aou]%'
```

Пример 12: Вывести список стран, название которых начинается с буквы от «А» до «Г»:

```
SELECT Название
        ,Столица
        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
FROM
        Страны
WHERE
        Название LIKE '[А-Г]%'
```

Пример 13: Вывести список стран, название которых не начинается с буквы от «А» до «Г» или с буквы «С»:

```
SELECT Название
        ,Столица
        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
FROM
        Страны
WHERE
        Название LIKE '[^А-Г,^С]%'
```

Пример 14: Вывести список стран, столицы которых не введены в базу:

```
SELECT Название
      ,Столица
      ,Площадь
      ,Население
      ,Континент
FROM   Страны
WHERE  Столица IS NULL
```

Пример 15: Вывести список европейских, азиатских и африканских стран:

```
SELECT Название
      ,Столица
      ,Площадь
      ,Население
      ,Континент
FROM   Страны
WHERE  Континент IN ('Европа', 'Азия', 'Африка')
```

4. Задание

1. Вывести названия и столицы пяти наибольших стран по площади.
2. Вывести список африканских стран, население которых не превышает 1 млн. чел.
3. Вывести список стран, население которых больше 5 млн. чел., а площадь меньше 100 тыс. кв. км, и они расположены не в Европе.
4. Вывести список стран Северной и Южной Америки, население которых больше 20 млн. чел., или стран Африки, у которых население больше 30 млн. чел.
5. Вывести список стран, население которых составляет от 10 до 100 млн. чел., а площадь не больше 500 тыс. кв. км.
6. Вывести список стран, названия которых не начинаются с буквы «К».
7. Вывести список стран, в названии которых третья буква – «а», а предпоследняя – «и».
8. Вывести список стран, в названии которых вторая буква – гласная.
9. Вывести список стран, названия которых начинаются с букв от «К» до «П».
10. Вывести список стран, названия которых начинаются с букв от «А» до «Г», но не с буквы «Б».
11. Вывести список стран, столицы которых есть в базе.
12. Вывести список стран Африки, Северной и Южной Америки.

Практическая работа № 4

Типы данных и встроенные функции

1. Цель работы

1. Изучить основные типы данных.
2. Изучить встроенные функции для работы со строками.
3. Изучить встроенные функции для работы с числами.
4. Изучить встроенные функции для работы с датами и временем.
5. Изучить встроенные функции преобразования данных.
6. Изучить CASE и IF.

2. Теоретическая часть

2.1. Типы данных

На языке Transact-SQL используется множество различных *типов данных*. Всех их можно разделить на следующие группы:

Числовые типы данных: BIT (значение 0 или 1), TINYINT (от 0 до 255), SMALLINT (от -32768 до 32767), INT (от -2147483648 до 2147483647), BIGINT (от -9223372036854775808 до 9223372036854775807), DECIMAL (числа с фиксированной точностью), NUMERIC: (аналогичен типу DECIMAL), SMALLMONEY (дробные значения от -214748.3648 до 214748.3647), MONEY (дробные значения от -922337203685477.5808 до 922337203685477.5807), FLOAT (от -1.79E+308 до 1.79E+308), REAL (числа от -340E+38 до 3.40E+38);

Типы данных, представляющие дату и время: DATE (дата от 01/01/0001 до 31/12/9999), TIME (время в диапазоне от 00:00:00.0000000 до 23:59:59.9999999), DATETIME (дата и время от 01/01/1753 до 31/12/9999), DATETIME2 (дата и время от 01/01/0001 00:00:00.0000000 до 31/12/9999 23:59:59.9999999), SMALLDATETIME (дата и время от 01/01/1900 до 06/06/2079), DATETIMEOFFSET (дата и время от 01/01/0001 до 31/12/9999);

Строковые типы данных: CHAR (фиксированная строка длиной от 1 до 8000 символов), VARCHAR (переменная строка длиной от 1 до 8000 символов), NCHAR (Unicode – фиксированная строка длиной от 1 до 4000 символов), NVARCHAR (Unicode – переменная строка длиной от 1 до 4000 символов), TEXT и NTEXT (устаревшие, не рекомендуется использовать);

Бинарные типы данных: BINARY (фиксированные бинарные данные от 1 до 8000 байт), VARBINARY (переменные бинарные данные от 1 до 8000 байт), IMAGE (устаревшая, не рекомендуется использовать);

Другие типы данных: UNIQUEIDENTIFIER (уникальный идентификатор GUID), TIMESTAMP (номер версии строки в таблице), CURSOR (набор строк таблицы),

HIERARCHYID (позиция в иерархии), SQL_VARIANT (данные любого типа), XML (документы или фрагменты XML), TABLE (таблица), GEOGRAPHY (географические данные, такие как широта и долгота), GEOMETRY (координаты на плоскости).

2.2. Встроенные функции Transact-SQL

Функции SQL производят действия с данными и возвращают результат. *Встроенные функции* делятся на три основные группы:

- *скалярные функции* – обрабатывают одиночное значение и возвращают одно значение. Их можно использовать везде, где допускается применение выражений.

- *агрегатные функции* – используются для получения обобщающих значений. Они, в отличие от скалярных функций, оперируют значениями столбцов множества строк;

- *функции для списка значений*.

Скалярные функции бывают следующих категорий:

- *строковые функции* – выполняют определенные действия над строками и возвращают строковые или числовые значения;

- *числовые функции* – возвращают числовые значения на основании заданных в аргументе значений того же типа;

- *функции времени и даты* – выполняют различные действия над входными значениями времени и даты и возвращают строковое, числовое значение или значение в формате даты и времени;

- *функции преобразования типа*.

Список часто используемых *строковых функций*:

LEN(строка)	возвращает количество символов в заданной строке
TRIM(строка) TRIM([символ FROM] строка)	удаляет символ пробела или другие заданные символы в начале и в конце строки.
LTRIM(строка)	удаляет начальные пробелы из заданной строки
RTRIM(строка)	удаляет конечные пробелы из заданной строки
CHARINDEX(подстрока, строка) CHARINDEX(подстрока, строка, начальная позиция)	возвращает индекс, по которому находится первое вхождение подстроки в строке.
PATINDEX('%шаблон%', строка)	возвращает индекс, по которому находится первое вхождение определенного шаблона в строке
LEFT(строка, число)	возвращает с начала строки определенное количество символов
RIGHT(строка, число)	возвращает с конца строки определенное количество символов
SUBSTRING(строка, начальная позиция, длина)	возвращает подстроку заданной длиной, начиная с данной позиции
REPLACE(строка, подстрока, замена)	заменяет одну подстроку другой
REVERSE(строка)	переворачивает строку наоборот

CONCAT(строка1, строка2 [, строкаN])	объединяет заданные строки в одну
LOWER(строка)	переводит строку в нижний регистр
UPPER (строка)	переводит строку в верхний регистр
SPACE(число)	возвращает заданное количество пробелов
REPLICATE(строка, число)	повторяет значение строки указанное число раз
STUFF(строка, начальная позиция, количество, замена)	удаляет указанное количество символов первой строки в начальной позиции и вставляет на их место замену.

Список часто используемых *числовых функций*:

ABS(число)	возвращает абсолютное значение числа
CEILING(число)	возвращает наименьшее целое, большее или равное заданного числа.
FLOOR(число)	возвращает наибольшее целое число, меньшее или равное заданного числа
POWER(число, степень)	возвращает значение указанного выражения, возведенное в заданную степень
RAND([начальное значение])	возвращает псевдослучайное значение от 0 до 1
ROUND(число, точность)	возвращает число, округленное до указанной точности
SIGN(число)	возвращает положительное (+1), нулевое (0) или отрицательное (-1) значение, обозначающее знак заданного выражения
SQRT(число)	возвращает квадратный корень данного числа
SQUARE(число)	возвращает квадрат указанного числа
PI()	возвращает константное значение π
ACOS(число)	возвращает угол в радианах, косинус которого задан – арккосинус.
ASIN(число)	возвращает угол в радианах, синус которого задан – арксинус.
ATAN(число)	возвращает угол в радианах, тангенс которого задан – арктангенс.
COS(число)	возвращает косинус указанного угла в радианах.
SIN(число)	возвращает синус указанного угла в радианах.
TAN(число)	возвращает тангенс указанного угла в радианах.
COT(число)	возвращает котангенс указанного угла в радианах
DEGREES(число)	возвращает для значения угла в радианах соответствующее значение в градусах.
RADIANS(число)	возвращает для значения угла в градусах соответствующее значение в радианах
EXP(число)	возвращает экспонент заданного числа
LOG(число)	возвращает натуральный логарифм указанного числа
LOG(число, основа)	возвращает логарифм указанного числа
LOG10(число)	возвращает десятичный логарифм указанного числа

Список часто используемых функций времени и даты:

GETDATE()	возвращает текущую дату и время
CURRENT_TIMEZONE()	возвращает имя часового пояса
GETUTCDATE()	возвращает текущую дату и время по Гринвичу (UTC/GMT)
DAY(дата)	возвращает день месяца указанной даты
MONTH(дата)	возвращает номер месяца указанной даты
YEAR(дата)	возвращает год указанной даты
DATEPART(часть, дата)	возвращает целое число, представляющее указанную часть заданной даты
DATENAME(часть, дата)	возвращает строку символов, представляющую указанную часть заданной даты
DATEADD(часть, число, дата)	добавляет указанное целое число со знаком к части входного значения даты, а затем возвращает это измененное значение
DATEDIFF(часть, начальная дата, конечная дата)	возвращает разницу как целое число со знаком между частями заданных дат
EOMONTH(дата)	возвращает последний день месяца, заданной даты

Для функций времени и даты используются следующие аргументы как часть даты и времени:

<i>Часть даты и времени</i>	<i>Сокращения</i>
year	yy, yyyy
quarter	qq, q
month	mm, m
dayofyear	dy, y
day	dd, d
week	wk, ww
weekday	dw
hour	hh
minute	mi, n
second	ss, s
millisecond	ms
microsecond	mcs
nanosecond	ns
tzoffset	tz
iso_week	isowk, isoww

Список часто используемых *функций преобразования*:

CAST(выражение AS тип)	преобразуют выражение в заданный тип
CONVERT(тип, выражение [, стиль])	
ASCII(строка)	возвращает код ASCII первого символа указанного символьного выражения
UNICODE(строка)	возвращает код Юникод первого символа указанного символьного выражения
CHAR(число)	возвращает символ ASCII с указанным кодом
NCHAR(число)	возвращает символ Юникода с указанным кодом
STR(число)	возвращает символьные данные, преобразованные из числовых данных

Список часто используемых *функций проверки значений*:

ISDATE(выражение)	возвращает 1, если выражение имеет допустимое значение типа даты и времени, иначе возвращает значение 0
ISNUMERIC(выражение)	возвращает 1, если выражение имеет допустимое значение числовой тип данных, иначе возвращает 0
ISNULL(выражение, замена)	заменяет значение NULL указанным замещающим значением
COALESCE(выражение[,...n])	вычисляет аргументы по порядку и возвращает текущее значение первого выражения, изначально не вычисленного как NULL.

Особое место среди встроенных скалярных функций языка SQL занимают функции вывода, которые являются разновидностью CASE-выражений. Функция CASE проверяет значение некоторого выражения, и в зависимости от результата проверки может возвращать тот или иной результат.

Выражение CASE имеет два формата:

- простое выражение CASE для определения результата сравнивает выражение с набором простых выражений;
- поисковое выражение CASE для определения результата вычисляет набор логических выражений.

Оба формата поддерживают дополнительный аргумент ELSE.

Функция IF(условие, выражение_если_истина, выражение_если_ложь) – возвращает одно из двух значений в зависимости от того, принимает логическое выражение значение true или false.

3. Практическая часть

Дана таблица *Академики*:

ФИО	Дата_рождения	Специализация	Год_присвоения_звания
Аничков Николай Николаевич	1885-11-03	медицина	1939
Бартольд Василий Владимирович	1869-11-15	историк	1913
Белопольский Аристарх Аполлонович	1854-07-13	астрофизик	1903
Бородин Иван Парфеньевич	1847-01-30	ботаник	1902
Вальден Павел Иванович	1863-07-26	химик-технолог	1910
Вернадский Владимир Иванович	1863-03-12	геохимик	1908
Виноградов Павел Гаврилович	1854-11-30	историк	1914
Ипатьев Владимир Николаевич	1867-11-21	химик	1916
Истрин Василий Михайлович	1865-02-22	филолог	1907
Карпинский Александр Петрович	1847-01-07	геолог	1889
Коковцов Павел Константинович	1861-07-01	историк	1906
Курнаков Николай Семёнович	1860-12-06	химик	1913
Марр Николай Яковлевич	1865-01-06	лингвист	1912
Насонов Николай Викторович	1855-02-26	зоолог	1906
Ольденбург Сергей Фёдорович	1863-09-26	историк	1903
Павлов Иван Петрович	1849-09-26	физиолог	1907
Перетц Владимир Николаевич	1870-01-31	филолог	1914
Соболевский Алексей Иванович	1857-01-07	лингвист	1900
Стеклов Владимир Андреевич	1864-01-09	математик	1912

Пример 1: Вывести ФИО академиков и длину ФИО:

```
SELECT
    ФИО
    ,LEN(ФИО) AS Количество_символов
FROM
    Академики
```

Пример 2: Вывести список академиков, убрать лишние пробелы в ФИО:

```
SELECT
    TRIM(ФИО) AS ФИО
    ,Дата_рождения
    ,Специализация
    ,Год_присвоения_звания
FROM
    Академики
```


Пример 3: Найти позиции буквы «о» в ФИО каждого академика. Вывести ФИО и позицию:

```
SELECT
    ФИО
    ,CHARINDEX('о',ФИО) AS Позиция_о
FROM
    Академики
```

Пример 4: Вывести ФИО и первые три буквы специальности каждого академика:

```
SELECT
    ФИО
    ,LEFT(Специализация, 3) AS Спец_3
FROM
    Академики
```

Пример 5: Вывести ФИО и от второй до пятой буквы специальности каждого академика:

```
SELECT
    ФИО
    ,SUBSTRING(Специализация, 2, 4) AS Спец_2_5
FROM
    Академики
```

Пример 6: Вывести список академиков, заменить специальность «лингвист» на «языковед»:

```
SELECT
    ФИО
    ,Дата_рождения
    ,REPLACE(Специализация, 'лингвист', 'языковед') AS Спец
    ,Год_присвоения_звания
FROM
    Академики
```

Пример 7: Вывести список академиков, специальность на верхнем регистре:

```
SELECT
    ФИО
    ,Дата_рождения
    ,UPPER(Специализация) AS Спец
    ,Год_присвоения_звания
FROM
    Академики
```

Пример 8: Вывести ФИО академиков в правильном и обратном виде:

```
SELECT
    ФИО
    ,REVERSE(ФИО) AS ФИО_Обр
FROM
    Академики
    Название
```

Пример 9: Вывести каждую специализацию 4 раза в одной строке. Убрать дубликаты:

```
SELECT DISTINCT
    REPLICATE(Специализация, 4) AS Спец_4
FROM
    Академики
```

Пример 10: Вывести абсолютное значение тригонометрических функций на точке π :

```
SELECT
    ABS(COS(PI())) AS Косинус_Пи
    ,ABS(SIN(PI())) AS Синус_Пи
    ,ABS(TAN(PI())) AS Тангенс_Пи
    ,ABS(COT(PI())) AS КоТангенс_Пи
```

Пример 11: Вывести число 132.456, округленное с точностью от 3 до -3:

```
SELECT
    ROUND(123.456, 3) AS Окp3
    ,ROUND(123.456, 2) AS Окp2
    ,ROUND(123.456, 1) AS Окp1
    ,ROUND(123.456, 0) AS Окp0
    ,ROUND(123.456, -1) AS Окp_1
    ,ROUND(123.456, -2) AS Окp_2
    ,ROUND(123.456, -3) AS Окp_3
```

Пример 12: Вывести наименьшее целое число, которое больше или равно 123.456, и наибольшее целое число, которое меньше или равно 123.456:

```
SELECT
    CEILING(123.456) AS Больше
    ,FLOOR(123.456) AS Меньше
```

Пример 13: Вывести квадратный корень, квадрат и куб числа 25:

```
SELECT
    SQRT(25) AS Корень
    ,SQUARE(25) AS Квадрат
    ,POWER(25, 3) AS Куб
```

Пример 14: Вывести текущую дату и время:

```
SELECT  
    GETDATE() AS Сейчас
```

Пример 15: Вывести день, месяц, год, час, минуту, секунду, номер квартала, номер недели, день года, день недели для текущей даты и времени:

```
SELECT  
    DAY(GETDATE()) AS День  
    ,MONTH(GETDATE()) AS Месяц  
    ,YEAR(GETDATE()) AS Год  
    ,DATEPART(HOUR, GETDATE()) AS Час  
    ,DATEPART(MINUTE, GETDATE()) AS Минута  
    ,DATEPART(SECOND, GETDATE()) AS Секунда  
    ,DATEPART(QUARTER, GETDATE()) AS Квартал  
    ,DATEPART(WEEK, GETDATE()) AS Неделя  
    ,DATEPART(DAYOFYEAR, GETDATE()) AS День_года  
    ,DATEPART(WEEKDAY, GETDATE()) AS День_недели
```

Пример 16: Вывести дату 100 дней назад от текущей:

```
SELECT  
    DATEADD(DAY, -100, GETDATE()) AS День_100_Назад
```

Пример 17: Академик Игорь Евгеньевич Тамм родился 8 июля 1895 года. И.Е. Тамм скончался 12 апреля 1971 года. Вывести количество прожитых дней:

```
SELECT  
    DATEDIFF(DAY, '18950708', '19710412') AS Количество_прожитых_дней
```

Пример 18: Вывести ФИО и время года рождения каждого академика:

```
SELECT  
    ФИО  
    , CASE MONTH(Дата_рождения)  
        WHEN 3 THEN 'Весна'  
        WHEN 4 THEN 'Весна'  
        WHEN 5 THEN 'Весна'  
        WHEN 6 THEN 'Лето'  
        WHEN 7 THEN 'Лето'  
        WHEN 8 THEN 'Лето'  
        WHEN 9 THEN 'Осень'  
        WHEN 10 THEN 'Осень'  
        WHEN 11 THEN 'Осень'  
        ELSE 'Зима'  
    END AS Времени_года  
FROM Академики
```

Пример 19: Вывести ФИО, дату рождения и знак зодиака каждого академика:

```
SELECT
    ФИО
    , Дата_рождения
    , CASE
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=3 AND DAY(Дата_рождения) >= 21)
OR (MONTH(Дата_рождения)=4 AND DAY(Дата_рождения) <= 20) THEN 'Овен'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=4 AND DAY(Дата_рождения) >= 21)
OR (MONTH(Дата_рождения)=5 AND DAY(Дата_рождения) <= 21) THEN 'Телец'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=5 AND DAY(Дата_рождения) >= 22)
OR (MONTH(Дата_рождения)=6 AND DAY(Дата_рождения) <= 21) THEN 'Близнецы'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=6 AND DAY(Дата_рождения) >= 22)
OR (MONTH(Дата_рождения)=7 AND DAY(Дата_рождения) <= 22) THEN 'Рак'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=7 AND DAY(Дата_рождения) >= 23)
OR (MONTH(Дата_рождения)=8 AND DAY(Дата_рождения) <= 21) THEN 'Лев'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=8 AND DAY(Дата_рождения) >= 22)
OR (MONTH(Дата_рождения)=9 AND DAY(Дата_рождения) <= 23) THEN 'Дева'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=9 AND DAY(Дата_рождения) >= 24)
OR (MONTH(Дата_рождения)=10 AND DAY(Дата_рождения) <= 23) THEN 'Весы'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=10 AND DAY(Дата_рождения) >= 24)
OR (MONTH(Дата_рождения)=11 AND DAY(Дата_рождения) <= 22) THEN 'Скорпион'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=11 AND DAY(Дата_рождения) >= 23)
OR (MONTH(Дата_рождения)=12 AND DAY(Дата_рождения) <= 22) THEN 'Стрелец'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=12 AND DAY(Дата_рождения) >= 23)
OR (MONTH(Дата_рождения)=1 AND DAY(Дата_рождения) <= 20) THEN 'Козерог'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=1 AND DAY(Дата_рождения) >= 21)
OR (MONTH(Дата_рождения)=2 AND DAY(Дата_рождения) <= 19) THEN 'Водолей'
        WHEN (MONTH(Дата_рождения)=2 AND DAY(Дата_рождения) >= 20)
OR (MONTH(Дата_рождения)=3 AND DAY(Дата_рождения) <= 20) THEN 'Рыбы'
    END AS Знак_зодиака
FROM Академики
```

Пример 20: Вывести список академиков. Для каждого академика, в зависимости от возраста, при присвоении звания вывести «молодой» или «старый» в дополнительном столбце:

```
SELECT
    ФИО
    ,Дата_рождения
    ,Специализация
    ,Год_присвоения_звания
    ,IF(Год_присвоения_звания - Year(Дата_рождения) <= 45, 'Молодой','Старый')
AS Возраст_при_присвоении
FROM Академики
```

4. Задание

1. Вывести список академиков, отсортированный по количеству символов в ФИО.
2. Вывести список академиков, убрать лишние пробелы в ФИО.
3. Найти позиции «ов» в ФИО каждого академика. Вывести ФИО и номер позиции.
4. Вывести ФИО и последние две буквы специализации для каждого академика.
5. Вывести список академиков, ФИО в формате Фамилия и Инициалы.
6. Вывести список специализаций в правильном и обратном виде. Убрать дубликаты.
7. Вывести свою фамилию в одной строке столько раз, сколько вам лет.
8. Вывести абсолютное значение функций $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ с точностью два знака

после десятичной запятой.

9. Вывести количество дней до конца семестра.
10. Вывести количество месяцев от вашего рождения.
11. Вывести ФИО и високосность года рождения каждого академика.
12. Вывести список специализаций без повторений. Для каждой специализации вывести «длинный» или «короткий», в зависимости от количества символов.

Практическая работа № 5

Агрегатные функции

1. Цель работы

1. Изучить основы агрегации данных.
2. Изучить функцию MAX.
3. Изучить функцию MIN.
4. Изучить функцию SUM.
5. Изучить функцию AVG.
6. Изучить функцию COUNT.
7. Изучить группировки данных.
8. Изучить применение фильтрации в группировке данных.

2. Теоретическая часть

Агрегатные функции используются для получения обобщающих значений. Они, в отличие от скалярных функций, оперируют значениями столбцов множества строк. К агрегатным функциям относятся:

- SUM – вычисляет итог;
- MAX – возвращает наибольшее значение;
- MIN – возвращает наименьшее значение;
- AVG – вычисляет среднее значение;
- COUNT – вычисляет количество значений в столбце.

Аргументами функций выступают поля таблицы или результаты выражений над ними.

Вложенность не допускается.

Из агрегатных функций можно составлять любые выражения.

Для функций SUM и AVG столбец должен содержать числовые значения.

Для функций COUNT() можно указать аргумент * для подсчета всех строк без исключения.

По умолчанию вышеперечисленные пять функций учитывают все строки выборки для вычисления результата. Но выборка может содержать повторяющиеся значения. Если необходимо выполнить вычисления только над уникальными значениями, исключив из набора значений повторяющиеся данные, то для этого применяется оператор DISTINCT (кроме COUNT (*)). По умолчанию вместо DISTINCT применяется оператор ALL, который выбирает все строки. Так как этот оператор неявно подразумевается при отсутствии DISTINCT, то его можно не указывать.

Агрегатные функции можно применить не только на всю таблицу, но также на группу значений. Для этого применяется команда GROUP BY, которая пишется после WHERE. После команды GROUP BY перечисляется название столбцов, по которым следует группировать данные. Предложение GROUP BY указывает, что результаты запроса следует разделить на группы, применить агрегатную функцию по отдельности к каждой группе и получить для каждой группы одну строку результатов.

В качестве элемента группировки должен выступать любой возвращаемый элемент, указанный в предложении SELECT, кроме значений агрегатных функций.

Если столбец, по которому производится группировка, содержит значение NULL, то строки со значением NULL составят отдельную группу.

Команда HAVING <условие> применяется для фильтрации строк, возвращаемых при использовании предложения GROUP BY. HAVING пишется после GROUP BY, имеет такой формат, как WHERE, но в качестве значения используется значение, возвращаемое агрегатными функциями.

3. Практическая часть

Дана таблица **Страны**:

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Австрия	Вена	83858	8741753	Европа
Азербайджан	Баку	86600	9705600	Азия
Албания	Тирана	28748	2866026	Европа
Алжир	Алжир	2381740	39813722	Африка
Ангола	Луанда	1246700	25831000	Африка
Аргентина	Буэнос-Айрес	2766890	43847000	Южная Америка
Афганистан	Кабул	647500	29822848	Азия
Бангладеш	Дакка	144000	160221000	Азия
Бахрейн	Манама	701	1397000	Азия
Белиз	Бельмопан	22966	377968	Северная Америка
Белоруссия	Минск	207595	9498400	Европа
Бельгия	Брюссель	30528	11250585	Европа
Бенин	Порто-Ново	112620	11167000	Африка
Болгария	София	110910	7153784	Европа
Боливия	Сукре	1098580	10985059	Южная Америка
Ботсвана	Габороне	600370	2209208	Африка
Бразилия	Бразилиа	8511965	206081432	Южная Америка
Буркина-Фасо	Уагадугу	274200	19034397	Африка
Бутан	Тхимпху	47000	784000	Азия
Великобритания	Лондон	244820	65341183	Европа
Венгрия	Будапешт	93030	9830485	Европа

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Венесуэла	Каракас	912050	31028637	Южная Америка
Восточный Тимор	Дили	14874	1167242	Азия
Вьетнам	Ханой	329560	91713300	Азия

Пример 1: Вывести максимальную площадь стран:

```
SELECT
    MAX(Площадь) AS Макс_площадь
FROM
    Страны
```

Пример 2: Вывести наименьшее население стран в Африке:

```
SELECT
    MIN(Население) AS Мин_население
FROM
    Страны
WHERE
    Континент = 'Африка'
```

Пример 3: Вывести суммарное население стран Северной и Южной Америки:

```
SELECT
    SUM(Население) AS Суммарное_население
FROM
    Страны
WHERE
    Континент = 'Северная Америка' OR
    Континент = 'Южная Америка'
```

Пример 4: Вывести среднее население стран, кроме европейских. Результат округлить до двух знаков:

```
SELECT
    ROUND(AVG(CAST(Население AS FLOAT)), 2) AS Среднее_население
FROM
    Страны
WHERE
    Континент != 'Европа'
```

Пример 5: Вывести количество стран, название которых начинается с буквы «С»:

```
SELECT
    COUNT(*) AS Количество
FROM
    Страны
```


WHERE

LEFT(Название, 1) = 'C'

Пример 6: Вывести количество континентов, где есть страны:

SELECT

COUNT(DISTINCT Континент) AS Количество_Континентов

FROM

Страны

Пример 7: Вывести разницу населения между странами с наибольшим и наименьшим количеством граждан:

SELECT

MAX(Население) - MIN(Население) AS Разница

FROM

Страны

Пример 8: Вывести количество стран на каждом континенте. Результат отсортировать по количеству стран по убыванию:

SELECT

Континент

, COUNT(Название) AS Количество_Стран

FROM

Страны

GROUP BY

Континент

ORDER BY

Количество_Стран DESC

Пример 9: Вывести количество стран по первым буквам в названии. Результат отсортировать в алфавитном порядке:

SELECT

LEFT(Название, 1) AS Первая_буква

, COUNT(Название) AS Количество_Стран

FROM

Страны

GROUP BY

LEFT(Название, 1)

ORDER BY

Первая_буква

Пример 10: Вывести список континентов, где плотность населения больше, чем 100 чел. на кв. км:

```
SELECT
    Континент
    , AVG(CAST(Население AS FLOAT) / Площадь) AS Сред_Плотность
FROM
    Страны
GROUP BY
    Континент
HAVING
    AVG(CAST(Население AS FLOAT) / Площадь) > 100
```

Пример 11: Ожидается, что через 25 лет население Европы и Азии вырастет на 20%, Северной Америки и Африки на 50%, а остальных частей мира – на 70%. Вывести список континентов с прогнозируемым населением:

```
SELECT
    Континент
    , CASE
        WHEN Континент IN ('Европа', 'Азия') THEN FLOOR(SUM(Население) * 1.2)

        WHEN Континент IN ('Северная Америка', 'Африка') THEN FLOOR(SUM(Насе-
ление) * 1.5)

        ELSE FLOOR(SUM(Население) * 1.7)
    END AS Суммарное_Население
FROM
    Страны
GROUP BY
    Континент
```

Пример 12: Вывести список континентов, где разница по населению между наибольшими и наименьшими странами не более в 1000 раз:

```
SELECT
    Континент
FROM
    Страны
GROUP BY
    Континент
HAVING MAX(Население) <= 1000 * MIN(Население)
```

Пример 13: Вывести количество стран, у которых нет столицы (не введена в базу):

```
SELECT
    COUNT(*) AS Количество
FROM
    Страны
WHERE
    Столица IS NULL
```

Пример 14: Вывести количество символов в самых длинных и коротких названиях стран и столиц:

```
SELECT
    MAX(LEN(Название)) AS Дл_Название
    , MAX(LEN(Столица)) AS Дл_Столица
    , MIN(LEN(Название)) AS Кр_Название
    , MIN(LEN(Столица)) AS Кр_Столица
FROM
    Страны
```

Пример 15: Вывести список континентов, у которых средняя плотность среди стран с площадью более 1 млн. кв. км больше, чем 30 чел. на кв. км. Результат отсортировать по плотности по убыванию:

```
SELECT
    Континент
    , AVG(CAST(Население AS FLOAT) / Площадь) AS Плотность
FROM
    Страны
WHERE
    Площадь > 1000000
GROUP BY
    Континент
HAVING
    AVG(CAST(Население AS FLOAT) / Площадь) > 30
ORDER BY
    Плотность DESC
```

4. Задание

1. Вывести минимальную площадь стран.
2. Вывести наибольшую по населению страну в Северной и Южной Америке.
3. Вывести среднее население стран. Результат округлить до одного знака.
4. Вывести количество стран, у которых название заканчивается на «ан», кроме стран, у которых название заканчивается на «стан».
5. Вывести количество континентов, где есть страны, название которых начинается с буквы «Р».
6. Сколько раз страна с наибольшей площадью больше, чем страна с наименьшей площадью?
7. Вывести количество стран с населением больше, чем 100 млн. чел. на каждом континенте. Результат отсортировать по количеству стран по возрастанию.
8. Вывести количество стран по количеству букв в названии. Результат отсортировать по убыванию.
9. Ожидается, что через 20 лет население мира вырастет на 10%. Вывести список континентов с прогнозируемым населением:
10. Вывести список континентов, где разница по площади между наибольшими и наименьшими странами не более в 10000 раз:
11. Вывести среднюю длину названий Африканских стран.
12. Вывести список континентов, у которых средняя плотность среди стран с населением более 1 млн. чел. больше, чем 30 чел. на кв. км.

Практическая работа № 6

Соединения таблиц

1. Цель работы

1. Изучить неявные соединения таблиц.
2. Изучить явные соединения таблиц.
3. Изучить внутреннее соединение таблиц.
4. Изучить внешнее соединение таблиц.
5. Изучить соединения таблиц со своей копией.

2. Теоретическая часть

Данные часто хранятся в несколько связанных таблицах. Для выбора данных используются разные методы соединения таблиц.

Когда выбор данных осуществляется из нескольких таблиц, в конструкции SELECT для каждого поля указывается таблица в виде <таблица>.<поле>. Если название поля уникальное, то можно его указать без таблицы, иначе это обязательно, чтобы избежать коллизий. Чтобы не повторить длинные названия таблиц, можно использовать псевдоним для таблиц. Псевдоним указывается в конструкции как FROM.

При *неявном соединении таблиц* формат конструкций FROM и WHERE имеет следующий вид:

FROM <таблица1> [псевдоним1], <таблица2> [псевдоним2]...

[WHERE <условие_соединения> [AND <условие_поиска>]...]

Таким образом, если более одной таблицы присутствует в конструкции FROM, то их разделяют запятой.

Если условие соединения не указывать, тогда результат будет декартовым произведением, то есть для каждой строки одной из таблиц берутся все возможные сочетания строк из других таблиц.

Для *явного соединения таблиц* используется команда JOIN. У явного соединения есть следующие разновидности:

– Внутреннее соединение – осуществляется с помощью команды INNER JOIN. Из двух таблиц берутся только связанные строки. INNER JOIN имеет следующий формат записи:

<таблица1> INNER JOIN <таблица2> ON <таблица1>.<связующее_поле> = <таблица2>.<связующее_поле>.

При внутреннем соединении слово INNER можно пропустить.

– Внешнее соединение – осуществляется с помощью команды OUTER JOIN. OUTER JOIN имеет следующий формат записи:

<таблица1> LEFT | RIGHT | FULL OUTER JOIN <таблица2> ON <таблица1>.<связующее_поле> = <таблица2>.<связующее_поле>.

У внешнего соединения есть три разновидности:

– Левое внешнее соединение LEFT OUTER JOIN – из таблицы, название которой является левым операндом команды JOIN, выбираются все строки, из второй таблицы – только те записи, которые имеют связь с первой таблицей.

– Правое внешнее соединение RIGHT OUTER JOIN – из таблицы, название которой является правым операндом команды JOIN, выбираются все строки, из первой таблицы только те записи, которые имеют связь со второй таблицей.

– Полное внешнее соединение FULL OUTER JOIN – из обеих таблиц выбираются все строки.

При использовании внешних соединений, слово OUTER можно пропустить.

– Перекрестное соединение CROSS JOIN – декартово произведение двух таблиц. CROSS JOIN имеет следующий формат записи:

<таблица1> CROSS JOIN <таблица2>.

При выборе данных из трех и более таблиц, с помощью явного соединения, результат зависит от порядка соединения.

Используя соединение, можно связать таблицу с собой. При таком соединении псевдоним обязателен.

Набор данных, полученных из нескольких таблиц, не отличается от набора, полученного из одной таблицы. Ему тоже можно применить группировки и т.д.

3. Практическая часть

Даны следующие таблицы:

Таблица 1. Факультет

Аббревиатура	Название
Ен	Естественные науки
Гн	Гуманитарные науки
Ит	Информационные технологии
Фм	Физико-математический

Таблица 2. Кафедра

Шифр	Название	Факультет
вм	Высшая математика	ен
ис	Информационные системы	ит
мм	Математическое моделирование	фм
оф	Общая физика	ен
пи	Прикладная информатика	ит
эф	Экспериментальная физика	фм

Таблица 3. Сотрудник

Таб_номер	Шифр	Фамилия	Должность	Зарплата	Шеф
101	пи	Прохоров П.П.	зав. кафедрой	35 000,00 р.	101
102	пи	Семенов С.С.	преподаватель	25 000,00 р.	101
105	пи	Петров П.П.	преподаватель	25 000,00 р.	101
153	пи	Сидорова С.С.	инженер	15 000,00 р.	102
201	ис	Андреев А.А.	зав. кафедрой	35 000,00 р.	201
202	ис	Борисов Б.Б.	преподаватель	25 000,00 р.	201
241	ис	Глухов Г.Г.	инженер	20 000,00 р.	201
242	ис	Чернов Ч.Ч.	инженер	15 000,00 р.	202
301	мм	Басов Б.Б.	зав. кафедрой	35 000,00 р.	301
302	мм	Сергеева С.С.	преподаватель	25 000,00 р.	301
401	оф	Волков В.В.	зав. кафедрой	35 000,00 р.	401
402	оф	Зайцев З.З.	преподаватель	25 000,00 р.	401
403	оф	Смирнов С.С.	преподаватель	15 000,00 р.	401
435	оф	Лисин Л.Л.	инженер	20 000,00 р.	402
501	вм	Кузнецов К.К.	зав. кафедрой	35 000,00 р.	501
502	вм	Романцев Р.Р.	преподаватель	25 000,00 р.	501
503	вм	Соловьев С.С.	преподаватель	25 000,00 р.	501
601	эф	Зверев З.З.	зав. кафедрой	35 000,00 р.	601
602	эф	Сорокина С.С.	преподаватель	25 000,00 р.	601
614	эф	Григорьев Г.Г.	инженер	20 000,00 р.	602

Таблица 4. Специальность

Номер	Направление	Шифр
01.03.04	Прикладная математика	мм
09.03.02	Информационные системы и технологии	ис
09.03.03	Прикладная информатика	пи
14.03.02	Ядерные физика и технологии	эф
38.03.05	Бизнес-информатика	ис

Таблица 5. Дисциплина

Код	Объем	Название	Исполнитель
101	320	Математика	вм
102	160	Информатика	пи
103	160	Физика	оф
202	120	Базы данных	ис
204	160	Электроника	эф
205	80	Программирование	пи
209	80	Моделирование	мм

Таблица 6. Заявка

Номер	01.03.04			09.03.02						09.03.03					14.03.02				38.03.05			
Код	101	205	209	101	102	103	202	205	209	101	102	103	202	205	101	102	103	204	101	103	202	209

Таблица 7. Зав_кафедрой

Таб_номер	101	201	301	401	501	601
Стаж	15	18	20	10	18	8

Таблица 8. Инженер

Таб_номер	153	241	242	435	614
Специальность	электроник	электроник	программист	электроник	программист

Таблица 9. Преподаватель

Таб_номер	Звание	Степень
101	профессор	д. т.н.
102	доцент	к. ф.-м. н.
105	доцент	к. т.н.
201	профессор	д. ф.-м. н.
202	доцент	к. ф.-м. н.
301	профессор	д. т.н.
302	доцент	к. т.н.
401	профессор	д. т.н.
402	доцент	к. т.н.
403	ассистент	—
501	профессор	д. ф.-м. н.
502	профессор	д. ф.-м. н.
503	доцент	к. ф.-м. н.
601	профессор	д. ф.-м. н.

Таблица 10. Студент

Рег_номер	Номер	Фамилия
10101	09.03.03	Николаева Н. Н.
10102	09.03.03	Иванов И. И.
10103	09.03.03	Крюков К. К.
20101	09.03.02	Андреев А. А.
20102	09.03.02	Федоров Ф. Ф.
30101	14.03.02	Бондаренко Б. Б.
30102	14.03.02	Цветков К. К.
30103	14.03.02	Петров П. П.
50101	01.03.04	Сергеев С. С.
50102	01.03.04	Кудрявцев К. К.
80101	38.03.05	Макаров М. М.
80102	38.03.05	Яковлев Я. Я.

Таблица 11. Экзамен

Дата	Код	Рег_номер	Таб_номер	Аудитория	Оценка
05.06.2015	102	10101	102	т505	4
05.06.2015	102	10102	102	т505	4
05.06.2015	202	20101	202	т506	4
05.06.2015	202	20102	202	т506	3
07.06.2015	102	30101	105	ф419	3
07.06.2015	102	30102	101	т506	4
07.06.2015	102	80101	102	м425	5
09.06.2015	205	80102	402	м424	4
09.06.2015	209	20101	302	ф333	3
10.06.2015	101	10101	501	т506	4
10.06.2015	101	10102	501	т506	4
10.06.2015	204	30102	601	ф349	5
10.06.2015	209	80101	301	э105	5
10.06.2015	209	80102	301	э105	4
12.06.2015	101	80101	502	с324	4
15.06.2015	101	30101	503	ф417	4
15.06.2015	101	50101	501	ф201	5
15.06.2015	101	50102	501	ф201	3
15.06.2015	103	10101	403	ф414	4
17.06.2015	102	10101	102	т505	5

Пример 1: Выбрать факультет и кафедры, используя неявное соединение. Результат отсортировать по алфавиту:

```
SELECT
    Ф.Название AS Факультет
    , К.Название AS Кафедра
FROM
    Факультет Ф, Кафедра К
WHERE
    Ф.Аббревиатура = К.Факультет
ORDER BY
    Факультет, Кафедра
```

Пример 2: Выбрать факультет и кафедры, используя явное соединение. Результат отсортировать по алфавиту:

```
SELECT
    Ф.Название AS Факультет
    , К.Название AS Кафедра
FROM
    Факультет Ф
        INNER JOIN Кафедра К ON Ф.Аббревиатура = К.Факультет
ORDER BY
    Факультет, Кафедра
```

Пример 3: Выбрать все факультеты и их кафедры, если существуют. Результат отсортировать по алфавиту:

```
SELECT
    Ф.Название AS Факультет
    , К.Название AS Кафедра
FROM
    Факультет Ф
        LEFT OUTER JOIN Кафедра К ON Ф.Аббревиатура = К.Факультет
ORDER BY
    Факультет, Кафедра
```

Пример 4: Вывести из таблиц «Кафедра», «Специальность» и «Студент» данные о студентах:

```
SELECT
    С.Фамилия
    , П.Направление
    , К.Название AS Кафедра
FROM
```

Студент С

INNER JOIN Специальность П ON С.Номер = П.Номер

INNER JOIN Кафедра К ON П.Шифр = К.Шифр

Пример 5: Вывести для каждого сотрудника фамилию, должность, зарплату и фамилию его непосредственного руководителя:

SELECT

С.Фамилия

, С.Должность

, С.Зарплата

, П.Фамилия AS Руководитель

FROM

Сотрудник С

INNER JOIN Сотрудник П ON С.Шеф = П.Таб_номер

Пример 6: Вывести список студентов, сдавших хотя бы один экзамен. По правилам соединения, студенты, не сдававшие экзамены, в выборке представлены не будут:

SELECT

С.Фамилия

FROM

Студент С

INNER JOIN Экзамен Э ON С.Рег_номер = Э.Рег_номер

GROUP BY

С.Фамилия

Пример 7: Вывести из таблиц «Студент» и «Экзамен» учетные номера и фамилии студентов, а также количество сданных экзаменов и средний балл для каждого студента:

SELECT

С.Фамилия

, COUNT(Э.Оценка) AS [Количество экзаменов]

, AVG(Э.Оценка) AS [Средний балл]

FROM

Студент С

INNER JOIN Экзамен Э ON С.Рег_номер = Э.Рег_номер

GROUP BY

С.Фамилия

Пример 8: Вывести список заведующих кафедрами и их зарплаты, и стаж работы:

SELECT

С.Фамилия

, С.Зарплата

, З.Стаж

FROM

Сотрудник С

INNER JOIN Зав_кафедрой З ON С.Таб_номер = З.Таб_номер

Пример 9: Вывести список кандидатов и докторов физико-математических наук:

SELECT

С.Фамилия

, П.Степень

FROM

Сотрудник С

INNER JOIN Преподаватель П ON С.Таб_номер = П.Таб_номер

WHERE

П.Степень IN ('к.ф.-м.н.', 'д.ф.-м.н.')

Пример 10: Вывести название дисциплины, фамилию, должность и степень преподавателя, дату и место проведения экзаменов в хронологическом порядке:

SELECT DISTINCT

Д.Название AS Дисциплина

, С.Фамилия

, С.Должность

, П.Степень

, Э.Дата

, Э.Аудитория

FROM

Экзамен Э

INNER JOIN Дисциплина Д ON Э.Код = Д.Код

INNER JOIN Сотрудник С ON Э.Таб_номер = С.Таб_номер

INNER JOIN Преподаватель П ON Э.Таб_номер = П.Таб_номер

ORDER BY

Э.Дата

Пример 11: Вывести фамилию преподавателей и количество их экзаменов:

SELECT

С.Фамилия

, COUNT(Э.Дата) AS [Количество экзаменов]

FROM

Экзамен Э

INNER JOIN Сотрудник С ON Э.Таб_номер = С.Таб_номер

GROUP BY

С.Фамилия

Пример 12: Вывести список студентов, не сдавших ни одного экзамена:

SELECT

С.Фамилия

FROM

Студент С

LEFT OUTER JOIN Экзамен Э **ON** С.Рег_номер = Э.Рег_номер

WHERE

Э.Рег_номер IS NULL

4. Задание

1. Вывести из таблиц «Кафедра», «Специальность» и «Студент» данные о студентах, которые обучаются на данном факультете (например, «ит»).
2. Вывести из таблиц «Кафедра», «Специальность» и «Сотрудник» данные о выпускающих кафедрах (факультет, шифр, название, фамилию заведующего). Выпускающей считается та кафедра, на которую есть ссылки в таблице «Специальность».
3. Вывести в запросе для каждого сотрудника номер и фамилию его непосредственного руководителя. Для заведующих кафедрами поле руководителя оставить пустым.
4. Вывести список студентов, сдавших минимум два экзамена.
5. Вывести список инженеров с зарплатой, меньшей 20000 руб.
6. Вывести список студентов, сдавших экзамены в заданной аудитории.
7. Вывести из таблиц «Студент» и «Экзамен» учетные номера и фамилии студентов, а также количество сданных экзаменов и средний балл для каждого студента только для тех студентов, у которых средний балл не меньше заданного (например, 4).
8. Вывести список заведующих кафедрами и их зарплаты, и степень.
9. Вывести список профессоров.
10. Вывести название дисциплины, фамилию, должность и степень преподавателя, дату и место проведения экзаменов в хронологическом порядке в заданном интервале даты.
11. Вывести фамилию преподавателей, принявших более трех экзаменов.
12. Вывести список студентов, не сдавших ни одного экзамена в указанной дате.

Практическая работа № 7

Объединение результатов нескольких запросов

1. Цель работы

1. Изучить основы объединения результатов запросов.
2. Изучить UNION.
3. Изучить EXCEPT.
4. Изучить INTERSECT.

2. Теоретическая часть

Для объединения результатов двух или более запросов в одну таблицу используется команда UNION. Команда UNION объединяет вывод двух или более запросов в единый набор строк и столбцов и имеет вид:

Первый запрос

UNION [ALL]

Второй запрос

...

Для объединения результатов нескольких запросов с помощью UNION, они должны соответствовать следующим требованиям:

- содержать одинаковое количество столбцов;
- типы данных столбцов должны совпадать во всех запросах;
- в промежуточных запросах нельзя использовать сортировку ORDER BY.

Чтобы отсортировать результат объединения, в конце запроса добавляется ORDER BY. Названия столбцов в запросах могут отличаться. Поэтому в команде ORDER BY указывается название столбцов с первого запроса.

Если объединяемые наборы содержат в строках идентичные значения, то при объединении повторяющиеся строки удаляются.

Если необходимо при объединении сохранить повторяющиеся строки, то для этого используется параметр ALL.

Все запросы выполняются независимо друг от друга, а уже их вывод объединяется.

В объединяемых запросах можно использовать одну и ту же таблицу.

Чтобы найти разность двух выборок, то есть те строки, которые есть в первой выборке, но которых нет во второй, используется команда EXCEPT. Команда EXCEPT имеет следующий вид:

Первый запрос

EXCEPT

Второй запрос.

Возвращаются все различные значения, указанные слева от оператора EXCEPT. Эти значения возвращаются, если они отсутствуют в результатах выполнения правого запроса.

Требования к использованию команды EXCEPT такие же, как к команде UNION.

Если сравниваются значения столбцов с целью определения различных строк, два значения NULL считаются равными.

Команда INTERSECT позволяет найти общие строки в результатах двух запросов, то есть данный оператор выполняет операцию пересечения множеств. Команда INTERSECT имеет следующий вид:

Первый запрос

INTERSECT

Второй запрос.

Требования к использованию команды INTERSECT такие же, как к командам UNION и EXCEPT.

3. Практическая часть

Дана таблица **Страны**:

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Австрия	Вена	83858	8741753	Европа
Азербайджан	Баку	86600	9705600	Азия
Албания	Тирана	28748	2866026	Европа
Алжир	Алжир	2381740	39813722	Африка
Ангола	Луанда	1246700	25831000	Африка
Аргентина	Буэнос-Айрес	2766890	43847000	Южная Америка
Афганистан	Кабул	647500	29822848	Азия
Бангладеш	Дакка	144000	160221000	Азия
Бахрейн	Манама	701	1397000	Азия
Белиз	Бельмопан	22966	377968	Северная Америка
Белоруссия	Минск	207595	9498400	Европа
Бельгия	Брюссель	30528	11250585	Европа
Бенин	Порто-Ново	112620	11167000	Африка
Болгария	София	110910	7153784	Европа
Боливия	Сукре	1098580	10985059	Южная Америка
Ботсвана	Габороне	600370	2209208	Африка
Бразилия	Бразилиа	8511965	206081432	Южная Америка
Буркина-Фасо	Уагадугу	274200	19034397	Африка
Бутан	Тхимпху	47000	784000	Азия
Великобритания	Лондон	244820	65341183	Европа
Венгрия	Будапешт	93030	9830485	Европа

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Венесуэла	Каракас	912050	31028637	Южная Америка
Восточный Тимор	Дили	14874	1167242	Азия
Вьетнам	Ханой	329560	91713300	Азия

Пример 1: Вывести объединенный результат выполнения запросов, которые выбирают страны с площадью больше 1 млн. кв. км и с населением больше 100 млн. чел.:

SELECT

Название

,Столица

,Площадь

,Население

,Континент

FROM

Страны

WHERE

Площадь > 1000000

UNION

SELECT

Название

,Столица

,Площадь

,Население

,Континент

FROM

Страны

WHERE

Население > 100000000

Пример 2: Вывести объединенный результат выполнения запросов, которые выбирают страны с площадью больше 1 млн. кв. км и с населением больше 100 млн. чел., при этом оставляет дубликаты:

SELECT

Название

,Столица

,Площадь

,Население

,Континент

FROM

Страны

WHERE


```

        Площадь > 1000000
UNION ALL
SELECT
        Название
        ,Столица
        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
FROM
        Страны
WHERE
        Население > 1000000000

```

Пример 3: Вывести объединенный результат выполнения запросов, которые выбирают европейские страны с плотностью более 300 чел. на кв. км, азиатские страны с плотностью более 200 чел. на кв. км. и африканские страны с плотностью более 150 чел. на кв. км. Результат отсортировать по континентам:

```

SELECT
        Название
        ,Столица
        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
FROM
        Страны
WHERE
        Континент = 'Европа' AND
        CAST(Население AS FLOAT) / Площадь > 400
UNION
SELECT
        Название
        ,Столица
        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
FROM
        Страны
WHERE
        Континент = 'Азия' AND
        CAST(Население AS FLOAT) / Площадь > 300

```

UNION

SELECT

Название

,Столица

,Площадь

,Население

,Континент

FROM

Страны

WHERE

Континент = 'Африка' AND

CAST(Население AS FLOAT) / Площадь > 200

ORDER BY

Континент

Пример 4: Вывести список стран с площадью больше 1 млн. кв. км, исключить страны с населением больше 10 млн. чел.:

SELECT

Название

,Столица

,Площадь

,Население

,Континент

FROM

Страны

WHERE

Площадь > 1000000

EXCEPT

SELECT

Название

,Столица

,Площадь

,Население

,Континент

FROM

Страны

WHERE

Население > 10000000

Пример 5: Вывести список стран с площадью больше 1 млн. кв. км и с населением больше 100 млн. чел.:

SELECT

Название

,Столица

,Площадь

,Население

,Континент

FROM

Страны

WHERE

Площадь > 1000000

INTERSECT

SELECT

Название

,Столица

,Площадь

,Население

,Континент

FROM

Страны

WHERE

Население > 100000000

4. Задание

1. Вывести объединенный результат выполнения запросов, которые выбирают страны с площадью меньше 500 кв. км и с площадью больше 5 млн. кв. км:
2. Вывести список стран с площадью больше 1 млн. кв. км, исключить страны с населением меньше 100 млн. чел.:
3. Вывести список стран с площадью меньше 500 кв. км и с населением меньше 100 тыс. чел.

Практическая работа № 8

Подзапросы

1. Цель работы

1. Изучить виды вложенных запросов.
2. Изучить некоррелирующие подзапросы.
3. Изучить коррелирующие подзапросы.
4. Изучить применение конструкции IN к подзапросам.
5. Изучить конструкцию ALL.
6. Изучить конструкцию ANY/SOME.
7. Изучить конструкцию EXISTS.

2. Теоретическая часть

В зависимости от контекста запрос SELECT может вернуть результат в одном из трех видов:

- таблица – запрос возвращает набор строк и столбцов;
- список значений – запрос возвращает значения только одного столбца, но, возможно, в нескольких строках;
- скалярное значение – запрос возвращает значение одного столбца в одной строке.

Результат запроса можно использовать в других запросах. Место использования запроса зависит от вида возвращаемого значения.

В предложении SELECT может использоваться только скалярный подзапрос, который возвращает одно значение.

Подзапросы пишутся в скобках.

Подзапросы, которые используются в предложении FROM, должны иметь название для всех столбцов.

Подзапросы, которые используются в предложении FROM, должны иметь псевдоним.

Подзапросы, которые используются в предложении WHERE для сравнения со столбцом, должны возвращать значения соответствующего типа.

Подзапросы, которые используются в предложении WHERE для сравнения со столбцом, должны быть вторым операндом оператора сравнения.

Каждый вложенный запрос, в свою очередь, может содержать один или более вложенный запрос. В инструкцию можно вложить любое количество запросов (в практике, до 32). Подзапросы выполняются, начиная с самого глубокого.

Подзапросы бывают коррелирующими и некоррелирующими. В некоррелирующих подзапросах команды выполняются один раз, то есть результат подзапроса не зависит от

строк, выбранных в основном запросе. Такой подзапрос выполняется один раз для всего внешнего запроса.

Также существуют коррелирующие подзапросы, результаты которых зависят от строк, выбранных в основном запросе. Коррелирующие подзапросы имеют связь с внешним запросом и выполняется столько раз, сколько строк в основном запросе.

Выполнение коррелирующих подзапросов сильно влияет на эффективность выполнения, поэтому их необходимо использовать только в крайних случаях.

Команду IN можно применить к результатам подзапросов, возвращающих список значений.

В предложении WHERE значение столбца можно сравнить со списками значений, возвращаемых подзапросом. Для этого используются операторы ALL и ANY|SOME.

При использовании оператора ALL условие в операции сравнения должно быть верно для всех значений, возвращаемых подзапросом.

При использовании оператора ANY|SOME условие в операции сравнения должно быть верно для всех значений, возвращаемых подзапросом.

Оператор EXISTS проверяет, возвращает ли подзапрос какое-либо значение. Здесь важны не данные, а их существование.

3. Практическая часть

Дана таблица **Страны**:

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Австрия	Вена	83858	8741753	Европа
Азербайджан	Баку	86600	9705600	Азия
Албания	Тирана	28748	2866026	Европа
Алжир	Алжир	2381740	39813722	Африка
Ангола	Луанда	1246700	25831000	Африка
Аргентина	Буэнос-Айрес	2766890	43847000	Южная Америка
Афганистан	Кабул	647500	29822848	Азия
Бангладеш	Дакка	144000	160221000	Азия
Бахрейн	Манама	701	1397000	Азия
Белиз	Бельмопан	22966	377968	Северная Америка
Белоруссия	Минск	207595	9498400	Европа
Бельгия	Брюссель	30528	11250585	Европа
Бенин	Порто-Ново	112620	11167000	Африка
Болгария	София	110910	7153784	Европа
Боливия	Сукре	1098580	10985059	Южная Америка
Ботсвана	Габороне	600370	2209208	Африка
Бразилия	Бразилиа	8511965	206081432	Южная Америка
Буркина-Фасо	Уагадугу	274200	19034397	Африка
Бутан	Тхимпху	47000	784000	Азия

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Великобритания	Лондон	244820	65341183	Европа
Венгрия	Будапешт	93030	9830485	Европа
Венесуэла	Каракас	912050	31028637	Южная Америка
Восточный Тимор	Дили	14874	1167242	Азия
Вьетнам	Ханой	329560	91713300	Азия

Пример 1: Вывести список стран и процентное соотношение их населения к суммарному населению мира:

```

SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
    ,ROUND(CAST(Население AS FLOAT) * 100 /
        (
            SELECT
                SUM(Население)
            FROM
                Страны
        ), 3) AS Процент
FROM
    Страны
ORDER BY
    Процент DESC

```

Пример 2: Вывести список стран мира, население которых больше, чем среднее население всех стран мира:

```

SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
FROM
    Страны
WHERE
    Население > (
        SELECT
            AVG(Население)
        FROM
            Страны)

```

Пример 3: С помощью подзапроса вывести список африканских стран, население которых больше 50 млн. чел.:

```
SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
FROM
    (
        SELECT
            Название
            ,Столица
            ,Площадь
            ,Население
            ,Континент
        FROM
            Страны
        WHERE
            Континент = 'Африка') A
WHERE
    Население > 50000000
```

Пример 4: Вывести список стран и процентное соотношение их населения к суммарному населению к той части мира, где они находятся:

```
SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
    ,ROUND(CAST(Население AS FLOAT) * 100 /
    (
        SELECT
            SUM(Население)
        FROM
            Страны Б
        WHERE
            А.Континент = Б.Континент
    ), 3) AS Процент
```

```
FROM
    Страны А
ORDER BY
    Процент DESC
```

Пример 5: Вывести список стран мира, население которых больше, чем среднее население стран в той части света, где они находятся:

```
SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
FROM
    Страны А
WHERE
    Население > (
        SELECT
            AVG(Население)
        FROM
            Страны Б
        WHERE
            Б.Континент = А.Континент
    )
```

Пример 6: Вывести список стран мира, которые находятся в тех частях света, среднее население которых больше, чем общемировое:

```
SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
FROM
    Страны
WHERE
    Континент IN (
        SELECT
            Континент
        FROM
            Страны
```



```

GROUP BY
    Континент
HAVING
    AVG(Население) > (
        SELECT
            AVG(Население)
        FROM
            Страны
        )
    )

```

Пример 7: Вывести список азиатских стран, население которых больше, чем в любой европейской стране:

```

SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
FROM
    Страны
WHERE
    Континент = 'Азия'
    AND
    Население > ALL (
        SELECT
            Население
        FROM
            Страны
        WHERE
            Континент = 'Европа'
    )

```

Пример 8: Вывести список европейских стран, население которых больше, чем население хотя бы одной южноамериканской страны:

```

SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население

```

```

        ,Континент
FROM
        Страны
WHERE
        Континент = 'Европа'
        AND
        Население > ANY (
                SELECT
                        Население
                FROM
                        Страны
                WHERE
                        Континент = 'Южная Америка'
        )

```

Пример 9: Если в Африке есть хотя бы одна страна, население которой больше 100 млн. чел., вывести список всех африканских стран:

```

SELECT
        Название
        ,Столица
        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
FROM
        Страны
WHERE
        Континент = 'Африка'
        AND
        EXISTS (
                SELECT
                        *
                FROM
                        Страны
                WHERE
                        Континент = 'Африка'
                        AND
                        Население > 1000000000
        )

```

Пример 10: Вывести список стран в той части света, где находится страна «Науру»:

```
SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
FROM
    Страны
WHERE
    Континент = (
        SELECT
            Континент
        FROM
            Страны
        WHERE
            Название = 'Науру'
    )
```

Пример 11: Вывести список стран, население которых не превышает населения страны «Гондурас»:

```
SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
FROM
    Страны
WHERE
    Население !> (
        SELECT
            Население
        FROM
            Страны
        WHERE
            Название = 'Гондурас'
    )
```

Пример 12: Вывести название страны с наибольшим населением среди стран с наименьшим населением на каждом континенте:

```
SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
FROM
    Страны
WHERE
    Население = (
        SELECT
            MAX(Мин_Нас)
        FROM
            (
                SELECT
                    MIN(Население) AS Мин_Нас
                FROM
                    Страны
                GROUP BY
                    Континент
            ) A
    )
```

4. Задание

1. Вывести список стран и процентное соотношение площади каждой из них к общей площади всех стран мира.
2. Вывести список стран мира, плотность населения которых больше, чем средняя плотность населения всех стран мира.
3. С помощью подзапроса вывести список европейских стран, население которых меньше 5 млн. чел.
4. Вывести список стран и процентное соотношение их площади к суммарной площади той части мира, где они находятся.
5. Вывести список стран мира, площадь которых больше, чем средняя площадь стран той части света, где они находятся.
6. Вывести список стран мира, которые находятся в тех частях света, средняя плотность населения которых превышает общемировую.

7. Вывести список южноамериканских стран, в которых живет больше людей, чем в любой африканской стране.
8. Вывести список африканских стран, в которых живет больше людей, чем хотя бы в одной южноамериканской стране.
9. Если в Африке есть хотя бы одна страна, площадь которой больше 2 млн. кв. км, вывести список всех африканских стран.
10. Вывести список стран той части света, где находится страна «Фиджи».
11. Вывести список стран, население которых не превышает население страны «Фиджи».
12. Вывести название страны с наибольшим населением среди стран с наименьшей площадью на каждом континенте.

Практическая работа № 9

Основы DDL

1. Цель работы

1. Изучить создание базы данных.
2. Изучить удаление базы данных.
3. Изучить создание таблиц.
4. Изучить удаление таблиц.

2. Теоретическая часть

В стандарте ANSI нет команды для создания базы данных. Но в языке Transact-SQL существует команда CREATE DATABASE. Процедура создания базы данных обычно закрепляется только за администратором базы данных, и часто выполняется с использованием графического интерфейса.

Синтаксис команды создания базы данных имеет следующий вид: CREATE DATABASE <название_базы_данных>. В SQL Server можно создать до 32768 баз данных.

После создания базы данных, ее можно установить в качестве текущей с помощью команды USE: USE <название_базы_данных>.

Для удаления базы данных применяется команда DROP DATABASE, которая имеет следующий синтаксис: DROP DATABASE <название_базы_данных>. Перед удалением рекомендуется создать резервную копию базы данных.

Основные объекты базы данных – таблицы. Они содержат все данные в базе данных. В таблицах данные организованы в виде строк и столбцов. Каждая строка представляет собой уникальную запись, а каждый столбец – поле записи.

В базе данных можно создать до 2147483648 таблиц. Стандартная таблица может содержать до 1024 столбцов. Число строк и размер таблицы ограничиваются только пространством для хранения на сервере.

При создании таблицы можно установить отдельные свойства для каждого столбца. Данные в таблице могут быть сжаты либо по строкам, либо по страницам. Сжатие данных может позволить отображать больше строк на странице.

Название базы данных и таблиц может состоять максимум из 128 символов, а имена локальных временных таблиц – из 116 символов.

Таблицы можно создать с помощью конструктора или с помощью команд Transact-SQL. Для создания таблиц существует команда CREATE TABLE. Ее упрощённый синтаксис имеет следующий вид:

CREATE TABLE <название_таблицы>

(<название_столбца1> <тип_данных>,
 ...
 <название_столбцаN> <тип_данных>)

После типа данных можно добавить ограничения к значениям столбца.

Ограничение NULL | NOT NULL определяет, допустимы ли для столбца значения NULL.

Ограничение UNIQUE обеспечивает уникальность значения для указанного столбца. В таблице может быть несколько ограничений UNIQUE.

Ограничение PRIMARY KEY обеспечивает целостность и уникальность значения для указанного столбца с помощью уникального индекса. Можно создать только одно ограничение PRIMARY KEY для таблицы.

Ограничение CHECK обеспечивает целостность домена путем ограничения возможных значений, которые можно ввести в столбец. Условие может включать несколько логических выражений, соединенных операторами AND и OR.

Ограничение DEFAULT позволяет указать значение по умолчанию, если значение не задано. Оно может содержать значения констант, функции, или значение NULL. При этом, нельзя ссылаться на другой столбец таблицы, а также на другие таблицы, представления или хранимые процедуры. Его нельзя создавать для столбцов с типом данных timestamp или столбцов со свойством IDENTITY.

Свойство IDENTITY указывает, что новый столбец является столбцом идентификаторов. Для этого столбца формируется уникальное последовательное значение. Обычно используется вместе с ограничением PRIMARY KEY для поддержания уникальности идентификаторов строк в таблице. Свойство IDENTITY может назначаться столбцам типа tinyint, smallint, int, bigint, decimal(p,0) или numeric(p,0). Для таблицы можно создать только один столбец идентификаторов. Ограниченные значения по умолчанию и ограничения DEFAULT не могут использоваться в столбце идентификаторов. Необходимо указать как начальное значение, так и приращение, или же не указывать ничего. Если ничего не указано, применяется значение по умолчанию (1,1).

Для удаления таблиц используется команда DROP TABLE, которая имеет следующий синтаксис: DROP TABLE <название_таблицы>.

3. Практическая часть

Таблица *Страны*:

Страна	Столица	Часть света	Население тыс. чел.	Площадь тыс. кв. км	Тип управления
Австрия	Вена	Европа	7513	84	4
Великобритания	Лондон	Европа	55928	244	1
Греция	Афины	Европа	9280	132	4

Страна	Столица	Часть света	Население тыс. чел.	Площадь тыс. кв. км	Тип управления
Афганистан	Кабул	Азия	20340	647	3
Монголия	Улан-Батор	Азия	1555	1565	4
Япония	Токио	Азия	114276	372	1
Франция	Париж	Европа	53183	551	3
Швеция	Стокгольм	Европа	8268	450	1
Египет	Каир	Африка	38740	1001	3
Сомали	Могадишо	Африка	3350	638	
США	Вашингтон	Америка	217700	9363	3
Мексика	Мехико	Америка	62500	1973	4
Мальта	Валлетта	Европа	330	0,3	4
Монако	Монако	Европа	25	0,2	1

Таблица *Управление*:

ID	Вид
1	Конституционная монархия
2	Абсолютная монархия
3	Президентская республика
4	Парламентская республика
5	Военная хунта

Пример 1: Создать таблицу «Управление»:

CREATE TABLE Управление

```
(
    ID      INT ,
    Вид     VARCHAR(20)
)
```

Пример 2: Удалить таблицу «Управление»:

DROP TABLE Управление

Пример 3: Создать таблицу «Управление», значения столбца «ID» сделать уникальными, а столбец «Вид» запретить оставлять незаполненным:

CREATE TABLE Управление

```
(
    ID      INT UNIQUE,
    Вид     VARCHAR(20) NOT NULL
)
```


Пример 4: Создать таблицу «Управление», в столбец «ID» разрешить вводить значения меньше 200, а для столбца «Вид» установить значение по умолчанию «Президентская республика»:

```
CREATE TABLE Управление
(
    ID    INT CHECK (ID < 200),
    Вид   VARCHAR(20) DEFAULT 'Президентская республика'
)
```

Пример 5: Создать таблицу «Управление», столбец «ID» определить, как основной ключ, и настроить автоматический идентификатор с начальным значением 5 и с шагом 3:

```
CREATE TABLE Управление
(
    ID    INT PRIMARY KEY IDENTITY(5,3),
    Вид   VARCHAR(20)
)
```

4. Задание

1. Создать таблицу «Управление_ВашаФамилия». Определить основной ключ, идентификатор, значение по умолчанию
2. Создать таблицу «Страны_ВашаФамилия». Определить основной ключ, разрешение / запрет на NULL, условие на вводимое значение.
3. Создать таблицу «Цветы_ВашаФамилия». Определить основной ключ, значения столбца «ID» сделать уникальными, для столбца «Класс» установить значение по умолчанию «Двудольные».
4. Создать таблицу «Животные_ВашаФамилия». Определить основной ключ, значения столбца «ID» сделать уникальными, для столбца «Отряд» установить значение по умолчанию «Хищные».

Практическая работа № 10

Основы DML

1. Цель работы

1. Изучить команду INSERT.
2. Изучить команду UPDATE.
3. Изучить команду DELETE.
4. Изучить команду TRUNCATE TABLE.
5. Изучить конструкцию SELECT ... INTO.

2. Теоретическая часть

Команда INSERT осуществляет добавление данных в определенную таблицу. После команды INSERT можно добавить необязательное ключевое слово INTO. Упрощенный синтаксис команды имеет следующий вид:

```
INSERT INTO <таблица>
[(<список столбцов> ) ]
VALUES
(<список значений>)
```

Если добавляется две и более строки, тогда используется следующий синтаксис:

```
INSERT INTO <таблица>
[(<список столбцов> ) ]
VALUES
(<список значений>),
...
(<список значений>)
```

Количество и тип значений должны совпадать со списком столбцов. Последовательность столбцов может не совпадать с таблицей. Список столбцов должен быть заключен в круглые скобки, а его элементы должны разделяться запятыми.

Если столбец имеет свойства идентификатор, его нельзя указать в списке. Для таких столбцов сервер автоматически вычисляет новое значение.

Если столбец имеет свойство DEFAULT, при отсутствии его, в таблицу вставляется значение по умолчанию.

Если столбец имеет свойство NULL, при отсутствии его, в таблицу вставляется значение NULL.

Если столбец имеет свойство NOT NULL, его обязательно надо включить в список.

В списке значений для каждого столбца из указанных в списке столбцов должно быть одно значение. Список значений должен быть заключен в скобки.

Если значения в списке идут в том же порядке, как в таблице, и для каждого столбца таблицы определено значение, то список столбцов можно не указывать.

Если одновременно добавляется несколько строк значений, каждый список значений заключается в круглые скобки и разделяется запятыми.

Если значение для столбца неизвестно, и столбец имеет свойство NULL, для него в списке значений можно указать NULL (без кавычек).

Если требуется перенести строку из одной таблицы в другую таблицу можно использовать следующий синтаксис:

```
INSERT INTO <таблица>
[(<список столбцов>) ]
SELECT
    [<список столбцов>]
FROM
    исходная_таблица
WHERE
    <условие>
```

Типы данных в исходной и целевой таблицах должны совпадать.

Если таблицы имеют одинаковую структуру, можно после команды INSERT пропустить список столбцов, а после команды SELECT указать все столбцы, с помощью астериска «*».

Для изменения строк в таблице применяется команда UPDATE. Она имеет следующий формальный синтаксис:

```
UPDATE <таблица>
SET столбец1 = значение1, столбец2 = значение2, ..., столбецN = значениеN
[WHERE <условие>]
```

Использование условий необязательно, но тогда обновляются все строки таблицы. Рекомендуется сначала выполнять выборку строк с помощью SELECT, только потом использовать команду UPDATE.

Для удаления одной или нескольких строк из таблицы применяется команда DELETE. Она имеет следующий формальный синтаксис:

```
DELETE [FROM] <таблица>
[WHERE <условие>]
```

Ключевое слово FROM необязательно.

Использование условий необязательно, но тогда удаляются все строки таблицы. Рекомендуется сначала выполнять выборку строк с помощью SELECT, только потом использовать команду DELETE.

Для удаления всех строк из таблицы можно использовать команду TRUNCATE TABLE. Она имеет следующий формальный синтаксис:

```
TRUNCATE TABLE <таблица>
```

Инструкция TRUNCATE TABLE похожа на инструкцию DELETE без предложения WHERE, однако TRUNCATE TABLE выполняется быстрее и требует меньших ресурсов системы и журналов транзакций.

Для создания новой таблицы и ее заполнения можно использовать конструкцию SELECT...INTO. Она имеет следующий формальный синтаксис:

```
SELECT
<список столбцов>
INTO
<новая таблица>
FROM
<исходная таблица>
```

Столбцы в новой таблице создаются в порядке, соответствующем списку выбора и получают такие же имена, значения, типы данных и свойства допустимости значений NULL, которые указаны в соответствующем выражении в списке выбора.

3. Практическая часть

Таблица *Ученики*:

ID	Фамилия	Предмет	Школа	Баллы
1	Иванова	Математика	Лицей	98,5
2	Петров	Физика	Лицей	99
3	Сидоров	Математика	Лицей	88
4	Полухина	Физика	Гимназия	78
5	Матвеева	Химия	Лицей	92
6	Касимов	Химия	Гимназия	68
7	Нурулин	Математика	Гимназия	81
8	Авдеев	Физика	Лицей	87
9	Никитина	Химия	Лицей	94
10	Барышева	Химия	Лицей	88

Код для создания данной таблицы:

```
CREATE TABLE Ученики
(
    ID          INT PRIMARY KEY IDENTITY(1,1),
    Фамилия     VARCHAR(50) NOT NULL,
    Предмет     VARCHAR(50) NOT NULL,
    Школа       VARCHAR(50) NOT NULL,
    Баллы       FLOAT CHECK ((Баллы >= 0) AND (Баллы <= 100)) NULL
)
```

Пример 1: В таблицу «Ученики» внести новую запись для ученика гимназии Маркина, который по физике набрал 96 баллов:

```
INSERT INTO Ученики
(Фамилия, Предмет, Школа, Баллы)
VALUES
('Маркин', 'Физика', 'Гимназия', 96)
```

Пример 2: В таблицу «Ученики» внести две строки, для ученицы лицея Никишиной, которая по химии набрала 77 баллов, и для ученика школы № 18 Андреева, оценка которого по математике неизвестна:

```
INSERT INTO Ученики
(Фамилия, Предмет, Школа, Баллы)
VALUES
('Никишина', 'Химия', 'Лицей', 77),
('Андреев', 'Математика', 'Школа №18', NULL)
```

Пример 3: В таблице «Ученики» изменить данные Андреева, оценку исправить на 87:

```
UPDATE
Ученики
SET
Баллы = 87
WHERE
Фамилия = 'Андреев'
```

Пример 4: В таблице «Ученики» изменить данные Никишиной, школу исправить на «Школа №31», а предмет на математику:

```
UPDATE
Ученики
SET
Школа = 'Школа №31', Предмет = 'Математика'
WHERE
Фамилия = 'Никишина'
```

Пример 5: В таблице «Ученики» изменить данные всех учеников по математике, оценку уменьшить на 5 баллов:

```
UPDATE
Ученики
SET
Баллы = Баллы - 5
WHERE
Предмет = 'Математика'
```

Пример 6: В таблице «Ученики» удалить данные всех учеников из школы №18:

DELETE FROM

Ученики

WHERE

Школа = 'Школа №18'

Пример 7: Создать таблицу «Лицейсты» и скопировать туда всех лицейстов:

SELECT

ID

,Фамилия

,Предмет

,Школа

,Баллы

INTO

Лицейсты

FROM

Ученики

WHERE

Школа = 'Лицей'

Пример 8: Очистить таблицу «Лицейсты»:

TRUNCATE TABLE Лицейсты

4. Задание

1. В таблицу «Ученики» внести новую запись для ученика школы № 18 Трошкова, оценка которого по химии неизвестна.
2. В таблицу «Ученики» внести три строки.
3. В таблице «Ученики» изменить данные Трошкова, школу исправить на № 21, предмет на математику, а оценку на 56.
4. В таблице «Ученики» изменить данные всех учеников по химии, оценку увеличить на 10%, если она ниже 60 баллов.
5. В таблице «Ученики» удалить данные всех учеников из школы №21.
6. Создать таблицу «Гимназисты» и скопировать туда данные всех гимназистов, кроме тех, которые набрали меньше 60 баллов.
7. Очистить таблицу «Гимназисты».

Практическая работа № 11

Программирование на SQL

1. Цель работы

1. Изучение переменных в T-SQL.
2. Изучение условных выражений.
3. Изучение циклов.

2. Теоретическая часть

Несмотря на то, что T-SQL – декларативный язык, у него есть расширение, позволяющее обрабатывать ошибки, создавать и выполнять хранимые процедуры и пользовательские функции, триггеры и сценарии с использованием локальных переменных, операторов присваивания, ветвлений и циклов.

Объявление переменной осуществляется с помощью оператора DECLARE. Упрощенный синтаксис команды имеет следующий вид:

```
DECLARE <@название> AS <тип>
```

Имена переменных в Transact-SQL начинаются с символа @.

Объявить сразу несколько переменных одним оператором DECLARE можно так:

```
DECLARE <@название1> AS <тип1>, ..., <@названиеN> AS <типN>
```

Ключевое слово AS необязательно.

При объявлении переменной можно ее инициализировать:

```
DECLARE <@название> AS <тип> = <значение>
```

Объявленным переменным можно присвоить различные значения с помощью оператора присваивания SET. Переменным должны присваиваться значения того типа данных, с каким они были объявлены. Упрощенный синтаксис команды имеет следующий вид:

```
SET <@название> = <значение>
```

Переменным можно присваивать скалярный результат выполнения запросов:

```
SET <@название> = (SELECT <значение> FROM <таблица>)
```

Неинициализированные переменные имеют значение NULL, их нельзя использовать в выражениях.

Переменным можно присваивать значения с помощью команды SELECT:

```
SELECT <@переменная1> = <столбец1>, ..., <@переменнаяN> = <столбецN> FROM  
<таблица>)
```

Значения переменных можно вывести с помощью команды PRINT. Синтаксис команды имеет следующий вид:

```
PRINT <сообщение>
```

Сообщение может быть символьной константой, переменной символьного типа, переменной, неявно преобразуемой в последовательность символов, или выражения, возвращающего символьный результат.

Значения переменных можно вывести с помощью команды SELECT. Синтаксис команды имеет следующий вид:

```
SELECT <@переменная1> [AS псевдоним1], ..., <@переменнаяN> [AS псевдонимN]
```

Для выполнения команды в зависимости от условия используется управляющая команда IF ... ELSE Инструкция, следующая за ключевым словом IF и его условием, выполняется только в том случае, если логическое выражение возвращает TRUE. Необязательное ключевое слово ELSE представляет другую инструкцию, которая выполняется, если условие IF не удовлетворяется и логическое выражение возвращает FALSE. Упрощенный синтаксис команды имеет следующий вид:

```
IF <условие>
[BEGIN]
<команды>
[END]
[ ELSE
[BEGIN]
<команды>
[END]
]
```

Условие должно возвращать только TRUE (ИСТИНА) или FALSE (ЛОЖЬ).

Если в блоке более чем одна команда, использование [BEGIN] ... [END] обязательно.

Для выполнения повторяющихся операций применяется цикл WHILE. Упрощенный синтаксис команды имеет следующий вид:

```
WHILE <условие>
[BEGIN]
<команды| BREAK | CONTINUE >
[END]
```

Команда BREAK приводит к выходу из цикла и вызывает инструкции, следующие за ключевым словом END, обозначающим конец цикла.

Команда CONTINUE пропускает все команды после себя до конца цикла и переводит цикл на следующий шаг.

3. Практическая часть

Таблица *Ученики*:

ID	Фамилия	Предмет	Школа	Баллы
1	Иванова	Математика	Лицей	98,5
2	Петров	Физика	Лицей	99
3	Сидоров	Математика	Лицей	88
4	Полухина	Физика	Гимназия	78
5	Матвеева	Химия	Лицей	92
6	Касимов	Химия	Гимназия	68
7	Нурулин	Математика	Гимназия	81
8	Авдеев	Физика	Лицей	87
9	Никитина	Химия	Лицей	94
10	Барышева	Химия	Лицей	88

Пример 1: Даны числа a и b. Найти и вывести их сумму:

```
DECLARE @a INT, @b INT, @c INT
SET @a = 5
SET @b = 10
SET @c = @a + @b
PRINT @c
```

Пример 2: В таблице «Ученики» найти разницу между наибольшими баллами среди лицейстов и гимназистов:

```
DECLARE @licey FLOAT, @gimn FLOAT, @diff FLOAT
SET @licey = (
    SELECT
        MAX(Баллы)
    FROM
        Ученики
    WHERE
        Школа = 'Лицей'
)
SET @gimn = (
    SELECT
        MAX(Баллы)
    FROM
        Ученики
    WHERE
        Школа = 'Гимназия'
)
SET @diff = ABS(@licey - @gimn)
PRINT @diff
```

Пример 3: В таблице «Ученики» найти разницу между наибольшими и наименьшими баллами:

```
DECLARE @maxp FLOAT, @minp FLOAT, @diff FLOAT
SELECT
    @maxp = MAX(Баллы),
    @minp = MIN(Баллы)
FROM
    Ученики
SET @diff = @maxp - @minp
PRINT @diff
```

Пример 4: Дано случайное целое число меньше 1000. Вывести его квадрат:

```
DECLARE @a INT = RAND() * 1000, @b INT
SET @b = SQUARE(@a)
PRINT @b
```

Пример 5: Даны случайные целые числа a и b. Найти наибольшие из них:

```
DECLARE @a INT = RAND() * 100, @b INT = RAND() * 100
IF @a > @b
    PRINT '@a = ' + CAST(@a AS VARCHAR(3))
ELSE
    PRINT '@b = ' + CAST(@b AS VARCHAR(3))
```

Пример 6: Дано случайное целое число a. Проверить, делится ли данное число на 3:

```
DECLARE @a INT = RAND() * 100
IF @a % 3 = 0
    PRINT CAST(@a AS VARCHAR(3)) + ' делится на 3'
ELSE
    PRINT CAST(@a AS VARCHAR(3)) + ' не делится на 3'
```

Пример 7: Дано случайное целое число N ($N < 1000$). Если оно является степенью числа 5, то вывести «Да», если не является – вывести «Нет»:

```
DECLARE @a INT = RAND() * 1000
WHILE @a % 5 = 0
    SET @a = @a / 5
IF @a = 1
    PRINT 'Да'
ELSE
    PRINT 'Нет'
```

Пример 8: Даны случайные целые числа а и b. Найти наибольший общий делитель (НОД):

```
DECLARE @a INT = RAND() * 1000, @b INT = RAND() * 1000
PRINT '@a = ' + CAST(@a AS VARCHAR(4))
PRINT '@b = ' + CAST(@b AS VARCHAR(4))

WHILE @a != @b
BEGIN
    IF @a > @b
        SET @a = @a - @b
    ELSE
        SET @b = @b - @a
END
PRINT 'НОД = ' + CAST(@a AS VARCHAR(4))
```

Пример 9: Даны два целых числа А и В (А < В). Найти сумму всех целых чисел от А до В включительно:

```
DECLARE @a INT = 5, @b INT = 10, @s INT = 0
WHILE @a <= @b
BEGIN
    SET @s = @s + @a
    SET @a = @a + 1
END
PRINT 'Сумма = ' + CAST(@s AS VARCHAR(5))
```

Пример 10: Дано случайное целое число N (N < 100). Найти квадрат данного числа, используя для его вычисления следующую формулу:

$$N^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2 \cdot N - 1)$$

После добавления к сумме каждого слагаемого выводить текущее значение суммы (в результате будут выведены квадраты всех целых чисел от 1 до N):

```
DECLARE @N INT = RAND() * 10, @M INT = 1, @S INT = 0
WHILE @M <= 2 * @N - 1
BEGIN
    SET @S = @S + @M
    PRINT @S
    SET @M = @M + 2
END
```

Пример 11: Даны случайные целые числа A и B ($A < B$). Вывести все целые числа от A до B включительно; при этом число A должно выводиться 1 раз, число $A + 1$ должно выводиться 2 раза и т.д.:

```
DECLARE @A INT = RAND() * 5, @C INT = 1
DECLARE @B INT = @A + RAND() * 5
PRINT '@A = ' + CAST(@A AS CHAR(1)) + ', @B = ' + CAST(@B AS CHAR(1))
WHILE @A <= @B
BEGIN
    PRINT REPLICATE(@A, @C)
    SET @A = @A + 1
    SET @C = @C + 1
END
```

Пример 12: Напечатать те из двузначных чисел, которые делятся на 4, но не делятся на 6:

```
DECLARE @A INT = 10
WHILE @A < 100
BEGIN
    IF (@A % 4 = 0) AND (@A % 6 != 0)
        PRINT @A
    SET @A = @A + 1
END
```

Пример 13: Даны два целых числа D (день) и M (месяц), определяющие правильную дату невисокосного года. Вывести значения D и M для даты, следующей за указанной:

```
DECLARE @D INT = 31, @M INT = 12
SET @D = CASE
    WHEN @M IN (1, 3, 5, 7, 8, 10, 12) AND @D = 31 THEN 1
    WHEN @M IN (4, 6, 9, 11) AND @D = 30 THEN 1
    WHEN @M = 2 AND @D = 29 THEN 1
    ELSE @D + 1
END
SET @M = CASE
    WHEN @D = 1 AND @M = 12 THEN 1
    WHEN @D = 1 AND @M < 12 THEN @M + 1
    ELSE @M
END
PRINT CAST(@D AS VARCHAR(2)) + '/' + CAST(@M AS VARCHAR(2))
```

Пример 14: Вывести слово «Нижевартовск» на экран столько раз, сколько в нем букв:

```
DECLARE @L INT, @N CHAR(13) = 'Нижевартовск'
SET @L = LEN(@N)
```

```

WHILE @L > 0
BEGIN
    PRINT @N
    SET @L = @L - 1
END

```

Пример 15: Напишите код для вывода на экран с помощью цикла:

```

НижевартовсксвотравенжиН
Нижевартовс свотравенжиН
Нижевартов  вотравенжиН
Нижеварто   отравенжиН
Нижеварт    травенжиН
Нижевар     равенжиН
Нижева      авенжиН
Нижев       венжиН
Ниже        енжиН
Нижн        нжиН
Ниж         жиН
Ни          иН
Н           Н
Ни         иН
Ниж        жиН
Нижн       нжиН
Ниже       енжиН
Нижев      венжиН
Нижева     авенжиН
Нижевар    равенжиН
Нижеварт   травенжиН
Нижеварто  отравенжиН
Нижевартов вотравенжиН
Нижевартовс свотравенжиН
НижевартовсксвотравенжиН

```

```

DECLARE @L INT, @M INT, @N CHAR(13)
SET @N = 'Нижевартовск'
SET @L = LEN(@N)
SET @M = @L
WHILE @L > 0
BEGIN
    PRINT LEFT(@N, @L) + SPACE(2 * (@M - @L)) + RIGHT(REVERSE(@N), @L)
    SET @L = @L - 1

```

```

END
SET @L = 2
WHILE @L <= @M
BEGIN
    PRINT LEFT(@N, @L) + SPACE(2 * (@M - @L)) + RIGHT(REVERSE(@N), @L)
    SET @L = @L + 1
END

```

4. Задание

1. Даны числа A и B. Найти и вывести их произведение.
2. В таблице «Ученики» найти разницу между средними баллами лицеистов и гимназистов.
3. В таблице «Ученики» проверить на четность количество строк.
4. Дано четырехзначное число. Вывести сумму его цифр.
5. Даны случайные целые числа a, b и c. Найти наименьшее из них.
6. Дано случайное целое число a. Проверить, делится ли данное число на 11.
7. Дано случайное целое число N ($N < 1000$). Если оно является степенью числа 3, то вывести «Да», если не является – вывести «Нет».
8. Даны случайные целые числа a и b. Найти наименьший общий кратный (НОК).
9. Даны два целых числа A и B ($A < B$). Найти сумму квадратов всех целых чисел от A до B включительно.
10. Найти первое натуральное число, которое при делении на 2, 3, 4, 5, и 6 дает остаток 1, но делится на 7.
11. Вывести свою фамилию на экран столько раз, сколько в нем букв.
12. Напишите код для вывода на экран с помощью цикла:

```

Н
иНи
жиНиж
нжиНижн
енжиНижне
венжиНижнев
авенжиНижднева
равенжиНижневар
травенжиНижневарто
отравенжиНижневарто
вотравенжиНижневарто
свотравенжиНижневарто
квотравенжиНижневарто

```

Практическая работа № 12

Пользовательские функции

1. Цель работы

1. Изучение скалярных функций.
2. Изучение функции `INLINE`.
3. Изучение функции `MULTI-STATEMENT`.
4. Изучение удаления пользовательских функций.

2. Теоретическая часть

На языке Transact-SQL очень много встроенных функций. Несмотря на этот факт, иногда требуются функции, которых нет в стандартной библиотеке. Transact-SQL предоставляет возможность создать собственную функцию для решения задач. Пользовательская скалярная функция возвращает в качестве ответа единственное значение.

Пользовательскую функцию можно использовать следующими способами:

- В инструкциях Transact-SQL, например, `SELECT`.
- В приложениях, вызывающих функцию.
- В определении другой пользовательской функции.
- Для определения столбца таблицы.
- Для определения ограничения `CHECK` на столбец.

Пользовательские функции не могут выполнять действия, изменяющие состояние базы данных.

Пользовательские функции не могут возвращать несколько результирующих наборов.

Пользовательские функции не могут использовать динамический SQL и временные таблицы. Табличные переменные разрешены к использованию.

Пользовательские функции могут быть вложенными, то есть из одной функции может быть вызвана другая. Вложенность функций не может превышать 32 уровней.

Упрощенный синтаксис создания пользовательской скалярной функции имеет следующий вид:

```
CREATE FUNCTION <название>
(
  [{<@параметр> [AS] <тип> [= <значение по умолчанию>]}]
)
RETURNS <тип возврата>
[AS]
BEGIN
<команды>
```

RETURN <значение>

END

Значение, переменная или выражение после ключевого слова RETURN имеет такой же тип, который указан после ключевого слова RETURNS.

Созданная функция может быть вызвана, как и обычная встроенная функция, но при этом должны вызываться с помощью имени владельца. Простой вызов имеет следующий вид:

SELECT <владелец>.<функция>(<параметры>)

Для пользовательских функций допускается не более 2100 параметров. При выполнении функции значение каждого из объявленных параметров должно быть указано пользователем, если для них не определены значения по умолчанию.

Имя параметра, как и имя переменных, использует знак @ как первый символ.

Для INLINE функций ключевого слова RETURNS указывается тип TABLE без указания списка столбцов. Тело такой функции представляет собой единственный оператор SELECT, который начинается сразу после ключевого слова RETURN. Упрощенный синтаксис создания пользовательской функции INLINE имеет следующий вид:

```
CREATE FUNCTION <название>
(
  [{<@параметр> [AS] <тип> [= <значение по умолчанию>]}]
)
RETURNS TABLE
AS
RETURN
(
  SELECT
    <список столбцов>
  FROM
    <таблица>
  WHERE
    <условие>
)
```

В MULTI-STATEMENT функциях после ключевого слова RETURNS указывается тип TABLE с определением столбцов и их типов данных. Упрощенный синтаксис создания пользовательской MULTI-STATEMENT функции имеет следующий вид:

```
CREATE FUNCTION <название>
(
  [{<@параметр> [AS] <тип> [= <значение по умолчанию>]}]
)
RETURNS <@таблица> TABLE (<определение таблицы>)
AS
```



```

BEGIN
<команды>
RETURN
END

```

Для MULTI-STATEMENT функций оператор RETURN не имеет аргумента. Значение возвращаемой переменной функции возвращается как значение функции.

Для удаления пользовательских функций используется команда DROP FUNCTION. Упрощенный синтаксис имеет следующий вид:

```
DROP FUNCTION [IF EXISTS] <название функции>
```

Ключевые слова IF EXISTS удаляют функцию только в том случае, если она уже существует.

3. Практическая часть

Дана таблица **Страны**:

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Австрия	Вена	83858	8741753	Европа
Азербайджан	Баку	86600	9705600	Азия
Албания	Тирана	28748	2866026	Европа
Алжир	Алжир	2381740	39813722	Африка
Ангола	Луанда	1246700	25831000	Африка
Аргентина	Буэнос-Айрес	2766890	43847000	Южная Америка
Афганистан	Кабул	647500	29822848	Азия
Бангладеш	Дакка	144000	160221000	Азия
Бахрейн	Манама	701	1397000	Азия
Белиз	Бельмопан	22966	377968	Северная Америка
Белоруссия	Минск	207595	9498400	Европа
Бельгия	Брюссель	30528	11250585	Европа
Бенин	Порто-Ново	112620	11167000	Африка
Болгария	София	110910	7153784	Европа
Боливия	Сукре	1098580	10985059	Южная Америка
Ботсвана	Габороне	600370	2209208	Африка
Бразилия	Бразилиа	8511965	206081432	Южная Америка
Буркина-Фасо	Уагадугу	274200	19034397	Африка
Бутан	Тхимпху	47000	784000	Азия
Великобритания	Лондон	244820	65341183	Европа
Венгрия	Будапешт	93030	9830485	Европа
Венесуэла	Каракас	912050	31028637	Южная Америка
Восточный Тимор	Дили	14874	1167242	Азия
Вьетнам	Ханой	329560	91713300	Азия

Пример 1: Напишите функцию для вывода столицы данной страны, и вызовите ее:

CREATE FUNCTION Пример1

```
(
    @Страна AS VARCHAR(50)
)
RETURNS VARCHAR(50)
AS
BEGIN
    DECLARE @S AS VARCHAR(50)
    SELECT
        @S = Столица
    FROM
        Страны
    WHERE
        Название = @Страна
    RETURN @S
END
```

SELECT dbo.Пример1('Австрия')

Пример 2: Напишите функцию для перевода площади в тыс. кв. км., и вызовите ее:

CREATE FUNCTION Пример2

```
(
    @Площадь AS FLOAT
)
RETURNS FLOAT
AS
BEGIN
    DECLARE @P AS FLOAT
    SET @P = ROUND(@Площадь / 1000, 2)
    RETURN @P
END

SELECT
    Название,
    Столица,
    Континент,
    Население,
    dbo.Пример2(Площадь) AS [Площадь тыс.кв.км]
FROM
    Страны
```

Пример 3: Напишите функцию для вычисления плотности населения, и вызовите ее:

CREATE FUNCTION Пример3

(

 @Население **AS INT**,

 @Площадь **AS FLOAT**

)

RETURNS FLOAT

AS

BEGIN

DECLARE @P **AS FLOAT**

SET @P = **ROUND**(**CAST**(@Население **AS FLOAT**) / @Площадь, 2)

RETURN @P

END

SELECT

 Название,

 Столица,

 Континент,

 Население,

 Площадь,

 dbo.Пример3(Население, Площадь) **AS** Плотность

FROM

 Страны

ORDER BY

 Плотность **DESC**

Пример 4: Напишите функцию для поиска страны второй по площади, и вызовите ее:

CREATE FUNCTION Пример4()

RETURNS VARCHAR(50)

AS

BEGIN

DECLARE @P **AS VARCHAR**(50)

DECLARE @M1 **AS FLOAT**

DECLARE @M2 **AS FLOAT**

SELECT

 @M1 = **MAX**(Площадь)

FROM

 Страны

SELECT

 @M2 = **MAX**(Площадь)

```

FROM
    Страны
WHERE
    Площадь < @M1

SELECT
    @P = Название
FROM
    Страны
WHERE
    Площадь = @M2

RETURN @P
END

SELECT
    dbo.Пример4() AS [Второй по площади страна]

```

Пример 5: Напишите функцию для поиска страны с минимальной площадью в заданной части света, и вызовите ее. Если часть света не указана, выбрать Европу:

```

CREATE FUNCTION Пример5
(
    @Конт AS VARCHAR(50) = 'Европа'
)
RETURNS VARCHAR(50)
AS
BEGIN
    DECLARE @P AS VARCHAR(50)
    DECLARE @M AS FLOAT

    SELECT
        @M = MIN(Площадь)
    FROM
        Страны
    WHERE
        Континент = @Конт

    SELECT
        @P = Название
    FROM
        Страны
    WHERE

```

```

        Континент = @Конт
        AND
        Площадь = @М

    RETURN @Р
END

SELECT
    dbo.Пример5('Азия') AS [Наименьшая по площади страна в Азии]

SELECT
    dbo.Пример5(DEFAULT) AS [Наименьшая по площади страна в Европе]

```

Пример 6: Напишите функцию для замены букв в заданном слове от второй до предпоследней на точку, и примените ее для названия страны:

```

CREATE FUNCTION Пример6
(
    @А AS VARCHAR(50)
)
RETURNS VARCHAR(50)
AS
BEGIN
    RETURN LEFT(@А, 1) + REPLICATE('.', LEN(@А) - 2) + RIGHT(@А, 1)
END

SELECT
    dbo.Пример6(Название) AS [Скрытое название]
    ,Столица
    ,Континент
    ,Площадь
    ,Население
FROM
    Страны

```

Пример 7: Напишите функцию, которая возвращает количество стран, содержащих в названии заданную букву:

```

CREATE FUNCTION Пример7
(
    @С AS CHAR(1)
)
RETURNS INT
AS

```

```

BEGIN
    DECLARE @K AS INT

    SELECT
        @K = COUNT(*)
    FROM
        Страны
    WHERE
        CHARINDEX(@C, Название) > 0

    RETURN @K
END

```

Пример 8: Напишите функцию для вывода списка стран с населением больше заданного числа, и вызовите ее:

```

CREATE FUNCTION Пример8
(
    @N AS INT
)
RETURNS TABLE
AS
RETURN (
    SELECT
        Название
        ,Столица
        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
    FROM
        Страны
    WHERE
        Население > @N
)

SELECT
    *
FROM
    dbo.Пример8(100000000)

```

Пример 9: Напишите функцию для вывода списка стран с площадью в интервале заданных значений, и вызовите ее:

```

CREATE FUNCTION Пример9

```

```

(
    @A AS FLOAT,
    @B AS FLOAT
)
RETURNS TABLE
AS
RETURN (
    SELECT
        Название
        ,Столица
        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
    FROM
        Страны
    WHERE
        Площадь BETWEEN @A AND @B
)
SELECT
    *
FROM
    dbo.Пример9(1000, 10000)

```

Пример 10: Напишите функцию для возврата таблицы с названием страны и плотностью населения, и вызовите ее:

```

CREATE FUNCTION Пример10()
RETURNS @Ст_Плот TABLE
(
    Название VARCHAR(50),
    Плотность FLOAT
)
AS
BEGIN
    INSERT
        @Ст_Плот
    SELECT
        Название
        , CAST(Население AS FLOAT) / Площадь AS Плотность
    FROM
        Страны
    RETURN
END

```

```
SELECT
    Название
    ,Плотность
FROM
    dbo.Пример10()
```

Пример 11: Удалите функцию из примера 10:

```
DROP FUNCTION Пример10
```

4. Задание

1. Напишите функцию для вывода названия страны с заданной столицей, и вызовите ее.
2. Напишите функцию для перевода населения в млн. чел. и вызовите ее.
3. Напишите функцию для вычисления плотности населения заданной части света и вызовите ее.
4. Напишите функцию для поиска страны, третьей по населению и вызовите ее.
5. Напишите функцию для поиска страны с максимальным населением в заданной части света и вызовите ее. Если часть света не указана, выбрать Азию.
6. Напишите функцию для замены букв в заданном слове от третьей до предпоследней на “тест” и примените ее для столицы страны.
7. Напишите функцию, которая возвращает количество стран, не содержащих в названии заданную букву.
8. Напишите функцию для возврата списка стран с площадью меньше заданного числа и вызовите ее.
9. Напишите функцию для возврата списка стран с населением в интервале заданных значений и вызовите ее.
10. Напишите функцию для возврата таблицы с названием континента и суммарным населением и вызовите ее.
11. Напишите функцию IsPalindrom(P) целого типа, возвращающую 1, если целый параметр P ($P > 0$) является палиндромом, и 0 в противном случае.
12. Напишите функцию Quarter(x, y) целого типа, определяющую номер координатной четверти, содержащей точку с ненулевыми вещественными координатами (x, y).
13. Напишите функцию IsPrime(N) целого типа, возвращающую 1, если целый параметр N ($N > 1$) является простым числом, и 0 в противном случае.
14. Напишите код для удаления созданных вами функций.

Практическая работа № 13

Хранимые процедуры

1. Цель работы

1. Изучение создания хранимых процедур.
2. Изучение передачи входных параметров.
3. Изучение передачи выходных параметров.
4. Изучение вызовов хранимых процедур.
5. Изучение удаления хранимых процедур.

2. Теоретическая часть

При программировании в SQL Server введенный код сначала компилируется, потом запускается. Процесс компиляции может занимать определенное время. На языке Transact-SQL также есть возможность написанный блок кода сохранить и заранее скомпилировать. Особенно, если код многократно используется в операции базы данных, отличным решением будет произвести его инкапсуляцию в процедуры. Для этой цели используются хранимые процедуры, которые представляют собой набор инструкций, выполняющихся как единое целое. Процедуры аналогичны конструкциям в других языках программирования и выполняют следующие задачи:

- обрабатывают входные параметры и возвращают значения в виде выходных параметров;
- содержат инструкции, которые выполняют операции в базе данных, в отличие от пользовательских функций;
- возвращают сведения об успешном или неуспешном завершении.

В клиент-серверной и распределенных системах хранимые процедуры позволяют существенно сократить сетевой трафик, поскольку по сети отправляется только вызов на выполнение процедуры.

С точки зрения безопасности, хранимые процедуры выполняют очень большую роль, так как устраняют необходимость предоставлять разрешения на уровне объектов и упрощают формирование уровней безопасности. С помощью хранимых процедур можно предотвратить атаки типа «инъекция SQL».

Хранимая процедура создается с помощью команды CREATE PROCEDURE или CREATE PROC, которая имеет следующий упрощенный вид:

```
CREATE {PROC | PROCEDURE} <название>  
[<@параметр> <тип> [= <значение по умолчанию>] [OUT | OUTPUT]]  
AS
```

[BEGIN]
<команды>
[END]

При создании процедуры после команды CREATE указывается тип создаваемого объекта с помощью ключевого слова PROCEDURE или его сокращенного варианта PROC.

Названия процедур должны соответствовать требованиям, предъявляемым к идентификаторам, и должны быть уникальными в базе данных. При этом не следует пользоваться префиксом «sp_». Этим префиксом в SQL Server обозначаются системные процедуры.

В хранимую процедуру можно передать до 2100 параметров. При выполнении процедуры значение каждого из объявленных параметров должно быть указано пользователем, если для параметра не определено значение по умолчанию.

Ключевое слово OUT (можно использовать и OUTPUT) показывает, что параметр процедуры является выходным.

Для выполнения хранимой процедуры используется ключевое слово EXECUTE (или EXEC). Процедуру также можно вызывать и выполнять без ключевого слова, если она является первой инструкцией. Синтаксис команды EXECUTE имеет следующий вид:

EXECUTE [<@статус возврата>=] <название процедуры> [<@параметр>=] <значение> | [<@переменная> [OUTPUT] | [DEFAULT]

В отличие от вызова функций, при вызове хранимых процедур с указанием названия параметра ([<@параметр>=] <значение>), последовательность параметров можно не соблюдать.

Для выходных параметров при вызове указывается ключевое слово OUTPUT.

Если для параметра указано значение по умолчанию, можно его использовать с помощью ключевого слова DEFAULT.

Для удаления хранимых процедур используется команда DROP PROCEDURE. Упрощенный синтаксис имеет следующий вид:

DROP PROC | PROCEDURE [IF EXISTS] <название хранимой процедуры>

Ключевые слова IF EXISTS удаляют хранимую процедуру только в том случае, если она уже существует.

3. Практическая часть

Дана таблица **Страны**:

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Австрия	Вена	83858	8741753	Европа
Азербайджан	Баку	86600	9705600	Азия
Албания	Тирана	28748	2866026	Европа
Алжир	Алжир	2381740	39813722	Африка

Название	Столица	Площадь	Население	Континент
Ангола	Луанда	1246700	25831000	Африка
Аргентина	Буэнос-Айрес	2766890	43847000	Южная Америка
Афганистан	Кабул	647500	29822848	Азия
Бангладеш	Дакка	144000	160221000	Азия
Бахрейн	Манама	701	1397000	Азия
Белиз	Бельмопан	22966	377968	Северная Америка
Белоруссия	Минск	207595	9498400	Европа
Бельгия	Брюссель	30528	11250585	Европа
Бенин	Порто-Ново	112620	11167000	Африка
Болгария	София	110910	7153784	Европа
Боливия	Сукре	1098580	10985059	Южная Америка
Ботсвана	Габороне	600370	2209208	Африка
Бразилия	Бразилиа	8511965	206081432	Южная Америка
Буркина-Фасо	Уагадугу	274200	19034397	Африка
Бутан	Тхимпху	47000	784000	Азия
Великобритания	Лондон	244820	65341183	Европа
Венгрия	Будапешт	93030	9830485	Европа
Венесуэла	Каракас	912050	31028637	Южная Америка
Восточный Тимор	Дили	14874	1167242	Азия
Вьетнам	Ханой	329560	91713300	Азия

Пример 1: Напишите хранимую процедуру для вывода информации о сервере, о базе данных и о текущем пользователе, и вызовите ее:

```

CREATE PROC Пример1
AS
BEGIN
    SELECT
        @@Servername AS Сервер
        ,@@Version AS [Версия СУБД]
        ,Db_Name() AS [База данных]
        ,User AS [Пользователь базы данных]
        ,System_User AS [Системный пользователь]
END
EXECUTE Пример1

```

Пример 2: Напишите хранимую процедуру, которая выводит названия и столицы всех стран:

```

CREATE PROC Пример2
AS
BEGIN

```

```

SELECT
    Название
    , Столица
FROM
    Страны
END

```

Пример 3: Напишите хранимую процедуру, которая выводит список стран заданной части света, и вызовите ее:

```

CREATE PROC Пример3
    @Конт AS VARCHAR(50)
AS
BEGIN
    SELECT
        Название
        , Столица
        , Площадь
        , Население
    FROM
        Страны
    WHERE
        Континент = @Конт
END
EXECUTE Пример3 'Азия'

```

Пример 4: Напишите хранимую процедуру, которая выводит список стран, площадь которых находится в заданном интервале, и вызовите ее:

```

CREATE PROC Пример4
    @A AS FLOAT,
    @B AS FLOAT
AS
BEGIN
    SELECT
        Название
        , Столица
        , Площадь
        , Население
        , Континент
    FROM
        Страны

```

```

WHERE
    Площадь BETWEEN @A AND @B
END
EXECUTE Пример4 1000, 10000

```

Пример 5: Напишите хранимую процедуру, которая возвращает количество стран, содержащих в названии заданную букву, и вызовите ее:

```

CREATE PROC Пример5
    @Буква AS CHAR(1),
    @Количество AS INT OUTPUT
AS
BEGIN
    SELECT
        @Количество = COUNT(*)
    FROM
        Страны
    WHERE
        CHARINDEX(@Буква, Название) > 0
END

DECLARE @К AS INT
DECLARE @Б AS CHAR(1)
SET @Б = 'у'
EXECUTE Пример5 @Б, @К OUTPUT
SELECT
    @К AS [Количество стран]

```

Пример 6: Напишите хранимую процедуру для вывода трех стран с наименьшей площадью в заданной части света, и вызовите ее. Если часть света не указана, выбрать Европу:

```

CREATE PROC Пример6
    @Конт AS VARCHAR(50) = 'Европа'
AS
BEGIN
    SELECT TOP 3
        Название
        , Столица
        , Площадь
        , Население
        , Континент
    FROM

```

```

        Страны
WHERE
        Континент = @Конт
ORDER BY
        Площадь
END
EXECUTE Пример6 DEFAULT

```

Пример 7: Напишите хранимую процедуру, которая создает таблицу «Страны_У», и заполняет ее странами, названия которых начинаются на букву «У»:

```

CREATE PROC Пример7
AS
BEGIN
    SELECT
        Название
        ,Столица
        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
    INTO
        Страны_У
    FROM
        Страны
    WHERE
        LEFT(Название, 1) = 'У'
END

EXECUTE Пример7

```

Пример 8: Напишите хранимую процедуру, которая удаляет таблицу «Страны_У» и возвращает количество строк:

```

CREATE PROC Пример8
AS
BEGIN
    DECLARE @К AS INT

    SELECT
        @К = COUNT(*)
    FROM
        Страны_У

```

```

DROP TABLE Страны_У
RETURN @K
END

DECLARE @C AS INT
EXECUTE @C = Пример8
SELECT @C AS [Количество строк в удаленной таблице]

```

Пример 9: Напишите код, который удаляет хранимую процедуру «Пример8»:

```
DROP PROC Пример8
```

4. Задание

1. Напишите хранимую процедуру для вывода информации о сервере, о базе данных, о текущем пользователе, о текущем времени, и вызовите ее.
2. Напишите хранимую процедуру, которая выводит данные всех стран.
3. Напишите хранимую процедуру, которая выводит список стран, кроме заданной части света, и вызовите ее.
4. Напишите хранимую процедуру, которая выводит список стран, население которых находится в заданном интервале, и вызовите ее.
5. Напишите хранимую процедуру, которая возвращает количество стран, у которых в названии отсутствует заданная буква, и вызовите ее.
6. Напишите хранимую процедуру для вывода пяти стран с наибольшим населением в заданной части света, и вызовите ее. Если часть света не указана, выбрать Африку.
7. Напишите хранимую процедуру, которая создает таблицу «Страны_<первая буква вашей фамилии>», и заполняет ее странами, названия которых начинаются с первой буквой вашей фамилии.
8. Напишите хранимую процедуру, которая удаляет таблицу, которую вы создали в предыдущем задании и возвращает количество удаленных строк.
9. Напишите хранимую процедуру, принимающую число и возвращающую количество цифр в нем через параметр OUTPUT.
10. Напишите хранимую процедуру AddRightDigit, добавляющую к целому положительному числу K справа цифру D (D – входной параметр целого типа, лежащий в диапазоне [0..9], K – параметр целого типа, являющийся одновременно входным и выходным).
11. Напишите хранимую процедуру InvDigit, меняющую порядок следования цифр целого положительного числа K на обратный (K – параметр целого типа, являющийся одновременно входным и выходным).
12. Напишите хранимую процедуру Swar, меняющую содержимое переменных X и Y (X и Y – вещественные параметры, являющиеся одновременно входными и выходными).

13. Напишите хранимую процедуру SortInc, меняющую содержимое переменных A, B, C, таким образом, чтобы их значения оказались упорядоченными по возрастанию (A, B, C – вещественные параметры, являющиеся одновременно входными и выходными).
14. Напишите хранимую процедуру DigitCountSum, находящую количество C цифр целого положительного числа K, а также их сумму S (K – входной, C, S – выходные параметры целого типа).
15. Напишите код, который удаляет все хранимые процедуры, вами созданные.

Практическая работа № 14

Триггеры

1. Цель работы

1. Изучить создание триггеров.
2. Изучить триггеры после событий.
3. Изучить триггеры вместо событий.
4. Изучить виртуальные таблицы в триггерах.
5. Изучить приостановление триггеров.
6. Изучить удаление триггеров.

2. Теоретическая часть

Триггер – это вид хранимой процедуры, который вызывается автоматически при определенных событиях. Часто триггеры применяются для автоматической поддержки целостности и защиты БД.

В MS SQL Server существует *три вида триггеров*, которые отличаются по функциям и по синтаксису создания и изменения:

☐ *Триггеры DML* вызываются при выполнении команд INSERT, UPDATE или DELETE. Можно создать триггер, реагирующий на две или на все три команды.

☐ *Триггеры DDL* реагируют на события изменения структуры БД: создание, изменение или удаление отдельных объектов БД.

☐ *Триггеры входа в систему* запускаются при соединении пользователя с экземпляром сервера. Их можно применять для дополнительной проверки полномочий пользователей.

Триггеры DML можно вызвать после событий (FOR | AFTER), или вместо него (INSTEAD OF).

Триггер AFTER выполняется после успешного завершения вызвавшего его события. Можно определить несколько AFTER-триггеров для каждой операции.

Триггер INSTEAD OF вызывается вместо выполнения команд. Для каждой операции INSERT, UPDATE, DELETE можно определить только один INSTEAD OF-триггер.

Упрощенный синтаксис создания триггера имеет следующий вид:

```
CREATE TRIGGER <название триггера> ON <название таблицы>
<FOR | AFTER | INSTEAD OF> <INSERT | UPDATE | DELETE>
AS
[BEGIN]
<команды>
[END]
```

Ключевое слово FOR или AFTER указывает, что триггер DML срабатывает только после успешного запуска всех операций в инструкции SQL, по которой срабатывает триггер.

Ключевое слово INSTEAD OF указывает, что триггер DML выполняется вместо инструкции SQL, по которой он срабатывает, то есть переопределяет действия запускающих инструкций.

В определении триггера ключевые слова INSERT | UPDATE | DELETE определяют инструкции изменения данных, при применении которых к таблице или представлению срабатывает триггер DML. Указание хотя бы одного варианта обязательно. В определении триггера разрешены любые сочетания вариантов в любом порядке.

Триггеры не вызываются рекурсивно.

Хотя инструкция TRUNCATE TABLE по сути аналогичная инструкции DELETE, она не активирует триггер.

Если триггер выполняется для события добавления данных (команды INSERT), в теле триггера доступна виртуальная таблица INSERTED, которая содержит список добавленных данных.

Если триггер выполняется для события удаления данных (команды DELETE), в теле триггера доступна виртуальная таблица DELETED, которая содержит список удаленных данных.

Если триггер выполняется для события изменения данных (команды UPDATE), в теле триггера доступны две виртуальные таблицы INSERTED и DELETED, которые содержат список новых и старых данных, соответственно.

Если при определенных обстоятельствах выполнение триггера нежелательно, то можно его отключить. Для этого используется команда DISABLE TRIGGER, его синтаксис:

DISABLE TRIGGER <название триггера> ON <название таблицы>

А когда триггер снова понадобится, его можно включить с помощью команды ENABLE TRIGGER, его синтаксис:

ENABLE TRIGGER <название триггера> ON <название таблицы>

Для удаления триггера используется команда DROP TRIGGER, его синтаксис:

DROP TRIGGER <название триггера>

3. Практическая часть

Дана таблица *Ученики*:

ID	Фамилия	Предмет	Школа	Баллы
1	Иванова	Математика	Лицей	98,5
2	Петров	Физика	Лицей	99
3	Сидоров	Математика	Лицей	88
4	Полухина	Физика	Гимназия	78

ID	Фамилия	Предмет	Школа	Баллы
5	Матвеева	Химия	Лицей	92
6	Касимов	Химия	Гимназия	68
7	Нурулин	Математика	Гимназия	81
8	Авдеев	Физика	Лицей	87
9	Никитина	Химия	Лицей	94

Пример 1: Напишите триггер на добавление записи в таблицу «Ученики». Данный триггер, в случае успешного добавления данных, выводит «Запись добавлена»:

```
CREATE TRIGGER Пример1 ON Ученики
FOR INSERT
AS
BEGIN
    PRINT 'Запись добавлена'
END
```

Пример 2: Напишите триггер на удаление записи из таблицы «Ученики». Данный триггер, в случае успешного удаления данных, выводит «Запись удалена»:

```
CREATE TRIGGER Пример2 ON Ученики
AFTER DELETE
AS
BEGIN
    PRINT 'Запись удалена'
END
```

Пример 3: Напишите триггер на добавление, изменение и удаление данных для таблицы «Ученики». Данный триггер выводит «Таблица изменена»:

```
CREATE TRIGGER Пример3 ON Ученики
FOR INSERT, UPDATE, DELETE
AS
BEGIN
    PRINT 'Таблица изменена'
END
```

Пример 4: Напишите триггер на удаление записи из таблицы «Ученики». Данный триггер, при попытке удаления данных, выводит «Нельзя удалить данные»:

```
CREATE TRIGGER Пример4 ON Ученики
INSTEAD OF DELETE
AS
BEGIN
    PRINT 'Нельзя удалить данные'
END
```

Пример 5: Создать таблицу «Ученики_Архив», которая будет содержать все данные об удаленных учениках и даты их удаления. Написать триггер, который будет фиксировать в таблице «Ученики_Архив» данные ученика, удаленного из таблицы «Ученики»:

```
CREATE TABLE Ученики_Архив
(
    ID INT NOT NULL,
    Фамилия VARCHAR(50) NULL,
    Предмет VARCHAR(50) NULL,
    Школа VARCHAR(50) NULL,
    Баллы FLOAT NULL,
    Удалено DATETIME NOT NULL
)

CREATE TRIGGER Пример5 ON Ученики
FOR DELETE
AS
BEGIN
    INSERT
        Ученики_Архив
    SELECT
        ID,
        Фамилия,
        Предмет,
        Школа,
        Баллы,
        GETDATE() AS Удалено
    FROM
        DELETED
END
```

Пример 6: Напишите команды для приостановления и запуска триггера из примера 5:

```
DISABLE TRIGGER Пример5 ON Ученики
```

```
ENABLE TRIGGER Пример5 ON Ученики
```

Пример 7: Напишите команды для удаления триггера из примера 5:

```
DROP TRIGGER Пример5
```

4. Задание

1. Напишите триггер на изменение записи в таблице «Ученики». Данный триггер, в случае изменения данных, должен вывести «Запись изменена».
2. Напишите триггер на добавление и удаление записи из таблицы «Ученики». Данный триггер, в случае успешного добавления или удаления данных, должен вывести «Количество строк изменено».
3. Напишите триггер на добавление, изменение и удаление данных в таблице «Ученики». Данный триггер должен вывести «{Текущий пользователь} изменил таблицу. Время: {текущее время}».
4. Напишите триггер на изменение записи в таблице «Ученики». Данный триггер, при попытке изменения данных, должен вывести «Нельзя редактировать данные».
5. Создать таблицу «Ученики_{Ваша_фамилия}», которая будет содержать фамилии удаленных учеников и даты их удаления. Написать триггер, который будет фиксировать в таблице «Ученики_{Ваша_фамилия}» данные учеников при удалении из таблицы «Ученики», в том случае, если у них остались однофамильцы в таблице «Ученики».
6. Напишите команды для приостановления и запуска триггера из предыдущей задачи.
7. Напишите команды для удаления всех созданных вами триггеров.

Практическая работа № 15

Представления и табличные объекты

1. Цель работы

1. Изучить создание и удаление представлений.
2. Изучить табличные переменные.
3. Изучить временные таблицы.
4. Изучить производные таблицы.

2. Теоретическая часть

Представление – это виртуальная таблица, содержимое которой определяется запросом. Как и таблица, представление состоит из ряда именованных столбцов и строк данных.

Представления, как таблицы, могут иметь до 1024 столбцов.

Запрос для создания представления может обращаться не более чем к 256 таблицам.

Можно создавать представления на основе других представлений, при этом уровень вложенности не может быть больше 32-х.

Представление можно использовать как обычную таблицу.

Упрощенный синтаксис создания представления имеет следующий вид:

```
CREATE VIEW <название> <список столбцов>
```

```
AS <запрос SELECT>
```

Запрос SELECT, используемый в определении представления, не может включать предложение ORDER BY, если только в списке выбора инструкции SELECT нет также предложения TOP.

Для удаления представления используется команда DROP VIEW, его синтаксис:

```
DROP VIEW <название>
```

В Transact-SQL есть специальный тип данных для хранения результирующего набора для обработки в будущем. Его используют в основном для временного хранения набора строк, возвращаемых как результирующий набор функций с табличным значением. Функции и переменные могут быть объявлены как табличные переменные. Табличные переменные могут использоваться в функциях, хранимых процедурах и пакетах. Для объявления табличных переменных используется следующий синтаксис:

```
DECLARE <@название переменной> TABLE (<объявление столбцов>)
```

Табличная переменная ведет себя как локальная переменная, она имеет точно определенную область применения.

Табличная переменная может быть применена в любом месте, где используется таблица или табличное выражение в инструкциях SELECT, INSERT, UPDATE и DELETE. Но табличную переменную нельзя использовать в инструкции SELECT ... INTO ...

Табличные переменные автоматически очищаются в конце функции, хранимой процедуры или пакета, в котором они были определены.

Операция присвоения между табличными переменными не поддерживается.

В MS SQL Server для хранения промежуточных данных можно использовать временные таблицы. Они по поведению не отличаются от базовых таблиц. Создание, удаление и обращение к ним аналогично к базовым.

Первый символ в названии временной таблицы должен быть знак решетки #. Для локальных временных таблиц используется один знак #. Локальные временные таблицы доступны в течение текущей сессии и удаляются, когда пользователь отсоединяется от сервера.

Для глобальных временных таблиц используются два знака ##. Глобальные временные таблицы доступны всем открытым сессиям базы данных и удаляются, когда все пользователи, ссылающиеся на таблицы, отсоединяются от сервера.

Временные таблицы хранятся в системной базе данных TEMPDB.

Для принудительного удаления временных таблиц используется команда DROP TABLE.

В MS SQL Server можно создать временно именованный результирующий набор, называемый обобщенным табличным выражением. Он формируется при выполнении простого запроса.

За обобщенным табличным выражением должны следовать одиночные инструкции SELECT, INSERT, UPDATE или DELETE, ссылающиеся на некоторые или на все столбцы.

Обобщенные табличные выражения хранятся в оперативной памяти и существуют только во время первого выполнения запроса, который представляет эту таблицу.

3. Практическая часть

Пример 1: Создайте представление, содержащее список стран, население которых меньше 1 млн. чел., а площадь больше 100 тыс. кв. км, и используйте его:

```
CREATE VIEW Пример1
```

```
AS
```

```
SELECT
```

```
    Название
```

```
    ,Столица
```

```
    ,Площадь
```

```
    ,Население
```

```
    ,Континент
```

```
FROM
```

```
    Страны
```

WHERE

Население < 1000000

AND

Площадь > 100000

SELECT

Название

,Столица

,Площадь

,Население

,Континент

FROM

Пример1

Пример 2: Создайте представление, содержащее список континентов, суммарную площадь и суммарное население стран, которые находятся на каждом континенте и используйте его:

CREATE VIEW Пример2

(

Континент

,Площадь

,Население

)

AS

SELECT

Континент

,SUM(Площадь)

,SUM(Население)

FROM

Страны

GROUP BY

Континент

SELECT

Континент

,Площадь

,Население

FROM

Пример2

Пример 3: Создайте представление, содержащее фамилии преподавателей, должность, каждого преподавателя, звание, степень, место работы, зарплату и используйте его:

CREATE VIEW Пример3

```
(  
    Фамилия  
    ,Должность  
    ,Звание  
    ,Степень  
    ,Кафедра  
    ,Зарплата
```

```
)
```

AS

SELECT

```
    Фамилия  
    ,Должность  
    ,Звание  
    ,Степень  
    ,Название  
    ,Зарплата
```

FROM

```
    Сотрудник С
```

```
        INNER JOIN Преподаватель П ON С.Таб_номер = П.Таб_номер
```

```
        INNER JOIN Кафедра К ON С.Шифр = К.Шифр
```

SELECT

```
    Фамилия  
    ,Должность  
    ,Звание  
    ,Степень  
    ,Кафедра  
    ,Зарплата
```

FROM

```
    Пример3
```

Пример 4: Создайте табличную переменную, содержащую три столбца («Номер недели», «Дата начала», «Дата конца»). Заполните ее для текущего года и используйте:

DECLARE @Пример4 TABLE

```
(  
    [Номер недели] INT,  
    [Дата начала] DATE,  
    [Дата конца] DATE  
)
```

```

DECLARE @T AS DATE, @N INT = 1
SET @T = CAST(YEAR(GETDATE()) AS CHAR(4)) + '0101'
WHILE DATEPART(WEEKDAY, @T) > 1
    SET @T = DATEADD(DAY, -1, @T)
PRINT DATEPART(WEEK, @T)
WHILE YEAR(@T) < YEAR(DATEADD(YEAR, 1, GETDATE()))
BEGIN
    INSERT
        @Пример4
    VALUES
        (@N, @T, DATEADD(DAY, 6, @T))

    SET @T = DATEADD(DAY, 7, @T)
    SET @N = @N + 1
END

SELECT
    [Номер недели]
    ,[Дата начала]
    ,[Дата конца]
FROM
    @Пример4

```

Пример 5: Создайте табличную переменную, содержащую список стран, площадь которых в 1000 раз меньше, чем средняя площадь стран в мире и используйте:

```

DECLARE @Пример5 TABLE
(
    Название VARCHAR(50),
    Столица VARCHAR(50),
    Площадь FLOAT,
    Население BIGINT,
    Континент VARCHAR(50)
)
INSERT INTO
    @Пример5
SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент

```

```

FROM
    Страны
WHERE
    Площадь * 1000 < (
        SELECT
            AVG(Площадь)
        FROM
            Страны
    )
SELECT
    Название
    ,Столица
    ,Площадь
    ,Население
    ,Континент
FROM
    @Пример5

```

Пример 6: Создайте локальную временную таблицу, имеющую три столбца («Название месяца», «Количество экзаменов», «Количество студентов»), заполните и используйте ее:

```

SELECT
    DATENAME(MONTH, Дата) AS [Название месяца]
    , COUNT(DISTINCT Код) AS [Количество экзаменов]
    , COUNT(DISTINCT Рег_номер) AS [Количество студентов]
INTO
    #Пример6
FROM
    Экзамен
GROUP BY
    DATENAME(MONTH, Дата)

SELECT * FROM #Пример6

```

Пример 7: Создайте глобальную временную таблицу, содержащую название стран и плотность их населения, заполните и используйте ее:

```

CREATE TABLE ##Пример7
(
    Название VARCHAR(50),
    Плотность FLOAT
)
INSERT INTO
    ##Пример7
    (Название, Плотность)

```

```

SELECT
    Название, ROUND(Население / Площадь, 0) AS Плотность
FROM
    Страны
SELECT * FROM ##Пример7
DROP TABLE #Пример6

```

Пример 8: С помощью обобщенных табличных выражений, напишите запрос для вывода списка сотрудников, чьи зарплаты меньше, чем средняя зарплата по кафедре, их зарплаты и название кафедры:

```

WITH СЗК AS
(
    SELECT
        К.Название AS Кафедра
        ,К.Шифр
        ,AVG(Зарплата) AS [Средняя зарплата по кафедре]
    FROM
        Сотрудник С
        INNER JOIN Кафедра К ON С.Шифр = К.Шифр
    GROUP BY
        К.Название, К.Шифр
)
SELECT
    С.Фамилия
    , С.Зарплата
    , З.Кафедра
    , З.[Средняя зарплата по кафедре]
FROM
    Сотрудник С
    INNER JOIN СЗК З ON С.Шифр = З.Шифр
WHERE
    С.Зарплата < З.[Средняя зарплата по кафедре]

```

4. Задание

1. Создайте представление, содержащее список африканских стран, население которых больше 10 млн. чел., а площадь больше 500 тыс. кв. км, и используйте его.
2. Создайте представление, содержащее список континентов, среднюю площадь стран, которые находятся на нем, среднюю плотность населения, и используйте его.
3. Создайте представление, содержащее фамилии преподавателей, их должность, звание, степень, место работы, количество их экзаменов, и используйте его.
4. Создайте табличную переменную, содержащую три столбца («Номер месяца», «Название месяца», «Количество дней»), заполните ее для текущего года, и используйте ее.
5. Создайте табличную переменную, содержащую список стран, площадь которых в 100 раз меньше, чем средняя площадь стран на континенте, где они находятся, и используйте ее.
6. Создайте локальную временную таблицу, имеющую три столбца («Номер недели», «Количество экзаменов», «Количество студентов»), заполните и используйте ее.
7. Создайте глобальную временную таблицу, содержащую название континентов, наибольшую и наименьшую площадь стран на них, заполните и используйте ее.
8. С помощью обобщенных табличных выражений напишите запрос для вывода списка сотрудников, чьи зарплаты меньше, чем средняя зарплата по факультету, их зарплаты и название факультета.
9. Напишите команды для удаления всех созданных вами представлений.

Практическая работа № 16

Курсоры

1. Цель работы

1. Изучить использование курсоров.
2. Изучить прокрутку курсоров.
3. Изучить использование циклов в курсорах.
4. Изучить использование переменных в курсорах.

2. Теоретическая часть

Инструкции Transact-SQL выполняют операции над множествами, но интерактивным приложениям иногда требуется обрабатывать результаты построчно. Для выполнения команд над отдельной строкой предусмотрены *курсоры*. Открытие курсора в результирующем наборе делает возможной его построчную обработку. Можно присвоить курсор переменной или параметру с типом данных CURSOR.

Курсоры позволяют усовершенствовать обработку результатов:

- ☐ позиционируясь на отдельные строки результирующего набора;
- ☐ получая одну или несколько строк от текущей позиции в результирующем наборе;
- ☐ поддерживая изменение данных в строках в текущей позиции результирующего набора;
- ☐ поддерживая разные уровни видимости изменений, сделанных другими пользователями для данных, представленных в результирующем наборе;
- ☐ предоставляя инструкциям Transact-SQL в скриптах, хранимых процедурах и триггерах доступ к данным результирующего набора.

Обычно курсоры используются для выбора из базы данных некоторого подмножества хранимой в ней информации. В каждый момент времени прикладной программой может быть проверена одна строка курсора. Курсоры часто применяются в операторах SQL, встроенных в написанные на языках процедурного типа прикладные программы. Некоторые из них неявно создаются сервером базы данных, в то время как другие определяются программистами.

В соответствии со стандартом SQL при работе с курсорами можно выделить следующие основные действия:

- ☐ создание или объявление курсора;
- ☐ открытие курсора, т.е. наполнение его данными, которые сохраняются в многоуровневой памяти;
- ☐ выборка из курсора и изменение с его помощью строк данных;

□ закрытие курсора, после чего он становится недоступным для пользовательских программ;

□ освобождение курсора, т.е. удаление курсора как объекта, поскольку его закрытие необязательно освобождает ассоциированную с ним память.

После освобождения курсора ассоциированная с ним память также освобождается. При этом становится возможным повторное использование его имени.

В некоторых случаях применение курсора неизбежно. Однако по возможности этого следует избегать и работать со стандартными командами обработки данных: SELECT, UPDATE, INSERT, DELETE. Помимо того, что курсоры не позволяют проводить операции изменения над всем объемом данных, скорость выполнения операций обработки данных посредством курсора заметно ниже, чем у стандартных средств Transact-SQL.

SQL Server поддерживает *четыре типа курсоров*:

Однонаправленный курсор – указывается как FORWARD_ONLY и не поддерживает прокрутку. Он также называется курсором FIREHOSE и поддерживает только получение строк последовательно, от начала до конца курсора. Строки нельзя получить из базы данных, пока они не будут выбраны. Результаты всех инструкций INSERT, UPDATE и DELETE, влияющих на строки результирующего набора (выполненных текущим пользователем или зафиксированных другими пользователями), отображаются как строки, выбранные из курсора.

Статический курсор – полный результирующий набор статического курсора создается в базе данных TEMPDB при открытии курсора. Статический курсор всегда отображает результирующий набор точно в том виде, в котором он был при открытии курсора. Статическими курсорами обнаруживаются лишь некоторые изменения или не обнаруживаются вовсе, но при этом в процессе прокрутки такие курсоры потребляют сравнительно мало ресурсов. Статические курсоры всегда доступны только для чтения.

KEYSET курсор – членство и порядок строк в курсоре, управляемом набором ключей, являются фиксированными при открытии курсора. Такие курсоры управляются с помощью набора уникальных идентификаторов – ключей. Ключи создаются из набора столбцов, который уникально идентифицирует строки результирующего набора.

Динамический курсор – это противоположность статических курсоров. Динамические курсоры отражают все изменения строк в результирующем наборе при прокрутке курсора. Значения типа данных, порядок и членство строк в результирующем наборе могут меняться для каждой выборки. Все инструкции UPDATE, INSERT и DELETE, выполняемые пользователями, видимы посредством курсора.

Упрощенный шаблон использования курсора имеет следующий синтаксис:

```
DECLARE <имя_курсора> CURSOR [FORWARD_ONLY | SCROLL]
FOR <SELECT_оператор>
OPEN <имя_курсора>
FETCH <NEXT|PRIOR|FIRST|LAST|ABSOLUTE <число>| RELATIVE <число>>
FROM <имя_курсора> INTO <@переменная>
CLOSE <имя_курсора>
DEALLOCATE <имя_курсора>
```

Инструкция DEALLOCATE удаляет связь между курсором и переменной, и освобождает структуры данных, составляющие курсор.

После создания курсора, чтобы его использовать, надо открыть курсор с помощью команды OPEN. А команда CLOSE закрывает открытый курсор, высвобождая текущий результирующий набор и снимая блокировки курсоров для строк.

Для получения определенной строки используется команда FETCH.

Ключевое слово NEXT возвращает следующую строку и перемещает указатель текущей строки на возвращенную строку. Если инструкция FETCH NEXT выполняет первую выборку в отношении курсора, она возвращает первую строку в результирующем наборе. NEXT является параметром по умолчанию выборки из курсора.

Ключевое слово PRIOR возвращает предыдущую строку и перемещает указатель текущей строки на возвращенную строку. Если инструкция FETCH PRIOR выполняет первую выборку из курсора, не возвращается никакая строка и положение курсора остается перед первой строкой.

Ключевое слово FIRST возвращает первую строку в курсоре и делает ее текущей.

Ключевое слово LAST возвращает последнюю строку в курсоре, делая ее текущей.

Ключевое слово ABSOLUTE с аргументом – положительным целым числом, возвращает строку с указанным номером от начала курсора, и делает ее текущей строкой. Если число отрицательное, возвращает строку с указанным номером от конца курсора, делая ее текущей строкой.

Ключевое слово RELATIVE с аргументом – положительным целым числом возвращает строку с указанным номером после текущей строки и делает ее текущей строкой. Если число отрицательное, возвращает строку с указанным номером до текущей строки и делает ее текущей строкой. Если число равно 0, возвращает текущую строку.

Ключевое слово INTO позволяет поместить данные из столбцов выборки в локальные переменные. Каждая переменная из списка, слева направо, связывается с соответствующим столбцом в результирующем наборе курсора. Типы данных переменных должны соответствовать типам данных соответствующего столбца результирующего набора. Количество переменных и столбцов тоже должны совпадать.

Для обработки результирующего набора построчно можно использовать инструкцию FETCH NEXT в цикле WHILE. Как условие в цикле используется функция @@FETCH_STATUS, которая возвращает состояние последней инструкции FETCH, вызванной в любом курсоре, открытом в рамках этого подключения.

Функция @@FETCH_STATUS возвращает одно из четырех значений:

- 0 Инструкция FETCH была выполнена успешно.
- 1 Выполнение инструкции FETCH завершилось неудачно или строка оказалась вне пределов результирующего набора.
- 2 Выбранная строка отсутствует.
- 9 Курсор не выполняет операцию выборки.

Упрощенный синтаксис использования функции @@FETCH_STATUS имеет следующий вид:

```
FETCH NEXT FROM <имя_курсора>
WHILE @@FETCH_STATUS = 0
BEGIN
    FETCH NEXT FROM <имя_курсора>
END
```

3. Практическая часть

Таблица *Ученики*:

ID	Фамилия	Предмет	Школа	Баллы
1	Иванова	Математика	Лицей	98,5
2	Петров	Физика	Лицей	99
3	Сидоров	Математика	Лицей	88
4	Полухина	Физика	Гимназия	78
5	Матвеева	Химия	Лицей	92
6	Касимов	Химия	Гимназия	68
7	Нурулин	Математика	Гимназия	81
8	Авдеев	Физика	Лицей	87
9	Никитина	Химия	Лицей	94
10	Барышева	Химия	Лицей	88

Пример 1: Создайте курсор, содержащий отсортированные по алфавиту фамилии учеников и названия их предметов, откройте его, выведите первую строку, закройте и освободите курсор:

```
DECLARE MyCursor CURSOR
FOR
    SELECT
        Фамилия
        ,Предмет
    FROM
        Ученики
    ORDER BY
        Фамилия

OPEN MyCursor

FETCH MyCursor
```

`CLOSE MyCursor`
`DEALLOCATE MyCursor`

Пример 2: Создайте курсор с прокруткой, содержащий список учеников, откройте его, выведите пятую, предыдущую, с конца четвертую, шесть позиций назад находящуюся, четыре позиций вперед находящуюся, следующую, первую, последнюю строку, закройте и освободите курсор:

```
DECLARE MyCursor CURSOR SCROLL
FOR
    SELECT
        ID
        ,Фамилия
        ,Предмет
        ,Школа
        ,Баллы
    FROM
        Ученики

OPEN MyCursor

FETCH ABSOLUTE 5 FROM MyCursor
FETCH PRIOR FROM MyCursor
FETCH ABSOLUTE -4 FROM MyCursor
FETCH RELATIVE -6 FROM MyCursor
FETCH RELATIVE 4 FROM MyCursor
FETCH NEXT FROM MyCursor
FETCH FIRST FROM MyCursor
FETCH LAST FROM MyCursor

CLOSE MyCursor
DEALLOCATE MyCursor
```

Пример 3: С помощью курсора, вычислите среднее арифметическое значение балла у учеников с наибольшим и наименьшим баллом:

```
DECLARE MyCursor CURSOR SCROLL
FOR
    SELECT
        Баллы
    FROM
        Ученики
    ORDER BY
        Баллы
```

```

DECLARE @S FLOAT = 0, @B FLOAT
OPEN MyCursor

FETCH FIRST FROM MyCursor INTO @B
SET @S = @S + @B
FETCH LAST FROM MyCursor INTO @B
SET @S = @S + @B

SET @S = @S / 2
PRINT @S

CLOSE MyCursor
DEALLOCATE MyCursor

```

Пример 4: С помощью курсора, сгенерируйте строку вида «Ученики <список фамилий и названий школ, разделенных запятыми> участвовали в олимпиаде»:

```

DECLARE MyCursor CURSOR SCROLL
FOR
    SELECT
        Фамилия
        ,Школа
    FROM
        Ученики

DECLARE @S VARCHAR(2000), @F VARCHAR(50), @W VARCHAR(50)
OPEN MyCursor

SET @S = 'Ученики'
FETCH NEXT FROM MyCursor INTO @F, @W
WHILE @@FETCH_STATUS = 0
BEGIN
    SET @S = @S + ', ' + @F + ' из школы ' + @W + ' '
    FETCH NEXT FROM MyCursor INTO @F, @W
END

SET @S = @S + ' участвовали на олимпиаде.'
PRINT @S

CLOSE MyCursor
DEALLOCATE MyCursor

```

Пример 5: Создайте курсор, содержащий список учеников, с его помощью выведите учеников с четной позицией:

```
DECLARE MyCursor CURSOR SCROLL
FOR
    SELECT
        ID
        ,Фамилия
        ,Предмет
        ,Школа
        ,Баллы
    FROM
        Ученики

OPEN MyCursor

FETCH ABSOLUTE 2 FROM MyCursor
WHILE @@FETCH_STATUS = 0
BEGIN
    FETCH RELATIVE 2 FROM MyCursor
END

CLOSE MyCursor
DEALLOCATE MyCursor
```

Пример 6: Создайте курсор, содержащий отсортированный по убыванию баллов список учеников, откройте его, для каждого ученика выведите фамилию, предмет, школу, баллы и разницу баллов с предыдущим учеником:

```
DECLARE MyCursor CURSOR SCROLL
FOR
    SELECT
        Фамилия
        ,Предмет
        ,Школа
        ,Баллы
    FROM
        Ученики

DECLARE @F VARCHAR(50)
DECLARE @P VARCHAR(50)
DECLARE @S VARCHAR(50)
DECLARE @B FLOAT
DECLARE @OB FLOAT = 0
```

```

OPEN MyCursor

FETCH NEXT FROM MyCursor INTO @F, @P, @S, @B
WHILE @@FETCH_STATUS = 0
BEGIN
    SELECT
        @F AS Фамилия
        ,@P AS Предмет
        ,@S AS Школа
        ,@B AS Баллы
        ,ABS(@B - @OB) AS Разница
    SET @OB = @B
    FETCH NEXT FROM MyCursor INTO @F, @P, @S, @B
END

CLOSE MyCursor
DEALLOCATE MyCursor

```

4. Задание

1. Создайте курсор, содержащий отсортированные по баллам фамилии и баллы учеников, откройте его, выведите первую строку, закройте и освободите курсор.
2. Создайте курсор с прокруткой, содержащий список учеников, откройте его, выведите пятую, предыдущую, с конца четвертую, следующую, первую строку, закройте и освободите курсор.
3. Создайте курсор с прокруткой, содержащий список учеников, откройте его, выведите последнюю, шесть позиций назад находящуюся, четыре позиций вперед находящуюся строку, закройте и освободите курсор.
4. С помощью курсора, вычислите сумму баллов у учеников с наибольшим и наименьшим баллом.
5. С помощью курсора, сгенерируйте строку вида «Ученики <список фамилий и названий предметов, разделенных запятыми> участвовали в олимпиаде».
6. Создайте курсор, содержащий список учеников, с его помощью выведите учеников с нечетной позицией.
7. Создайте курсор, содержащий отсортированный по убыванию баллов список учеников, откройте его, для каждого ученика выведите фамилию, предмет, школу, баллы и процентное соотношение баллов с предыдущим учеником.

Практическая работа № 17

Оконные функции

1. Цель работы

1. Изучить оконные функции.
2. Изучить аналитические функции.
3. Изучить ранжирующие функции.
4. Изучить функции смещения.

2. Теоретическая часть

Оконные функции используются для вычисления в заданной секции. Оконные функции не приводят к группированию строк в одну строку вывода, строки сохраняют свои отдельные идентификаторы, а агрегированное значение добавляется к каждой строке.

Для определения секций используется инструкция OVER. Упрощенный синтаксис имеет следующий вид:

<функция> <столбец для вычислений> OVER ([PARTITION BY <столбец для группировки>] [ORDER BY <столбец для сортировки>])

Предложение PARTITION BY разделяет результирующий набор запроса на секции. Оконная функция применяется к каждой секции отдельно, и вычисление начинается заново для каждой секции.

Предложение ORDER BY определяет сортировку строк в каждой секции результирующего набора.

Оконные функции разделяются на *агрегирующие*, *ранжирующие* и *функции смещения*.

Агрегирующие функции MAX(), MIN(), SUM, AVG(), COUNT() можно применить к секциям результирующего набора запроса. Синтаксис функций имеет следующий вид:

MAX|MIN|SUM|AVG|COUNT(<столбец>) OVER([PARTITION BY <столбцы>] [ORDER BY <столбцы>])

В агрегирующих функциях предложение PARTITION BY можно не указывать, тогда функция обрабатывает все строки результирующего набора запроса как одну группу. Предложение ORDER BY определяет последовательность, в которой строкам назначаются уникальные номера. Его также можно не указать.

Ранжирующие функции возвращают ранжирующее значение для каждой строки в секции и являются недетерминированными.

В ранжирующих функциях предложение PARTITION BY можно не указывать, тогда функция обрабатывает все строки результирующего набора запроса как одну группу. Предложение ORDER BY определяет последовательность, в которой строкам назначаются уникальные номера. Оно должно указываться обязательно.

Transact-SQL содержит следующие ранжирующие функции:

ROW_NUMBER – нумерует выходные данные результирующего набора, то есть, возвращает последовательный номер строки, начиная с 1, в секции результирующего набора. Синтаксис функции имеет следующий вид:

ROW_NUMBER() OVER([PARTITION BY <столбцы>] ORDER BY <столбцы>)

RANK – возвращает ранг каждой строки в секции результирующего набора. Ранг строки вычисляется как единица плюс количество рангов, находящихся до этой строки. В отличие от функции ROW_NUMBER, RANK назначает одинаковое значение строкам, претендующим на один ранг. Синтаксис функции имеет следующий вид:

RANK() OVER([PARTITION BY <столбцы>] ORDER BY <столбцы>)

DENSE_RANK – возвращает ранг каждой строки в секции результирующего набора без промежутков в значениях ранжирования. Ранг определенной строки равен количеству различных значений рангов, предшествующих строке, увеличенному на единицу. Синтаксис функции имеет следующий вид:

DENSE_RANK() OVER([PARTITION BY <столбцы>] ORDER BY <столбцы>)

NTILE – распределяет строки упорядоченной секции в заданное количество групп. Группы нумеруются, начиная с единицы. Для каждой строки функция NTILE возвращает номер группы, которой принадлежит строка. Синтаксис функции имеет следующий вид:

NTILE(<количество групп>) OVER([PARTITION BY <столбцы>] ORDER BY <столбцы>)

Функции смещения возвращают значение из другой строки секции результирующего набора запроса. Предложение ORDER BY должно указываться обязательно.

Transact-SQL содержит следующие функции смещения:

Функции LAG() и LEAD() – обращаются к данным из предыдущей или последующей строки того же результирующего набора. Синтаксис функций имеет следующий вид:

LAG|LEAD(<столбец> [,<смещение>] [,<значение по умолчанию>]) OVER([PARTITION BY <столбцы>] ORDER BY <столбцы>)

Параметр «смещение» указывает количество строк до строки перед или после текущей строки, из которой необходимо получить значение. Если значение аргумента не указано, то по умолчанию принимается 1.

«Значение по умолчанию» должно иметь такой же тип данных, как первый параметр, используется, когда «смещение» находится за пределами секции. Если не задано, то возвращается NULL.

Функции FIRST_VALUE() и LAST_VALUE() – возвращают первое или последнее значение из упорядоченного набора значений. Синтаксис функций имеет следующий вид:

FIRST_VALUE|LAST_VALUE(<столбец>) OVER([PARTITION BY <столбцы>] ORDER BY <столбцы>)

3. Практическая часть

Таблица *Ученики*:

ID	Фамилия	Предмет	Школа	Баллы
1	Иванова	Математика	Лицей	98,5
2	Петров	Физика	Лицей	99
3	Сидоров	Математика	Лицей	88
4	Полухина	Физика	Гимназия	78
5	Матвеева	Химия	Лицей	92
6	Касимов	Химия	Гимназия	68
7	Нурулин	Математика	Гимназия	81
8	Авдеев	Физика	Лицей	87
9	Никитина	Химия	Лицей	94
10	Барышева	Химия	Лицей	88

Пример 1: Вывести список учеников и максимальный балл в каждой строке:

```
SELECT
    Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
    , MAX(Баллы) OVER() AS Макс_Балл
FROM
    Ученики
```

Пример 2: Вывести список учеников и разницу между баллами ученика и минимальным баллом в каждой строке:

```
SELECT
    Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
    , Баллы - MIN(Баллы) OVER() AS Разница
FROM
    Ученики
```


Пример 3: Вывести список учеников и процентное соотношение к суммарному баллу в каждой строке:

```
SELECT
    Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
    ,Баллы * 100 / SUM(Баллы) OVER() AS Процент
FROM
    Ученики
```

Пример 4: Вывести список учеников и средний балл в школе в каждой строке:

```
SELECT
    Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
    ,AVG(Баллы) OVER(PARTITION BY Школа) AS Сред_Шк
FROM
    Ученики
```

Пример 5: Вывести список учеников и количество учеников в школе в каждой строке, отсортировать по школам в оконной функции:

```
SELECT
    Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
    ,COUNT(*) OVER(PARTITION BY Школа ORDER BY Школа) AS
Кол_Шк
FROM
    Ученики
```

Пример 6: Вывести список учеников и номер строки при сортировке по баллам по убыванию:

```
SELECT
    ROW_NUMBER() OVER(ORDER BY Баллы DESC) AS Номер_строки
    ,Фамилия
    ,Предмет
```

```

        ,Школа
        ,Баллы
FROM
        Ученики

```

Пример 7: Вывести список учеников и номер строки внутри школы при сортировке по баллам по убыванию:

```

SELECT
        ROW_NUMBER() OVER(PARTITION BY Школа ORDER BY Баллы DESC) AS
Номер_строки
        ,Фамилия
        ,Предмет
        ,Школа
        ,Баллы
FROM
        Ученики

```

Пример 8: Вывести список учеников и ранг по баллам в каждой школе:

```

SELECT
        RANK() OVER(PARTITION BY Школа ORDER BY Баллы DESC) AS Ранг_Шк
        ,Фамилия
        ,Предмет
        ,Школа
        ,Баллы
FROM
        Ученики

```

Пример 9: Вывести список учеников и сжатый ранг по баллам в каждой школе. Результат отсортировать по фамилии в алфавитном порядке:

```

SELECT
        DENSE_RANK() OVER(PARTITION BY Школа ORDER BY Баллы DESC) AS
Сж_Ранг_Шк
        ,Фамилия
        ,Предмет
        ,Школа
        ,Баллы
FROM
        Ученики
ORDER BY
        Фамилия

```

Пример 10: Вывести список учеников, распределенных по трем группам по фамилии:

```
SELECT
    NTILE(3) OVER(ORDER BY Фамилия) AS Гр_Фам
    ,Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
FROM
    Ученики
```

Пример 11: Вывести список учеников, распределенных по двум группам по баллам внутри школы:

```
SELECT
    NTILE(2) OVER(PARTITION BY Школа ORDER BY Баллы DESC) AS Гр_Балл
    ,Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
FROM
    Ученики
```

Пример 12: Вывести список учеников и разницу с баллами предыдущего ученика, при сортировке по возрастанию баллов:

```
SELECT
    Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
    ,Баллы - LAG(Баллы) OVER(ORDER BY Баллы) AS Разница
FROM
    Ученики
```

Пример 13: Вывести список учеников и разницу с баллами ученика через две позиции при сортировке по убыванию баллов, значение по умолчанию использовать 0:

```
SELECT
    Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
```

```

        ,Баллы - LEAD(Баллы, 2, 0) OVER(ORDER BY Баллы DESC) AS Разница
FROM
    Ученики

```

Пример 14: Вывести список учеников и разницу с баллами первого ученика при сортировке по убыванию баллов:

```

SELECT
    Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
    ,FIRST_VALUE(Баллы) OVER(ORDER BY Баллы DESC) - Баллы AS Разница
FROM
    Ученики

```

Пример 15: Вывести список учеников и разницу с баллами последнего ученика в школе при сортировке по убыванию баллов:

```

SELECT
    Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
    ,LAST_VALUE(Баллы) OVER(ORDER BY Баллы RANGE BETWEEN UN-
BOUNDED PRECEDING AND UNBOUNDED FOLLOWING) - Баллы AS Разница
FROM
    Ученики

```

4. Задание

1. Вывести список учеников и разницу между баллами ученика и максимальным баллом в каждой строке.
2. Вывести список учеников и процентное соотношение к среднему баллу в каждой строке.
3. Вывести список учеников и минимальный балл в школе в каждой строке.
4. Вывести список учеников и суммарный балл в школе в каждой строке, отсортировать по школам в оконной функции.
5. Вывести список учеников и номер строки при сортировке по фамилиям в обратном алфавитном порядке.
6. Вывести список учеников, номер строки внутри школы и количество учеников в школе при сортировке по баллам по убыванию.

7. Вывести список учеников и ранг по баллам.
8. Вывести список учеников и сжатый ранг по баллам. Результат отсортировать по фамилии в алфавитном порядке.
9. Вывести список учеников, распределенных по пяти группам по фамилии.
10. Вывести список учеников, распределенных по трем группам по баллам внутри школы.
11. Вывести список учеников и разницу с баллами ученика, находящегося выше на три позиции при сортировке по возрастанию баллов.
12. Вывести список учеников и разницу с баллами следующего ученика при сортировке по убыванию баллов, значение по умолчанию использовать 0.

Практическая работа № 18

Инструкции OLAP

1. Цель работы

1. Изучить использование ROLLUP.
2. Изучить использование CUBE.
3. Изучить использование GROUPING SETS.
4. Изучить использование PIVOT.
5. Изучить использование UNPIVOT.

2. Теоретическая часть

Operator ROLLUP создаёт группу для каждого сочетания выражений столбцов. Кроме того, выполняет сведение результатов в промежуточные и общие итоги. Для этого запрос перемещается справа налево, уменьшая количество выражений столбцов, по которым он создает группы и агрегаты. Синтаксис команды имеет следующий вид:

GROUP BY ROLLUP(<список столбцов>)

или

GROUP BY <список столбцов> WITH ROLLUP

Порядок столбцов влияет на выходные данные ROLLUP и может отразиться на количестве строк в результирующем наборе.

GROUP BY ROLLUP(col1, col2) создает группы для каждой комбинации выражений столбцов в следующих списках:

col1, col2

col1, NULL

NULL, NULL – это общий итог.

Оператор CUBE создает группы для всех возможных сочетаний столбцов. Синтаксис команды имеет следующий вид:

GROUP BY CUBE(<список столбцов>)

или

GROUP BY <список столбцов> WITH CUBE

GROUP BY CUBE(col1, col2) создает группы для каждой комбинации выражений столбцов в следующих списках:

col1, col2

col1, NULL

NULL, col2

NULL, NULL – это общий итог.

Оператор GROUPING SETS позволяет объединять несколько предложений GROUP BY в одно предложение GROUP BY. Результаты эквивалентны тем, что формируются с применением конструкции UNION ALL к указанным группам. Синтаксис команды имеет следующий вид:

GROUP BY GROUPING SETS(<список столбцов>)

Если параметр GROUPING SETS имеет два или более элементов, результатом будет объединение элементов.

SQL не консолидирует повторяющиеся группы, созданные для списка GROUPING SETS.

GROUP BY GROUPING SETS(col1, col2) создает группы для каждой комбинации выражений столбцов в следующих списках:

col1, NULL

NULL, col2

Для предложения GROUP BY, использующего ROLLUP, CUBE или GROUPING SETS, допускается максимум 32 выражения.

Функция GROUPING указывает, является ли указанное выражение столбца в списке GROUP BY статистическим или нет. В результирующем наборе возврат будет 1 (статистическое выражение) или ноль (нестатистическое выражение). Функция GROUPING может использоваться только в предложениях SELECT, HAVING и ORDER BY, если указано предложение GROUP BY.

Функция GROUPING_ID вычисляет уровень группирования. Функция GROUPING_ID может использоваться только в предложениях SELECT, HAVING и ORDER BY, если указано предложение GROUP BY.

Оператор PIVOT поворачивает возвращающее табличное значение выражение, преобразуя уникальные значения одного столбца выражения в несколько выходных столбцов. В случае необходимости PIVOT также объединяет оставшиеся повторяющиеся значения столбца и отображает их в выходных данных.

Синтаксис PIVOT является более простым и понятным, чем синтаксис, который может выполнить то же действие с помощью последовательности инструкций SELECT...CASE. Синтаксис имеет следующий вид:

SELECT < столбцы для группировки>, <пивируемые столбцы >

FROM

(<запрос возвращающий данных>)

AS <псевдоним>

PIVOT

(<агрегирующая функция>(<столбец>)

FOR [<столбец, значения которого будут заголовками>]

IN (<список пивируемых столбцов>)

) AS <псевдоним для пивот-таблицы>

Оператор UNPIVOT поворачивает возвращающее табличное значение выражения, преобразуя нескольких выходных столбцов в один столбец. Синтаксис имеет следующий вид:

```
SELECT <список столбцов>
FROM
<таблица>
UNPIVOT
(<столбец значения строк> FOR [<столбец, значения заголовков>]
IN (<список анпивиотируемых столбцов>))
) AS <псевдоним для анпивот-таблицы>
```

3. Практическая часть

Таблица *Ученики*:

ID	Фамилия	Предмет	Школа	Баллы
1	Иванова	Математика	Лицей	98,5
2	Петров	Физика	Лицей	99
3	Сидоров	Математика	Лицей	88
4	Полухина	Физика	Гимназия	78
5	Матвеева	Химия	Лицей	92
6	Касимов	Химия	Гимназия	68
7	Нурулин	Математика	Гимназия	81
8	Авдеев	Физика	Лицей	87
9	Никитина	Химия	Лицей	94
10	Барышева	Химия	Лицей	88

Пример 1: Напишите запрос, который выводит количество учеников по предметам по каждой школе, и промежуточные итоги:

```
SELECT
    Предмет
    ,Школа
    ,COUNT(Фамилия) AS Количество
FROM
    Ученики
GROUP BY
    Предмет, Школа WITH ROLLUP
```

Пример 2: Напишите запрос, который выводит количество учеников по предметам и по школам, и промежуточные итоги:

```
SELECT
```



```

        Предмет
        ,Школа
        ,COUNT(Фамилия) AS Количество
FROM
        Ученики
GROUP BY
        Предмет, Школа WITH CUBE

```

Пример 3: Напишите запрос, который выводит количество учеников по предметам и по школам:

```

SELECT
        Предмет
        ,Школа
        ,COUNT(Фамилия) AS Количество
FROM
        Ученики
GROUP BY
        GROUPING SETS(Предмет, Школа)

```

Пример 4: Напишите запрос, который выводит количество учеников по предметам по каждой школе и промежуточные итоги. NULL значения заменить на соответствующий текст:

```

SELECT
        COALESCE(Предмет, 'ИТОГО') AS Предмет
        ,COALESCE(Школа, 'Итого') AS Школа
        ,COUNT(Фамилия) AS Количество
FROM
        Ученики
GROUP BY
        ROLLUP(Предмет, Школа)

```

Пример 5: Напишите запрос, который выводит количество учеников по предметам и по школам, и промежуточные итоги. В итоговых строках NULL значения заменить на соответствующий текст в зависимости от группировки:

```

SELECT
        IF(GROUPING(Предмет)=1, 'ИТОГО', Предмет) AS Предмет
        ,IF(GROUPING(Школа)=1, 'Итого', Школа) AS Школа
        ,COUNT(Фамилия) AS Количество
FROM
        Ученики
GROUP BY
        CUBE(Предмет, Школа)

```

Пример 6: Напишите запрос, который выводит количество учеников по предметам и по школам. В итоговых строках NULL значения заменить на соответствующий текст в зависимости от уровней группировки:

```
SELECT
    CASE GROUPING_ID(Предмет, Школа)
        WHEN 1 THEN 'Итого по предметам'
        WHEN 3 THEN 'Итого'
        ELSE ''
    END AS Итого
    ,ISNULL(Предмет, '') AS Предмет
    ,ISNULL(Школа, '') AS Школа
    ,COUNT(Фамилия) AS Количество
FROM
    Ученики
GROUP BY
    ROLLUP(Предмет, Школа)
```

Пример 7: Напишите запрос, который выводит количество учеников по предметам по столбцам:

```
SELECT
    'Количество' AS [Количество учеников по предметам]
    ,Математика
    ,Физика
    ,Химия
FROM
    (
        SELECT
            Предмет
            ,Фамилия
        FROM
            Ученики
        ) AS SOURCE_TABLE
PIVOT
(
    COUNT(Фамилия)
    FOR Предмет IN (Математика, Физика, Химия)
) AS PIVOT_TABLE
```

Пример 8: Напишите запрос для вывода количества учеников для каждой школы по каждому предмету (школы должны быть указаны в строках, предметы в столбцах):

```
SELECT
    Школа
    ,Математика
    ,Физика
    ,Химия
FROM
    (
        SELECT
            Школа
            ,Предмет
            ,Фамилия
        FROM
            Ученики
        ) AS SOURCE_TABLE
PIVOT
(
    COUNT(Фамилия)
    FOR Предмет IN (Математика, Физика, Химия)
) AS PIVOT_TABLE
```

Пример 9: Напишите запрос, который выводит фамилию учеников и предметы вместе со школами в один столбец:

```
SELECT
    Фамилия,
    [Предмет или школа]
FROM Ученики
UNPIVOT (
    [Предмет или школа] FOR Значение IN (Предмет, Школа)
) unpvt
```

4. Задание

1. Напишите запрос, который выводит максимальный балл учеников по школам, по каждому предмету по каждой школе и промежуточные итоги.
2. Напишите запрос, который выводит минимальный балл учеников по школам и по предметам, и промежуточные итоги.
3. Напишите запрос, который выводит средний балл учеников по школам и по предметам.

4. Напишите запрос, который выводит количество учеников по каждой школе по предметам и промежуточные итоги. NULL значения заменить на соответствующий текст.
5. Напишите запрос, который выводит суммарный балл учеников по школам и по предметам, и промежуточные итоги. В итоговых строках NULL значения заменить на соответствующий текст в зависимости от группировки.
6. Напишите запрос, который выводит максимальный балл учеников по школам и по предметам. В итоговых строках NULL значения заменить на соответствующий текст в зависимости от уровней группировки.
7. Напишите запрос, который выводит средний балл учеников по школам в столбцы.
8. Напишите запрос, который выводит средний балл учеников по школам в столбцы и по предметам в строки.
9. Напишите запрос, который выводит названия предметов, фамилии учеников и школы в один столбец.

Практическая работа № 19

Динамический SQL, XML и JSON

1. Цель работы

1. Изучить использование динамического SQL.
2. Изучить вывод данных в формате XML.
3. Изучить вывод данных в формате JSON.

2. Теоретическая часть

В интерактивных приложениях часто состав SQL-запросов заранее не известен и может изменяться в зависимости от условий.

Для решения таких ситуаций используется динамический SQL. Запросы формируются в виде текстовых строк непосредственно во время работы программы. Выполнение динамического SQL медленнее, чем статического.

Для выполнения динамического SQL используется команда EXEC | EXECUTE. Упрощенный синтаксис имеет следующий вид:

EXEC | EXECUTE (<строка динамического SQL>)

Результат выполнения запроса можно получать в формате XML. Для этого в запросе необходимо указать предложение FOR XML.

В предложении FOR XML можно указать один из следующих режимов:

RAW – в этом режиме создается одиночный элемент <row> для каждой строки набора строк, возвращенного инструкцией SELECT. XML-иерархию можно создать с помощью написания вложенных запросов FOR XML.

AUTO – в этом режиме вложенность XML создается эвристически, в зависимости от метода определения инструкции SELECT.

EXPLICIT – этот режим предоставляет больше возможностей по управлению формой XML-структуры. В XML-структуре могут быть использованы смешанные атрибуты и элементы. Однако написание запросов в режиме EXPLICIT может быть очень обременительным.

PATH – этот режим совместно с вложенным запросом FOR XML обеспечивает гибкость режима EXPLICIT более простым образом.

Эти режимы на самом деле работают только при выполнении запросов, для которых они установлены. Они не влияют на результаты любых последующих запросов.

Результат выполнения запроса можно получать в формате JSON. Для этого в запросе необходимо указать предложение FOR JSON. Предложение FOR JSON упрощает клиентские приложения, делегируя форматирование выходных данных JSON из приложения в SQL Server.

В предложении FOR XML можно указать один из следующих режимов:

PATH – этот режим используется для того чтобы сохранить полный контроль над форматом выходных данных JSON. Можно создавать объекты-оболочки и вкладывать сложные свойства друг в друга.

AUTO – этот режим используется для того чтобы отформатировать выходные данные автоматически на основе структуры инструкции SELECT.

3. Практическая часть

Пример 1: Создайте и запустите динамический SQL-запрос, выбирающий все данные из заданной таблицы:

```
DECLARE @DSQL VARCHAR(100)
DECLARE @TN VARCHAR(50)

SET @TN = 'Ученики'
SET @DSQL = 'SELECT * FROM ' + @TN

EXECUTE (@DSQL)
```

Пример 2: Создайте и запустите динамический SQL-запрос, выбирающий всех учеников из таблицы «Ученики», вторая буква фамилии которых расположена в заданном диапазоне:

```
DECLARE @L1 CHAR(1)
DECLARE @L2 CHAR(1)

SET @L1 = 'а'
SET @L2 = 'д'

EXECUTE ('SELECT * FROM Ученики WHERE Фамилия LIKE "_" + @L1 + '-' + @L2
+ ']'%)
```

Пример 3: Создайте временную таблицу #Temp и добавить в нее название пяти таблиц из базы данных «Учебная». Создайте курсор, который, построчно читая таблицу #Temp, выбирает из каждой таблицы все данные:

```
CREATE TABLE #TEMP
(
    TABLENAME VARCHAR(50)
)

INSERT INTO
    #TEMP
```

VALUES

('Дисциплина'),
('Заявка'),
('Инженер'),
('Кафедра'),
('Сотрудник')

DECLARE TC CURSOR

FOR SELECT TABLENAME FROM #TEMP

OPEN TC

DECLARE @TN VARCHAR(50)

FETCH FROM TC INTO @TN

WHILE @@FETCH_STATUS = 0

BEGIN

EXECUTE ('SELECT * FROM ' + @TN)

FETCH FROM TC INTO @TN

END

CLOSE TC

DEALLOCATE TC

DROP TABLE #TEMP

Пример 4: Выберите данные из таблицы «Ученики» и экспортируйте в RAW формате XML:

SELECT

ID
,Фамилия
,Предмет
,Школа
,Баллы

FROM

Ученики

FOR XML RAW

Пример 5: Выберите данные из таблицы «Страны» и экспортируйте в PATH формате XML:

SELECT

Название
,Столица

```

        ,Площадь
        ,Население
        ,Континент
FROM
    Страны
FOR XML PATH

```

Пример 6: Выберите данные из таблицы «Ученики» и экспортируйте в PATH формате JSON:

```

SELECT
    ID
    ,Фамилия
    ,Предмет
    ,Школа
    ,Баллы
FROM
    Ученики
FOR JSON PATH

```

4. Задание

1. Создайте и запустите динамический SQL-запрос, выбирающий первые N строк из заданной таблицы.
2. Создайте и запустите динамический SQL-запрос, выбирающий все страны из таблицы «Страны», последняя буква названия которых расположена в заданном диапазоне.
3. Создайте временную таблицу #Temp и добавьте к ней название столбцов таблицы «Страны». Создайте курсор, который, построчно читая таблицу #Temp, выбирает каждый раз соответствующий столбец из таблицы «Страны».
4. Создайте процедуру, которая принимает как параметр список столбцов, название таблицы и выбирает заданные столбцы из заданной таблицы.
5. Создайте процедуру, принимающую как параметр список столбцов, название таблицы, название проверяемого столбца, знак сравнения, значение проверки и выбирающую заданные столбцы из заданной таблицы в заданных условиях.
6. Выберите список европейских стран из таблицы «Страны» и экспортируйте в RAW формате XML.
7. Выберите список стран с населением больше 100 млн. чел. из таблицы «Страны» и экспортируйте в PATH формате XML.
8. Выберите список учеников из школы «Лицей» из таблицы «Ученики» и экспортируйте в PATH формате JSON

Практическая работа № 20

Пространственные данные

1. Цель работы

1. Изучить пространственные данные.
2. Изучить тип данных GEOMETRY.
3. Изучить тип данных GEOGRAPHY.

2. Теоретическая часть

Пространственные данные представляют сведения о физическом расположении и форме геометрических объектов. Этими объектами могут быть точки расположения или более сложные объекты, такие как страны, дороги или озера.

SQL Server поддерживает два пространственных типа данных: GEOMETRY и GEOGRAPHY.

Пространственный тип данных GEOMETRY представляет данные в евклидовой (плоской) системе координат.

Пространственный тип данных GEOGRAPHY представляет данные в системе координат для сферической Земли.

Типы данных GEOMETRY и GEOGRAPHY поддерживают шестнадцать объектов пространственных данных или типов экземпляров. Однако только одиннадцать из этих типов экземпляров являются материализуемыми. Такие экземпляры можно создавать в базе данных и работать с ними.

Часто используемые объекты:

POINT(X Y) – для геометрических типов данных представляет собой единое место, где x и y представляют координаты создаваемого экземпляра. Для географических типов данных представляет единичное расположение, где X представляет широту, а Y – долготу. Значения широты и долготы измеряются в градусах. Значения широты находятся в интервале [-90, 90]. Значения долготы находятся в интервале [-180, 180].

LINESTRING(X₁ Y₁, X₂ Y₂ [, X_n Y_n]) – является одномерным объектом, представляющим последовательность точек и соединяющих их линейных сегментов.

CIRCULARSTRING(X₁ Y₁, X₂ Y₂, X₃ Y₃ [, X_n Y_n]) – коллекция, состоящая из нуля или большего количества непрерывных круговых сегментов дуги. *Сегмент дуги* – это сегмент кривой, определяемый тремя точками на двумерной плоскости; первая точка не может совпадать с третьей. Если все три точки сегмента дуги лежат на одной прямой, сегмент дуги считается линейным сегментом.

POLYGON(X₁ Y₁, X₂ Y₂, X₃ Y₃ [, X_n Y_n], X₁ Y₁) – представляет собой двухмерную поверхность, хранимую в виде последовательности точек, содержащую не менее трех уникальных точек, первая и последняя точки должны совпадать.

3. Практическая часть

Пример 1: Создайте временную таблицу, которая имеет один столбец типа GEOMETRY. Добавьте в таблицу пространственный объект LINESTRING с координатами (1 1, 3 3, 2 4, 2 0, 1 1). Создайте SQL-запрос, выбирающий все данные из заданной таблицы:

```
CREATE TABLE #ST
(
    D GEOMETRY
)

INSERT
    #ST
VALUES
('LINESTRING(1 1, 3 3, 2 4, 2 0, 1 1)')

SELECT
    D
FROM
    #ST

DROP TABLE #ST
```

Пример 2: Создайте временную таблицу, которая имеет один столбец типа GEOMETRY. Добавьте в таблицу пространственный объект POLYGON с координатами (-3 7, 10 24, 30 16, 13 18, 4 0, 14 -6, 6 -13, 0 -4, -14 -13, -22 -39, -20 -7, -7 3, -11 7, -12 9, -11 10, -9 10, -3 7). Создайте SQL-запрос, выбирающий все данные из заданной таблицы:

```
CREATE TABLE #ST
(
    D GEOMETRY
)

INSERT
    #ST
VALUES
('POLYGON((-3 7, 10 24, 30 16,
            13 18, 4 0, 14 -6,
            6 -13, 0 -4, -14 -13,
            -22 -39, -20 -7, -7 3,
            -11 7, -12 9, -11 10,
            -9 10, -3 7)))')
```

```

SELECT
    D
FROM
    #ST

DROP TABLE #ST

```

4. Задание

1. Создайте временную таблицу, состоящую из двух полей типа geometry и varchar(20). Заполните таблицу заданными полигонами и их названиями. Выберите все поля из таблицы.

Номер участка	Долгота	Широта
Участок №6		
Точка №1	21369,11	21603,40
Точка №2	21584,64	21162,81
Точка №3	21587,40	21027,71
Точка №4	20727,78	21009,83
Точка №5	20720,45	21369,76
Точка №6	20898,96	21373,41
Участок №3		
Точка №1	20728,49	20975,13
Точка №2	20740,38	20393,97
Точка №3	21107,99	20401,49
Точка №4	21103,40	20625,44
Точка №5	21160,39	20626,63
Точка №6	21153,08	20983,82
Участок №4		
Точка №1	21588,12	20992,79
Точка №2	21597,74	20441,54
Точка №3	21269,66	20435,81
Точка №4	21266,28	20629,74
Точка №5	21209,25	20628,75
Точка №6	21203,01	20985,98
Участок №7		
Точка №1	22775,32	21461,21
Точка №2	23234,54	21075,88
Точка №3	22977,79	20610,45
Точка №4	22637,02	20798,44
Точка №5	22549,38	21051,51

Номер участка	Долгота	Широта
Участок №8		
Точка №1	22624,91	19970,80
Точка №2	22854,97	20387,52
Точка №3	22398,62	20639,24
Точка №4	22168,68	20222,45
Участок №11		
Точка №1	23621,55	20255,27
Точка №2	23855,79	20314,44
Точка №3	23827,55	20426,38
Точка №4	23946,32	20641,48
Точка №5	23569,81	20849,18
Точка №6	23524,91	20850,59
Точка №7	23295,70	20435,08
Участок №12		
Точка №1	23596,67	19981,86
Точка №2	23366,76	19565,04
Точка №3	22944,29	19798,09
Точка №4	23174,24	20214,89
Участок №13		
Точка №1	23974,68	20627,60
Точка №2	23863,62	20422,64
Точка №3	23928,00	20159,98
Точка №4	23792,27	19913,93
Точка №5	24068,07	19761,76
Точка №6	24412,47	20386,08
Участок №14		
Точка №1	24045,03	19732,76
Точка №2	23622,57	19965,83
Точка №3	23392,62	19549,03
Точка №4	23815,10	19315,97
Участок №5 зап		
Точка №1	21638,11	20993,74
Точка №2	21649,39	20442,59
Точка №3	21793,84	20445,55
Точка №4	22017,66	20851,20
Точка №5	21754,09	20996,13
Участок №5 вост		
Точка №1	22348,79	20662,78
Точка №2	22059,86	20822,21
Точка №3	21854,05	20449,22
Точка №4	21856,16	20390,95

Номер участка	Долгота	Широта
Точка №5	22118,83	20246,02
Участок №7 А		
Точка №1	23231,72	20470,38
Точка №2	23004,06	20595,96
Точка №3	23257,96	21056,22
Точка №4	23460,94	20885,90
Участок № б/н		
Точка №1	22899,36	20403,01
Точка №2	23127,02	20277,41
Точка №3	23217,83	20442,02
Точка №4	22990,17	20567,60
Участок № б/н		
Точка №1	22869,16	20419,68
Точка №2	22536,51	20603,15
Точка №3	22627,15	20767,87
Точка №4	22959,86	20584,33
Участок № б/н		
Точка №1	22407,55	20676,04
Точка №2	22559,71	20927,48
Точка №3	22608,36	20789,50
Точка №4	22513,51	20617,58
Участок №8		
Точка №1	22651,93	19957,66
Точка №2	22881,85	20374,45
Точка №3	23109,51	20248,85
Точка №4	22879,56	19832,05
Участок № б/н		
Точка №1	23618,51	20009,77
Точка №2	23650,78	20068,26
Точка №3	23610,13	20229,12
Точка №4	23284,66	20408,66
Точка №5	23193,85	20244,05
Участок № б/н		
Точка №1	23635,13	20229,91
Точка №2	23860,44	20286,85
Точка №3	23891,24	20165,00
Точка №4	23761,22	19929,80
Точка №5	23638,63	19996,93
Точка №6	23676,61	20065,78
Озеро		
Точка №1	21637,28	21029,09

Номер участка	Долгота	Широта
Точка №2	21634,42	21174,83
Точка №3	21414,03	21625,36
Точка №4	22150,41	21985,58
Точка №5	22751,91	21480,87
Точка №6	22515,53	21054,35
Точка №7	22544,07	20975,30
Точка №8	22385,66	20688,12
Точка №9	21763,52	21031,31

Практическая работа

1. Создать таблицы (не менее 5-и) по своему варианту.
2. Заполнить таблицы (справочные таблицы – не менее 5-и строк, операционные таблицы – не менее 20-и).
3. Создать запросы:
 - a. Запрос на выбор всех данных по двум полям таблицы;
 - b. Запрос на выбор всех *неповторяющихся* данных по одному полю таблицы;
 - c. Запрос на выбор всех полей и записей таблицы, сгруппированных по значению одного поля, с использованием условия на группу (секции GROUP BY, HAVING) и с заголовками колонок, заданными в запросе;
 - d. Запрос на выбор всех *неповторяющихся* записей по одному полю таблицы с колонкой, образованной агрегирующей функцией SUM и озаглавленной в соответствии со смыслом;
 - e. Выбор нескольких (не всех) полей таблицы, отсортированных по *убыванию*;
 - f. Выбор произвольного количества полей таблицы с добавлением поля, являющегося результатом арифметического выражения, в котором участвуют значения поля таблицы;
 - g. Запрос на выбор всех записей по одному полю таблицы с колонкой, образованной агрегирующей функцией SUM и озаглавленной в соответствии со смыслом; выбор записей с использованием условия диапазона (between);
 - h. Запрос на выбор всех записей по произвольному количеству полей таблицы с использованием агрегирующей функции AVG и условием на отбор записей, заданном в секции WHERE;
 - i. Запрос на выбор двух полей таблицы с вычислением третьего поля по данным таблицы и сортировкой по убыванию по первому полю, по возрастанию по второму и по убыванию по третьему;
 - j. Запрос на выборку данных таблицы с условием сравнения по шаблону LIKE;
 - k. Запрос с отбором по условию и сортировкой по убыванию одного из полей, а также добавлением поля, содержащего для всех записей константу, определенную при конструировании запроса;
 - l. Запрос с использованием агрегирующих функций MIN и MAX;
 - m. Запрос с использованием сложного условия с логическими операторами AND, OR и сортировкой.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

№	Задание	Дополнительные возможности системы
	<i>Базы данных</i>	<i>Оrientировочные таблицы:</i>
1.	«Студенческая библиотека»	• «Список студентов» • «Список книг» • «Деятельность»
2.	«Страховая фирма»	• «Виды страховок» • «Клиенты\объекты» • «Страховая деятельность»
3.	«Агентство недвижимости»	• «Объекты недвижимости» • «Продажи» • «Покупки»
4.	ГИБДД (Государственная инспекция безопасности дорожного движения)	• «Список водителей» • «Список автомобилей» • «Штрафы»
5.	«Деканат ВУЗа»	• «Список студентов» • «Список предметов» • «Сессия»»
6.	«Отдел кадров производственного предприятия»	• «Сотрудники» • «Штатное расписание» • «Отделы» • «Цеха»
7.	«Фирмы покупки и продажи автомобилей»	• «Продажи» • «Покупки» • «Автомобили»
8.	«Гостиница»	• «Номера» • «Счета» • «Клиенты»
9.	«Расчет квартплаты ТСЖ»	• «Список жильцов» • «Оплаты» • «Тарифы»
10	«Железнодорожные кассы»	• «Продажи» • «Посадочные места» • «Направления»
11	«Авиапассажирские перевозки»	• «Рейсы» • «Самолеты» • «Продажи»
12	«Музей»	• «Экспонаты» • «Авторы» • «Экспозиции»

№	Задание	Дополнительные возможности системы
	<i>Базы данных</i>	<i>Ориентировочные таблицы:</i>
13	«Спортивные комплексы района»	• «Нормативы» • «Спортсмены» • «Соревнования»
14	«Экзаменационная сессия»	• «Предметы» • «Оценки» • «Студенты»
15	«Турагентство»	• «Туры» • «Продажи»
16	«Аптека»	• «Товары» • «Поставщики» • «Продажи»
17	«Сборка и реализация компьютеров»	• «Продукция» • «Клиенты» • «Заказы»
18	«Продуктовые магазины района»	• «Продажи» • «Отделы» • «Товары»
19	«Больница» (одного отделения)	• «Больные» • «Диагнозы» • «Врачи»
20	«Видеотека»	• «Артисты» • «Фильмы» • «Продажи»

Библиографический список

1. Алапати С.Р. Oracle Database 11g: Руководство администратора баз данных / Пер. с англ. М.: Вильямс, 2010.
2. Андон Ф., Резниченко В. Язык запросов SQL: Учебный курс. СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2006.
3. Аносов А. Критерии выбора СУБД при создании информационных систем. URL: <http://www.interface.ru/home.asp?artId=2147> дата обращения 24.05.2020).
4. Бондарь А.Г. Microsoft SQL Server 2014. СПб.: БХВ-Петербург, 2015.
5. Борри Х. Firebird: Руководство разработчика баз данных / Пер. с англ. СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
6. Виейра Р. Программирование баз данных Microsoft SQL Server 2005 для профессионалов / Пер. с англ. М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2008.
7. Голицына О.Л., Максимов Н.В., Попов И.И. Базы данных: Учеб. пособие. М.: Форум; ИНФРА-М, 2012.
8. Гринвальд Р., Стаковьяк Р., Стерн Дж. Oracle 11g. Основы / Пер. с англ. 4-е изд. СПб.: СимволПлюс, 2009.
9. Грофф Дж., Вайнберг П., Оппель Э. SQL: Полное руководство / Пер. с англ. 3-е изд. М.: ООО «И.Д. Вильямс». 2015.
10. Дейт К. Введение в системы баз данных. М.: Наука, 1980. 464 с.
11. Дейт К.Дж. Введение в системы баз данных / Пер. с англ. 8-е изд. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005.
12. Ковязин А.Н., Востриков С.М. Мир InterBase: архитектура, администрирование и разработка приложений баз данных в InterBase/FireBird/Yafill. 4-е изд. М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2006.
13. Коннолли Т., Бегг К., Страчан А. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика: учеб. пособие; пер. с англ. 2-е изд. М.: Вильямс, 2000. 1120 с.
14. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 432 с.
15. Логинов Д. Почему мне нравится FireBird. URL: <http://www.loginovprojects.ru/index.php?page=whyfirebird> (дата обращения 09.01.2020).
16. Мейер М. Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987. 608 с.
17. Официальный сайт компании IBase.ru. URL: <http://www.ibase.ru> (дата обращения 15.05.2020).
18. Официальный сайт компании Microsoft. URL: <http://www.microsoft.com> (дата обращения 31.05.2020).
19. Пери Дж., Пост Дж. Введение в Oracle 10g / Пер. с англ. М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2006.

20. Петкович Д. Microsoft® SQL Server 2012. Руководство для начинающих / Пер. с англ. СПб.: БХВ-Петербург, 2013.
21. Полякова Л. Основы SQL: электронный курс. URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/5/5/info> (дата обращения 19.04.2020).
22. Пржиялковский В. Контекст сеанса в Oracle. URL: http://citforum.ru/database/oracle/session_context/index.shtml (дата обращения 30.03.2020).
23. Руководство по языку SQL СУБД FireBird 4.0 / Под ред. Д. Симонова. URL: http://www.ibase.ru/files/firebird/Firebird_4_0_Language_Reference_RUS.pdf (дата обращения 15.06.2020).
24. Селко Д. Стиль программирования Джо Селко на SQL / Пер. с англ. М.: Русская редакция; СПб.: Питер, 2006.
25. Словарик по FireBird. URL: <http://www.firebirdsql.su> (дата обращения 18.02.2020).
26. Ульман Дж. Основы систем баз данных. М.: Финансы и статистика, 1983. 334 с.
27. Функции по категориям. URL: <http://oracleplsql.ru> (дата обращения 30.06.2020).
28. Bonie H. FireBird 3.0 Release Notes, 2013.
29. Chen P.P.-S. The Entity-relationship Model: Toward a Unified View of Data // SIGIR Forum. 1975. Vol. 10, no. 3. Pp. 9–9. DOI:10.1145/1095277.1095279.
30. Codd E.F. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks // Commun. ACM. 1970. Vol. 13, no. 6. Pp. 377–387. DOI:10.1145/362384.362685.
31. Fagin R. The Decomposition Versus Synthetic Approach to Relational Database Design // Proceedings of the 3rd International Conference on Very Large Data Bases. Vol. 3. VLDB Endowment, 1977. Pp. 441–446. (VLDB '77).
32. Kossmann D., Stocker K. Iterative Dynamic Programming: A New Class of Query Optimization Algorithms // ACM Trans. Database Syst. 2000. Vol. 25, no. 1. Pp. 43–82. DOI: 10.1145/352958.352982.
33. Lane P. Oracle Database Globalization Support Guide, 11g Release 2 (11.2) / P. Lane. URL: https://docs.oracle.com/cd/E11882_01/server.112/e10729/toc.htm (дата обращения 17.06.2020).
34. Lorentz D., Roeser M.B. Oracle Database SQL Language Reference, 11g Release 1 (11.1). URL: https://docs.oracle.com/cd/B28359_01/server.111/b28286/toc.htm (дата обращения 20.05.2020).
35. Moore S. Oracle Database Express Edition 2 Day Developer's Guide, 11g Release 2 (11.2). URL: https://docs.oracle.com/cd/E17781_01/appdev.112/e18147/toc.htm (дата обращения 20.05.2020).
36. Moore S. Oracle Database PL/SQL Language Reference, 11g Release 2 (11.2). URL: https://docs.oracle.com/cd/E11882_01/appdev.112/e25519 (дата обращения 12.02.2020).
37. Murray C. Oracle Database Express Edition 2 Day DBA, 11g Release 2 (11.2). URL: http://docs.oracle.com/cd/E17781_01/server.112/e18804.pdf (дата обращения 17.06.2020).

38. Nanda A. Efficient PL/SQL Coding // Arup Nanda. Oracle Database 11g: The Top New Features for DBAs and Developers. URL: <http://www.oracle.com/technetwork/articles/sql/11g-efficient-coding-093640.html> (дата обращения 17.04.2020).
39. Oracle Pipelined Table Functions. URL: <https://oracle-base.com/articles/misc/pipelined-table-functions> (дата обращения 06.06.2020).
40. The Notions of Consistency and Predicate Locks in a Database System / K.P. Eswaran [et al.] // Commun. ACM. 1976. Vol. 19, no. 11. Pp. 624–633. DOI: 10.1145/360363.360369.

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ
ПО МДК 11.01 ТЕХНОЛОГИЯ РАЗРАБОТКИ И ЗАЩИТЫ БАЗ
ДАННЫХ**

**для специальности: 09.02.07 «Информационные системы и
программирование»**

**Ставрополь
2025**

Критерии оценивания практических умений:

«Отлично» - ставится, если студент:

- а) уверенно и правильно выполняет манипуляцию в точном соответствии с алгоритмом;
- б) обнаруживает полное понимание целей выполняемой манипуляции, может обосновать свои действия, пользуясь профессиональной терминологией, правильно отвечает на дополнительные вопросы;
- в) свободно владеет речью (демонстрирует связность и последовательность в изложении);
- г) демонстрирует умение действовать в стандартных и нестандартных профессиональных ситуациях.

«Хорошо» - ставится, если студент обнаруживает практические умения, удовлетворяющие тем же требованиям, что и для отметки «отлично», но допускает единичные негрубые ошибки, которые сам же исправляет после замечания преподавателя.

«Удовлетворительно» - ставится, если студент обнаруживает практические умения, но:

- а) допускает неточности при выполнении алгоритма, не приводящие к негативным последствиям, затрудняется обосновать свои действия, затрудняется при ответе на дополнительные вопросы;
- б) излагает материал недостаточно связно и последовательно с частыми заминками и перерывами;
- в) испытывает затруднения в действиях при нестандартных профессиональных ситуациях.

«Неудовлетворительно» - ставится, если студент допускает грубые нарушения алгоритма действий и ошибки, влекущие за собой возникновение последствий, отсутствие умения действовать в стандартных профессиональных ситуациях.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
1 Установка PostgreSQL	7
1.1 Установка PostgreSQL для Windows	7
1.2 Установка PostgreSQL для Linux	12
1.3 Утилита pgAdmin III	14
1.4 Утилита psql	17
1.5 Контрольные вопросы	20
2 Описание практического примера	21
2.1 Наполнение тестовой БД	26
2.1.1 Создание базы данных	26
2.1.2 Создание таблиц	26
2.1.3 Создание последовательностей	28
2.1.4 Ввод данных	30
2.1.5 Создание индексов	33
2.2 Контрольные вопросы	34
3 Введение в язык SQL	35
3.1 Средства определения данных языка SQL	35
3.1.1 Оператор CREATE TABLE	35
3.1.2 Оператор ALTER TABLE	37
3.1.3 Операторы DROP TABLE и DROP	40
3.2 Средства запроса данных языка SQL	41
3.2.1 Чтение заданных столбцов из одиночной таблицы	41
3.2.2 Чтение заданных строк из одиночной таблицы	43
3.2.3 Чтение заданных строк и столбцов из одиночной таблицы	44
3.2.4 Диапазоны, специальные символы и пустые значения в предложениях WHERE	46
3.2.5 Сортировка результатов	48
3.2.6 Агрегатные функции SQL	50
3.2.7 Агрегатные функции и группировка	51
3.2.8 Оконные функции	53

3.2.9 Чтение данных из нескольких таблиц с применением вложенных запросов	54
3.2.10 Чтение данных из нескольких таблиц с помощью операции соединения	55
3.2.11 Внешние соединения	61
3.2.12 Объединения	62
3.3 Средства модификации данных языка SQL	63
3.3.1 Вставка данных, оператор INSERT	63
3.3.2 Изменение данных, оператор UPDATE	65
3.3.3 Удаление данных, оператор DELETE	65
3.4 Транзакции	66
3.4.1 Контрольные вопросы	68
4 Применение SQL	69
4.1 SQL-представления	69
4.1.1 Использование представлений для скрывания столбцов и строк	70
4.1.2 Использование представлений для отображения вычисляемых столбцов	71
4.1.3 Использование представлений для скрывания сложного синтаксиса	72
4.2 SQL-запросы в прикладных программах	76
4.3 Хранимые процедуры	77
4.4 Триггеры	81
4.4.1 Использование триггеров для проверки достоверности вводимых данных	82
4.4.2 Использование триггеров для присвоения значений по умолчанию	84
4.4.3 Триггер, обновляющий представление	86
4.4.4 Триггер, обеспечивающий ссылочную целостность	87
4.5 Правила	90
4.6 Модуль TABLEFUNC	90
4.7 Словарь метаданных	92
4.8 Контрольные вопросы	93

5	Дополнительные возможности	94
5.1	Функция ROW_NUMBER	94
5.2	Функция COALESCE	94
5.3	Числовые функции	95
5.4	Тригонометрические функции	99
5.5	Работа со строками	99
5.6	Работа с датой и временем	105
5.7	Контрольные вопросы	109
	Заключение	111
	Библиографический список	112

1 УСТАНОВКА POSTGRESQL

PostgreSQL — объектно-реляционная система управления базами данных, разработка которой ведется начиная с 1977 года. Работа началась с проекта Ingres в Калифорнийском университете (Беркли). В настоящее время над проектом PostgreSQL активно работает группа разработчиков со всего мира. PostgreSQL распространяется под свободной лицензией и с открытым исходным кодом.

В данной главе рассматриваются вопросы, связанные с инсталляцией PostgreSQL 9.5 для операционных систем семейства Windows NT и GNU/Linux. Успешность инсталляции и работоспособность СУБД PostgreSQL 9.5 проверялась авторами для систем Windows XP, Windows 8.1, Windows 10, Linux Mint 18, Ubuntu 16.04 и Fedora 24.

1.1 Установка PostgreSQL 9.5 для Windows

Начиная с 9.0 версии PostgreSQL для операционных систем семейства Windows NT, предоставляются дистрибутивы для архитектур x86 (32-разрядная) и x86_64 (64-разрядная). В данном пособии рассматривается установка 64-разрядной версии PostgreSQL 9.5.4 на 64-разрядную версию Windows 10 Профессиональная. Установка производилась под учетной записью пользователя, имеющего права администратора системы.

Установка начинается с автоматического процесса конфигурирования библиотеки Visual C++. Далее появляется типовое окно начала инсталляции (рис. 1.1). В следующем диалоговом окне предлагается указать каталог, в который будет устанавливаться PostgreSQL (рис. 1.2).

Очередное диалоговое окно предоставляет возможность указать каталог, в котором будут храниться файлы баз данных (рис. 1.3). Изменение данного параметра позволяет осуществить возможность хранения таких файлов на других дисках или в других каталогах, например, для увеличения производительности базы данных. Путь, указывающий на место хранения файлов баз данных, впоследствии можно изменить через файл конфигурации *postgresql.conf*.

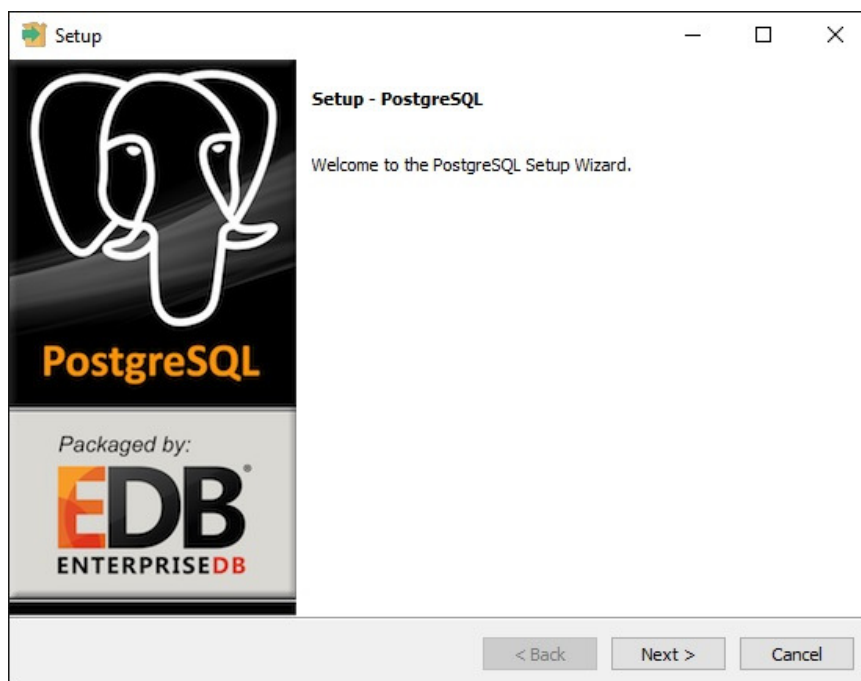


Рис. 1.1. Диалоговое окно инсталлятора PostgreSQL

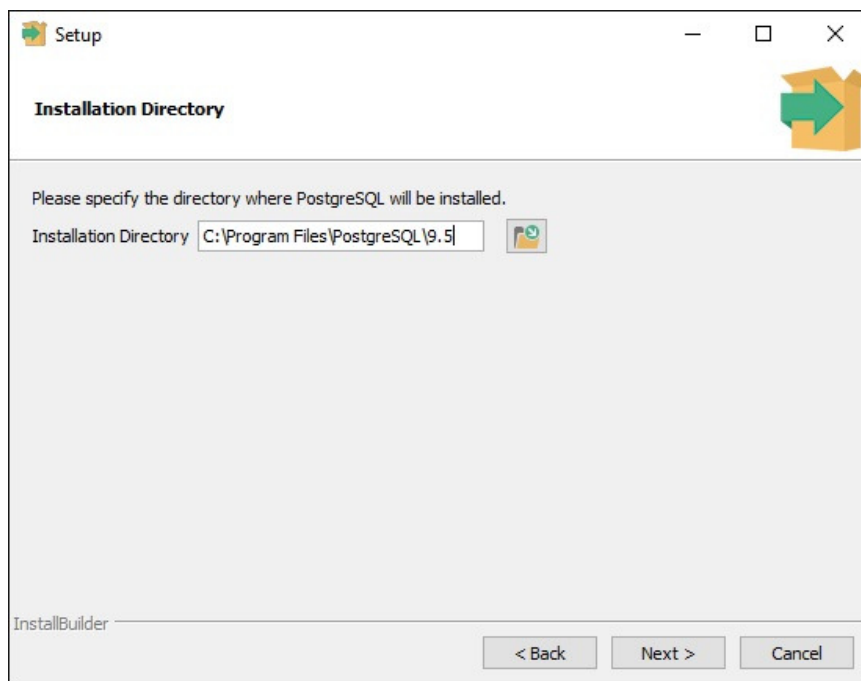


Рис. 1.2. Диалоговое окно определения каталога установки PostgreSQL

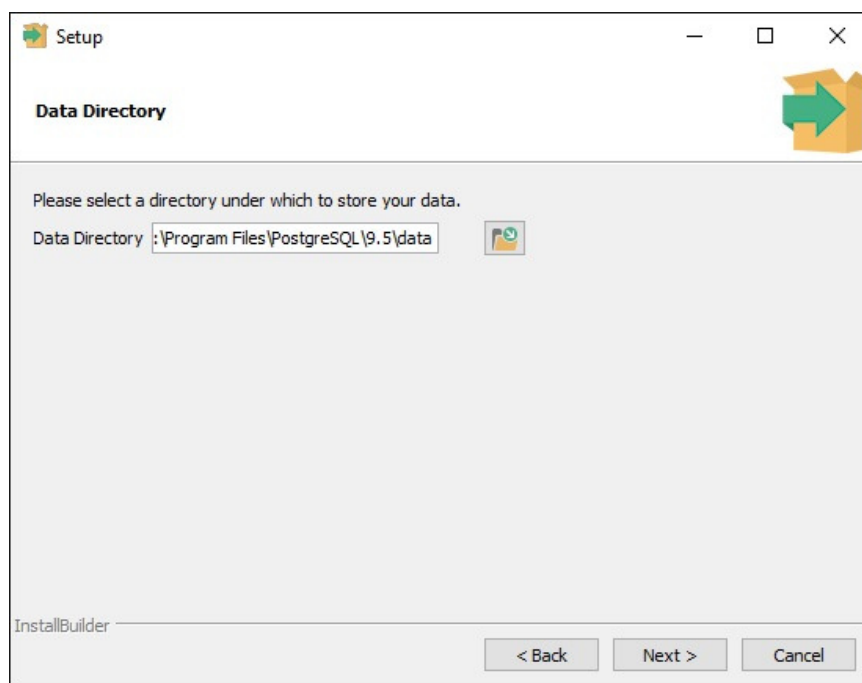


Рис. 1.3. Диалоговое окно определения каталога файлов баз данных PostgreSQL

В самой СУБД PostgreSQL есть специальный пользователь – суперпользователь *postgres*, который имеет максимальные права внутри СУБД, т. е. может создавать, модифицировать или удалять любые базы данных и учетные записи любых пользователей. Следующее диалоговое окно позволяет задать пароль для суперпользователя *postgres* (рис. 1.4).

В диалоговом окне на рисунке 1.5 установщик предлагает указать порт TCP/IP для PostgreSQL. В большинстве случаев можно оставить тот, который предлагается по умолчанию.

В следующем диалоговом окне (рис. 1.6) система предлагает выбрать локаль, с использованием которой будет инициализирован кластер баз данных и которая в дальнейшем будет использоваться по умолчанию при создании других баз данных. Это довольно важный шаг, так как локаль определяет такой важный параметр как кодировка данных в созданных базах данных. На рисунке 1.6 выбрана локаль «Russia, Russia». В этом случае кодировка базы данных будет windows-1251. Иногда есть необходимость работать с кодировкой UTF-8. Эта кодировка будет установлена в том случае, если в данном окне выбирается локаль по умолчанию: «by default».

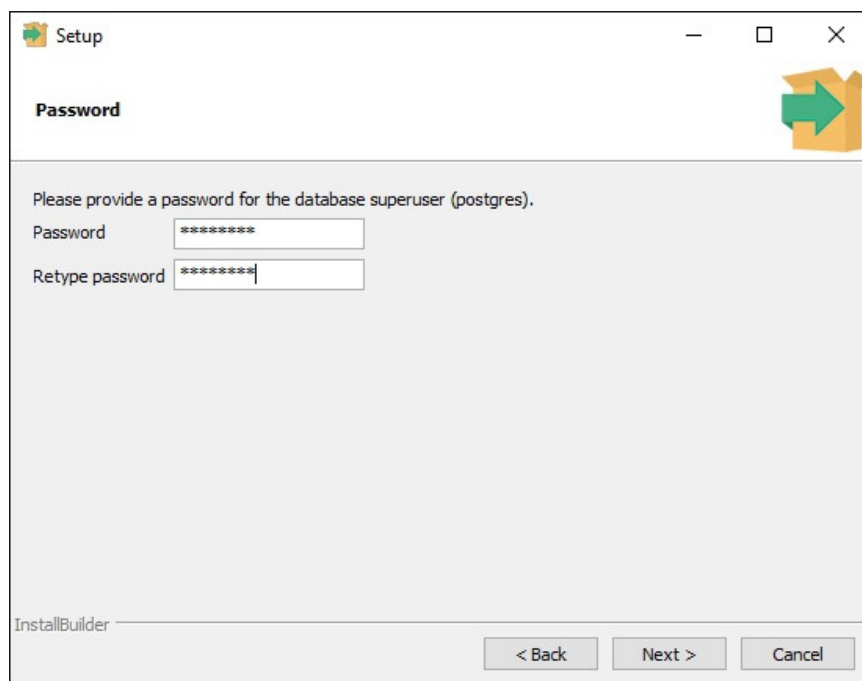


Рис. 1.4. Диалоговое окно определения пароля суперпользователя

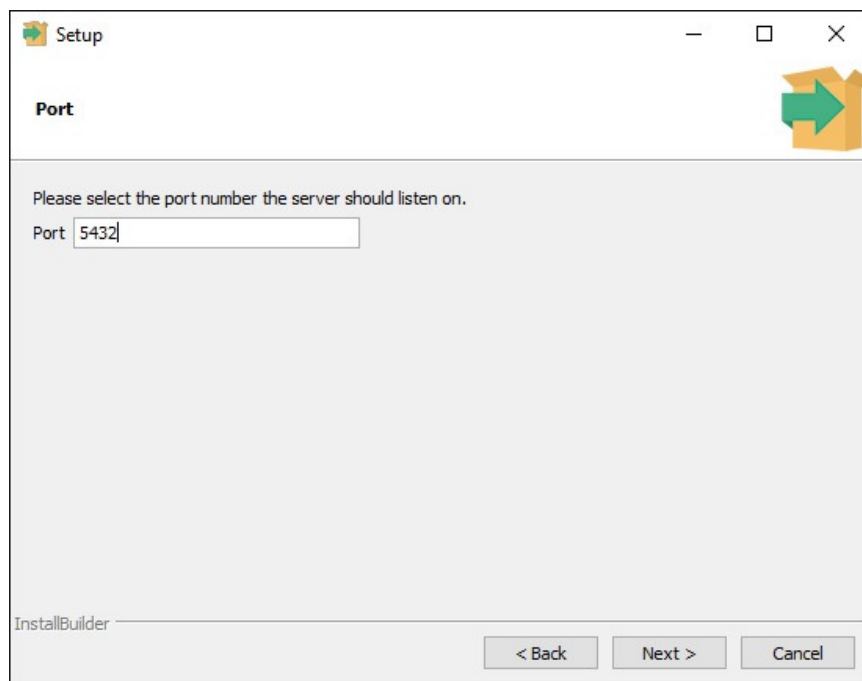


Рис. 1.5. Диалоговое окно определения номера порта

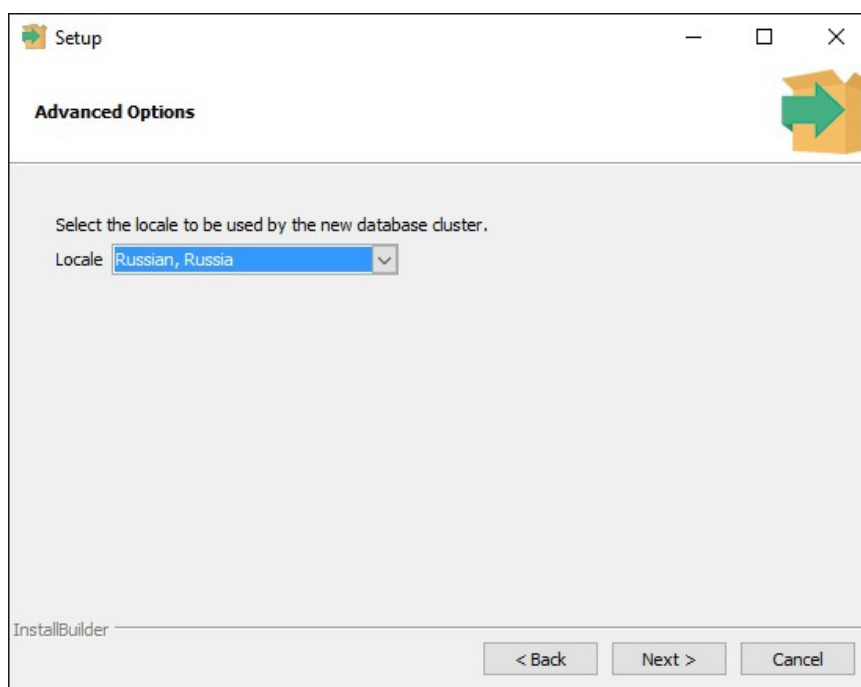


Рис. 1.6. Диалоговое окно определения локали кластера базы данных

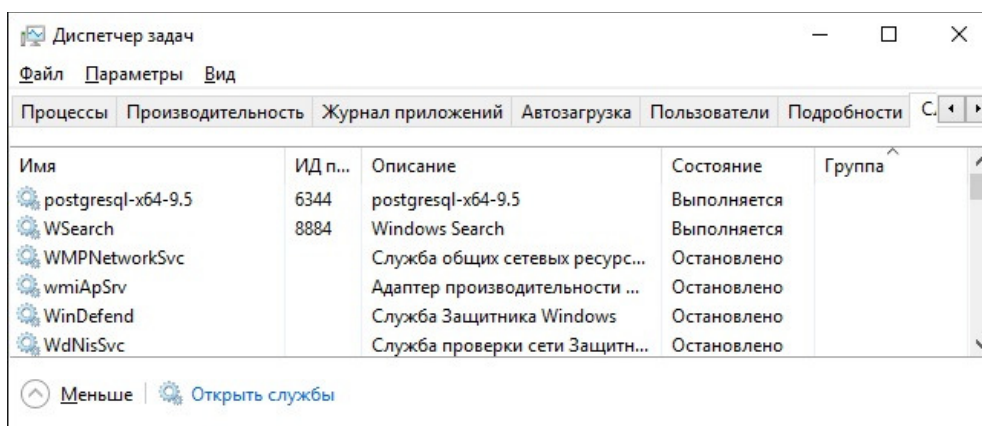


Рис. 1.7. Диалоговое окно «Диспетчера Задач»

После определения указанных параметров начинается процесс копирования файлов в определенный ранее каталог установки PostgreSQL. Необходимо обратить внимание на слова в процессе установки СУБД: «Initialising database cluster» (инициализация кластера баз данных), означающие, что копирование файлов закончено и создается кластер баз данных, содержащий базу данных, которая будет использоваться как шаблон для вновь созданных баз. Через некоторое время эта надпись сменяется на «starting database

server» (запуск сервера баз данных), что означает запуск службы сервера PostgreSQL. Если запустить «Диспетчер Задач» и перейти на вкладку «Службы», можно убедиться, что PostgreSQL работает (рис. 1.7).

1.2 Установка PostgreSQL 9.5 для Linux

В данном подразделе представлена подробная инструкция по установке PostgreSQL 9.5 в операционной системе GNU/Linux на примере дистрибутивов Ubuntu 16.04 и Fedora 24. Более подробно процесс установки и настройки СУБД PostgreSQL для дистрибутивов Ubuntu и Fedora описан в [1] и [2] соответственно. Для дистрибутивов Debian 9 и Linux Mint 18 процесс установки и настройки будет аналогичен Ubuntu.

На первом шаге устанавливаем PostgreSQL 9.5 из основного репозитория:

1. Для установки пакета требуются соответствующие права. В некоторых дистрибутивах Linux для получения прав администратора системы используется команда `sudo`, исполняющая команды пользователя с правами суперпользователя *root*. При вызове данной команды в качестве пароля указывается пароль текущего пользователя.

Если команда `sudo` недоступна либо не работает должным образом, можно воспользоваться командой `su`, которая запустит интерпретатор командной строки от имени суперпользователя *root*. При этом в строке приглашения вида `user@localhost:~$` символ `$` будет заменен на символ `#` и строка приглашения будет иметь вид `user@localhost:/home/user#`. При вызове команды `su` в качестве пароля указывается пароль суперпользователя *root*. Для выхода из оболочки в режиме суперпользователя воспользуйтесь командой `exit`.

2. Для осуществления корректной установки СУБД PostgreSQL необходимо обновить определения пакетной базы:

```
Ubuntu 16.04
$ sudo apt update
Fedora 24
# dnf update
```

3. Для установки СУБД PostgreSQL следует выполнить команду:

```
Ubuntu 16.04
$ sudo apt install postgresql
Fedora 24
# dnf install postgresql-server
```

После чего менеджер пакетов скачает и установит все необходимые пакеты в автоматическом режиме.

В дистрибутиве Fedora необходимо выполнить процедуру настройки установленного экземпляра СУБД PostgreSQL:

1. Включение автозапуска демона (службы) СУБД PostgreSQL осуществляется командой

```
# systemctl enable postgresql
```

2. Для инициализации кластера баз данных СУБД PostgreSQL используется команда

```
# postgresql-setup initdb
```

3. Запуск демона (службы) СУБД PostgreSQL производится командой

```
# systemctl start postgresql
```

В дистрибутиве Ubuntu процедура настройки экземпляра СУБД PostgreSQL осуществляется автоматически в процессе установки.

После установки экземпляра СУБД PostgreSQL файлы баз данных будут располагаться в каталогах `/var/lib/postgresql/9.5/main` и `/var/lib/pgsql/data` для дистрибутивов Ubuntu и Fedora соответственно, а конфигурационные файлы СУБД в каталогах `/etc/postgresql/9.5/main` и `/var/lib/pgsql/data`.

В самой СУБД PostgreSQL есть специальный пользователь – суперпользователь *postgres*, который имеет максимальные права внутри СУБД, т. е. может создавать, модифицировать или удалять любые базы данных и учетные записи любых пользователей.

Следующим шагом необходимо задать пароль для суперпользователя *postgres*:

```
Ubuntu 16.04
$ sudo psql -U postgres
# \password postgres
```



```
Fedora 24
# su - postgres
$ psql
# \password postgres
```

После ввода пароля выход в командную оболочку осуществляется вводом команды \q.

Далее следует изменить метод аутентификации для суперпользователя *postgres*:

```
Ubuntu 16.04
$ sudo nano /etc/postgresql/9.5/main/pg_hba.conf
Fedora 24
# nano /var/lib/pgsql/data/pg_hba.conf
```

В данном примере для редактирования файла *pg_hba.conf* используется текстовый редактор *nano*. В открывшемся файле необходимо заменить строку

```
local    all             postgres                                peer
на
local    all             postgres                                md5
```

После чего требуется перезапустить демон (службу) СУБД PostgreSQL:

```
Ubuntu 16.04
$ sudo systemctl restart postgresql
Fedora 24
# systemctl restart postgresql
```

1.3 Утилита pgAdmin III — графическое средство для администрирования СУБД PostgreSQL

Администрирование СУБД PostgreSQL может осуществляться через графическое приложение pgAdmin III. Использование подобных средств облегчает администрирование за счет наличия привычного для неподготовленного пользователя графического интерфейса.

Основное окно pgAdmin представлено на рисунке [1.8](#) и содержит несколько областей:

- Браузер объектов – древовидная структура, содержащая основные объекты сервера СУБД PostgreSQL. Браузер объектов позволяет просматривать, создавать, редактировать и удалять различные объекты: базы данных, таблицы, последовательности и т. д. Возможности этого средства достаточно широки, причем большинство операций выполняются визуально, а от пользователя не требуется знание языка SQL;
- Панель SQL – отображает представление выбранного объекта СУБД PostgreSQL в виде SQL-запроса для повышения наглядности. Например, данный SQL-запрос может быть использован для создания точной копии структуры выбранной таблицы в новой базе данных;
- Область отчетов – отображает различные виды отчетов о выбранном объекте СУБД PostgreSQL.

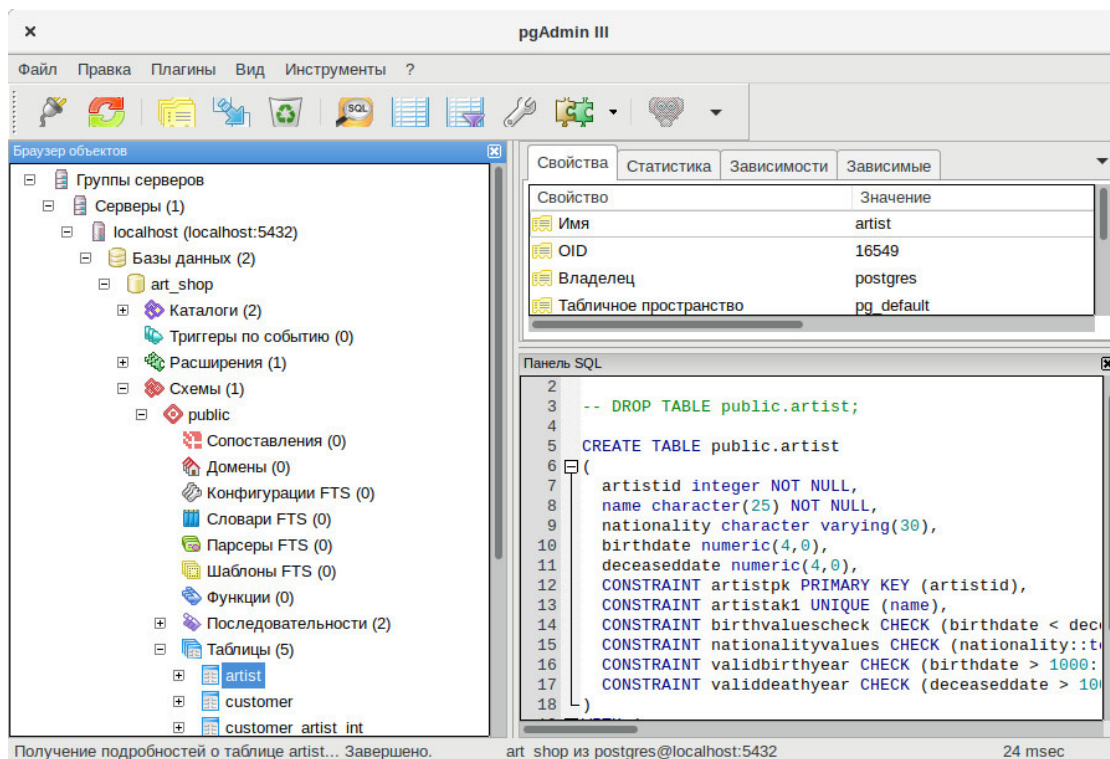


Рис. 1.8. Основное окно pgAdmin III

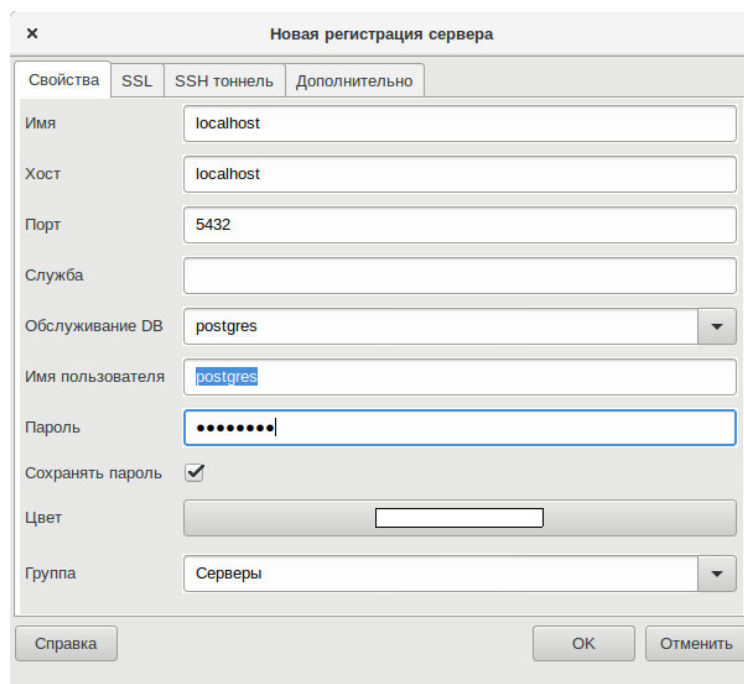


Рис. 1.9. Диалог для добавления подключения к серверу PostgreSQL

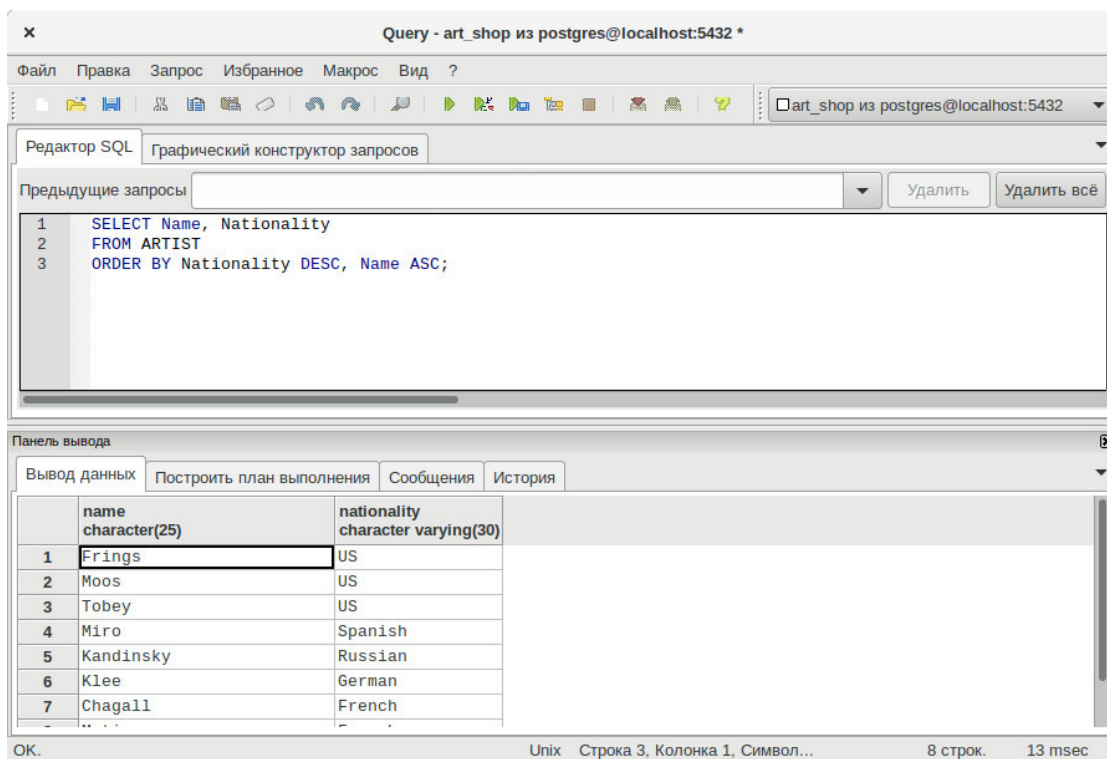


Рис. 1.10. Диалог для выполнения SQL-запросов к базе данных

Для начала работы с pgAdmin требуется создать новое подключение к серверу PostgreSQL. При выборе пункта меню *Файл* → *Добавить сервер* откроется диалог для добавления подключения к серверу (рис. 1.9).

Параметры для подключения к локальному серверу PostgreSQL, процесс установки которого описан ранее в данной главе, могут быть представлены следующими значениями:

- *Имя* – любое значение, например, localhost или myserver;
- *Хост* – localhost или 127.0.0.1;
- *Порт* – 5432;
- *Имя пользователя* – postgres;
- *Пароль* – пароль, указанный в процессе установки СУБД PostgreSQL.

На рисунке 1.10 представлен диалог для выполнения SQL-запросов к базе данных (пункт меню *Инструменты* → *Инструмент запросов*). Данное средство позволяет выполнять запросы, введенные вручную либо загруженные из файла, при этом в панели вывода отобразится результат выполнения запроса в виде отношения.

1.4 Утилита psql - интерактивный терминал для администрирования СУБД PostgreSQL

Администрирование СУБД PostgreSQL может осуществляться через интерактивный терминал psql. Использование подобных средств облегчает администрирование за счет наличия широкого набора команд, предоставляющих пользователю всю гибкость и мощь командных оболочек. При этом все преимущества использования psql будут доступны пользователю только после понимания принципов работы с командными оболочками и изучения необходимых команд.

Для запуска psql в операционной системе семейства Windows NT можно использовать ярлык, расположенный по адресу *Пуск* → *PostgreSQL 9.5* → *SQL Shell (psql)*. В открывшемся окне требуется указать соответствующие параметры:

- *Server* (адрес сервера) – localhost или 127.0.0.1;

- Database (название базы данных) – postgres;
- Port (номер порта) – 5432;
- Username (имя пользователя) – postgres;
- Password (пароль пользователя) – пароль, указанный в процессе установки СУБД PostgreSQL.

В операционной системе семейства GNU/Linux для запуска psql требуется выполнить следующую команду:

```
$ psql -h localhost -U postgres -p 5432 -d postgres
```

Данная команда содержит основные параметры для подключения к базе данных:

- -h – адрес сервера;
- -U – имя пользователя;
- -p – номер порта;
- -d – название базы данных.

Расшифровка значений параметров представлена выше.

После запуска psql будет открыта командная оболочка (рис. 1.11), в которой можно выполнять SQL-запросы, также данная оболочка имеет набор встроенных команд. Рассмотрим команды для работы с буфером запросов (query buffer commands) и списком объектов (listing commands). Более подробная информация о командах psql представлена в [3].

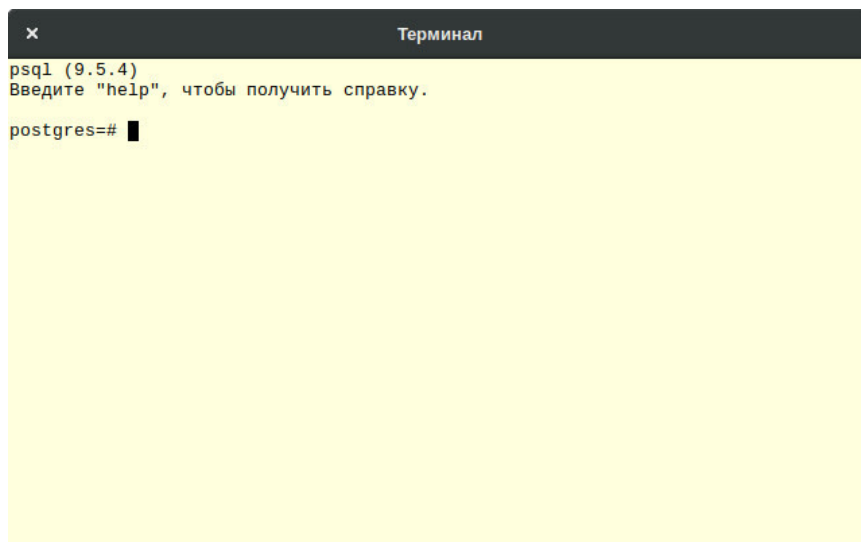


Рис. 1.11. Основное окно psql

Таблица 1.1 содержит основные команды для работы с буфером запросов.

Как видно из таблицы 1.1, команды для работы с буфером позволяют загружать запросы из внешних файлов, сохранять содержимое буфера во внешний файл, использовать внешний текстовый редактор для модификации содержимого буфера. При использовании `psql` вместе с инструментами командной оболочки появляется возможность динамической генерации сценариев (цепочки запросов) в зависимости от различных входных параметров, что позволяет автоматизировать многие рутинные операции по администрированию СУБД PostgreSQL.

Таблица 1.1

Основные команды `psql` для работы с буфером запросов

Функция	Команда	Аргумент
Вывод содержимого буфера	<code>\p</code>	
Выполнить запрос в буфере	<code>\g</code> или <code>;</code>	файл или запрос
Выйти из <code>psql</code>	<code>\q</code>	
Очистить буфер	<code>\r</code>	
Редактировать содержимое буфера во внешнем редакторе	<code>\e</code>	файл
Вывести описание внутренних команд <code>psql</code>	<code>\?</code>	
Вывести описание для SQL-операторов	<code>\h</code>	SQL-оператор
Загрузить содержимое внешнего файла в буфер	<code>\i</code>	файл
Записать содержимое буфера во внешний файл	<code>\w</code>	файл
Показать/сохранить историю запросов	<code>\s</code>	файл

Таблица 1.2 содержит основные команды для работы со списком объектов.

Как видно из таблицы 1.2, данные команды предоставляют информацию о таблицах, индексах, функциях и других объектах базы данных. Многие команды для работы со списком объектов имеют необязательный параметр *название*, который может быть задан регулярным выражением. Например, команда `\dt art` выведет список всех таблиц, имена которых начинаются с *art*, а команда `\dt .*a.*` выведет список всех таблиц, имена которых содержат символ *a*.

При использовании команды `\dd` выводится информация об описаниях, заданных для типов данных и функций. PostgreSQL име-

ет множество predefined описаний, однако пользователь, с помощью SQL-оператора COMMENT, может задавать свои собственные описания.

Многие из представленных в таблице 1.2 команд имеют возможность выводить дополнительную информацию, для этого необходимо добавить к команде символ +. Например, команда \dT выводит список типов данных, а команда \dT+, помимо этого, также содержит размер каждого типа.

Таблица 1.2

Основные команды psql для работы со списком объектов

Тип объекта	Команда	Аргумент
Таблицы, индексы, представления, последовательности	\d	название
Таблицы	\dt	название
Индексы	\di	название
Представления	\dv	название
Последовательности	\ds	название
Права доступа	\z или \dp	название
Системные таблицы	\dS	название
Большие объекты	\dl	название
Типы данных	\dT	название
Функции	\df	название
Операторы	\do	название
Агрегатные функции	\da	название
Описания объектов	\dd	название
Базы данных	\l	

1.5 Контрольные вопросы

1. Перечислите основные параметры команды утилиты psql для подключения к базе данных.
2. Перечислите основные команды утилиты psql для работы с буфером запросов.
3. Перечислите основные команды утилиты psql для работы со списком объектов.

2 ОПИСАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕРА

Перед непосредственным рассмотрением СУБД PostgreSQL 9.5 и соответствующего языка запросов SQL необходимо определиться с теми исходными данными, которые будут использоваться в примерах учебного пособия.

В качестве примера рассматривается база данных небольшой художественной галереи [4]. Перечень требований к приложению для галереи:

- Вести учет покупателей и их художественных интересов.
- Отслеживать приобретения, которые делает галерея.
- Отслеживать покупки клиентов.
- Вести список художников и произведений, когда-либо появлявшихся в галерее.
- Генерировать отчет о том, насколько быстро и с какой прибылью продаются произведения конкретного художника.
- Отображать список произведений, выставленных на продажу.

Когда галерея покупает произведение, сведения о нем, его авторе, дате и стоимости приобретения записываются в базу данных. В отдельных случаях галерея может выкупить произведение у клиента и вновь выставить его на продажу, так что одно и то же произведение может появляться в галерее неоднократно. При повторном приобретении информация о работе и ее авторе не вводится заново: записывается только дата и стоимость последнего приобретения. Когда работа продается, записываются дата совершения сделки, уплаченная сумма и сведения о покупателе.

Данные о предыдущих продажах необходимы продавцам для того, чтобы они могли уделять больше времени наиболее активным покупателям. Иногда эти записи используются для определения местонахождения ранее проданных произведений.

Для маркетинговых целей требуется, чтобы приложение базы данных выдавало список всех произведений, которые когда-либо появлялись в галерее, и их авторов. Владелец хотел бы также иметь возможность определять, насколько быстро продаются произведения каждого из художников и какова прибыль от их продажи. Наконец, приложение должно отображать список работ, имеющихся в наличии.

Модель данных такого примера приведена на рис. 2.1. В ней есть две сильные сущности – CUSTOMER (клиент) и ARTIST (художник). Кроме того, имеется сущность WORK (произведение), идентификационно-зависимая от сущности ARTIST, и сущность TRANSACTION (транзакция), идентификационно-зависимая от сущности WORK. Между сущностями CUSTOMER и WORK имеется неидентифицирующая связь принадлежности.

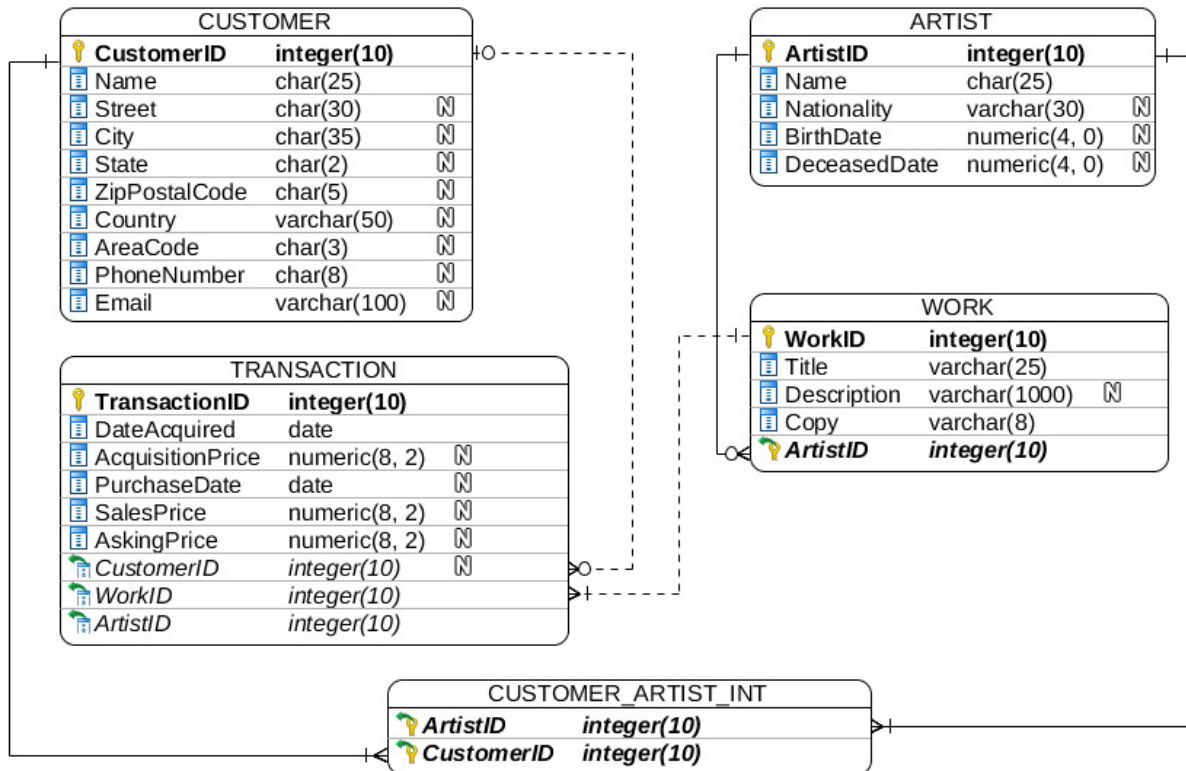


Рис. 2.1. Модель данных для практического примера

Сведения о художнике могут присутствовать в базе данных, даже если ни одна из его работ не появлялась в галерее. Это сделано для того, чтобы можно было регистрировать интерес клиентов к художникам, чьи работы галерея может приобрести в будущем. Таким образом, с художником может быть связано любое количество произведений, в том числе ноль.

Идентификатором сущности WORK является группа (Title, Copy) (название, номер копии), поскольку в случае литографий и фотогра-

фий произведение может существовать в нескольких экземплярах. Кроме того, в требованиях к приложению указано, что одно и то же произведение может неоднократно появляться в галерее, поэтому с каждым произведением потенциально может быть связано много транзакций. Каждый раз, когда произведение появляется в галерее, необходимо записывать дату и стоимость приобретения. Таким образом, каждой работе должна соответствовать по меньшей мере одна транзакция.

Клиент может приобрести множество работ; этот факт обозначен связью вида 1:N между сущностями CUSTOMER и TRANSACTION. Кроме того, между сущностями CUSTOMER и ARTIST существует связь вида N:M.

Удаление строк в таблицах CUSTOMER и ARTIST вызывает каскадное удаление в таблице CUSTOMER_ARTIST_INT. Это имеет смысл, поскольку когда сведения о клиенте или художнике удаляются из базы данных, нет нужды сохранять информацию о предпочтениях данного клиента или интересе к данному художнику. Если с клиентом связана хотя бы одна транзакция, этот клиент не может быть удален из базы данных. Аналогично, если с художником связана хотя бы одна картина, удалить его будет нельзя. Кроме того, записи о работах, по которым имели место какие-либо транзакции, удалению также не подлежат.

Данные для рассматриваемого примера приведены в табл. 2.1-2.5.

Таблица 2.1

Данные для таблицы CUSTOMER_ARTIST_INT

ArtistID	CustomerID	ArtistID	CustomerID
101	206	106	203
103	203	106	204
103	205	106	205
103	209	106	206
103	210	106	208
105	205	106	209
105	209	106	210
106	202	108	203

Данные для таблицы ARTIST

Таблица 2.2

ArtistID	Name	Nationality	BirthDate	DeceasedDate
101	Miro	Spanish	1870	1950
102	Kandinsky	Russian	1854	1900
103	Frings	US	1700	1800
104	Klee	German	1900	<NULL>
105	Moos	US	<NULL>	<NULL>
106	Tobey	US	<NULL>	<NULL>
107	Matisse	French	<NULL>	<NULL>
108	Chagall	French	<NULL>	<NULL>

Данные для таблицы WORK

Таблица 2.3

WorkID	Title	Description	Copy	ArtistID
301	Mystic Fabric	One of the only pr	99/135	106
302	Mi Vida	Very black, but ve	7/100	101
303	Slow Embers	From the artist's	HC	106
304	Mystic Fabric	Some water damage	105/135	106
305	Northwest by Night	Wonderful, moody	37/50	108

Данные для таблицы TRANSACTION

Таблица 2.4

TransactionID	DateAcquired	AcquisitionPrice	PurchaseDate	SalesPrice	AskingPrice	CustomerID	WorkID
401	2/27/1974	8750	3/18/1974	18500	20000	203	301
402	7/17/1989	28900	10/14/1989	46700	47000	202	301
403	11/17/1989	4500	11/21/2000	9750	10000	208	304
404	2/27/1999	8000	3/15/2000	17500	17500	206	302
405	4/7/2000	38700	8/17/2001	73500	75000	206	302
406	11/21/2001	6750	3/18/2002	14500	15000	208	303
407	11/21/2001	21500	<NULL>	<NULL>	<NULL>	<NULL>	304
408	7/17/2002	47000	10/2/2002	71500	72500	203	305

Таблица 2.5

Данные для таблицы CUSTOMER

Cus- tomer- ID	Name	Street	City	State	Zip- Postal- Code	Country	Area- Code	Phone- Number	Email
201	Jeffrey Janes	123 Elm St	W. Renton	WA	98123	USA	206	555- 1345	Customer1000@somewhere.com
202	David Smith	813 Tumble- weed Lane	Loveland	CO	80345	USA	303	555- 5434	Customer1001@somewhere.com
203	Tiffany Twilight	88-First Avenue	Langley	WA	98114	USA	206	555- 1000	Customer1015@somewhere.com
204	Fred Smathers	10899- 88th Ave	Bainbridge Island	WA	98108	USA	206	555- 1234	Customer1033@somewhere.com
205	Mary Beth Frederickson	25 South Lafayette	Denver	CO	80210	USA	303	555- 1000	Customer1034@somewhere.com
206	Selma Warning	205 Burnaby	Vancouver	BC	VON 1B4	Canada	253	555- 1234	Customer1036@somewhere.com
207	Susan Wu	105 Locust Ave	Atlanta	GA	23224	USA	721	555- 1234	Customer1037@somewhere.com
208	Donald G. Gray	55 Bodega Ave	Bodega Bay	CA	92114	USA	705	555- 1234	Customer1040@somewhere.com
209	Lynda Johnson	117 Street	C WashingtonDC		11345	USA	703	555- 1000	<NULL>
210	Chris Wikens	87 Highland Drive	Olimpia	WA	98008	USA	206	555- 1234	<NULL>

2.1 Наполнение тестовой базы данных

В текущем подразделе описан процесс создания и наполнения данными базы данных галереи.

2.1.1 Создание базы данных

Для создания новой базы данных используется оператор CREATE DATABASE. Запрос для создания базы данных галереи будет иметь следующий вид:

```
CREATE DATABASE GALLERY;
```

Для подключения к вновь созданной базе данных GALLERY в оболочке psql требуется выполнить следующую команду:

```
\connect GALLERY
```

2.1.2 Создание таблиц

Листинг 2.1 содержит запрос для создания необходимых отношений (таблиц). Более подробно процесс создания отношений описан в пункте 3.1.1.

Листинг 2.1.

```
CREATE TABLE CUSTOMER(  
    CustomerID    int          NOT NULL,  
    Name          char(25)     NOT NULL,  
    Street        char(30)     NULL,  
    City          char(35)     NULL,  
    State         char(2)      NULL,  
    ZipPostalCode char(5)      NULL,  
    Country       varchar(50)  NULL,  
    AreaCode      char(3)      NULL,  
    PhoneNumber   char(8)      NULL,  
    Email         varchar(100) NULL,  
    CONSTRAINT CustomerPK  
        PRIMARY KEY (CustomerID));  
  
CREATE TABLE ARTIST(  
    ArtistID    int          NOT NULL,  
    Name        char(25)     NOT NULL,  
    Nationality varchar(30)   NULL,  
    BirthDate   numeric(4,0)  NULL,  
    DeceasedDate numeric(4,0)  NULL,
```

```
CONSTRAINT ArtistPK PRIMARY KEY (ArtistID),
CONSTRAINT ArtistAK1 UNIQUE (Name),
CONSTRAINT NationalityValues CHECK (Nationality IN
('Canadian', 'English', 'French', 'German',
'Mexican', 'Russian', 'Spanish', 'US')),
CONSTRAINT BirthValuesCheck CHECK
(BirthDate < DeceasedDate),
CONSTRAINT ValidBirthYear CHECK ((BirthDate > 1000) AND
(BirthDate < 2100)),
CONSTRAINT ValidDeathYear CHECK ((DeceasedDate > 1000) AND
(DeceasedDate < 2100));

CREATE TABLE CUSTOMER_ARTIST_INT(
ArtistID int NOT NULL,
CustomerID int NOT NULL,
CONSTRAINT CustomerArtistPK
PRIMARY KEY (ArtistID, CustomerID),
CONSTRAINT Customer_Artist_Int_ArtistFK
FOREIGN KEY (ArtistID)
REFERENCES ARTIST (ArtistID)
ON DELETE CASCADE,
CONSTRAINT Customer_Artist_Int_CustomerFK
FOREIGN KEY (CustomerID)
REFERENCES CUSTOMER (CustomerID)
ON DELETE CASCADE);

CREATE TABLE WORK(
WorkID int NOT NULL,
Title varchar(25) NOT NULL,
Description varchar(1000) NULL,
Copy varchar(8) NOT NULL,
ArtistID int NOT NULL,
CONSTRAINT WorkPK
PRIMARY KEY (WorkID),
CONSTRAINT WorkAK1
UNIQUE (Title, Copy),
CONSTRAINT ArtistFK
FOREIGN KEY (ArtistID)
REFERENCES ARTIST (ArtistID));

CREATE TABLE TRANSACTION(
TransactionID int NOT NULL,
DateAcquired date NOT NULL,
AcquisitionPrice numeric(8,2) NULL,
```

```

PurchaseDate      date          NULL,
SalesPrice        numeric(8,2)  NULL,
AskingPrice       numeric(8,2)  NULL,
CustomerID        int          NULL,
WorkID            int          NOT NULL,
CONSTRAINT TransactionPK
PRIMARY KEY (TransactionID),
CONSTRAINT SalesPriceRange
CHECK ((SalesPrice > 1000) AND
(SalesPrice <= 200000)),
CONSTRAINT ValidTransDate
CHECK (DateAcquired <= PurchaseDate),
CONSTRAINT TransactionWorkFK
FOREIGN KEY (WorkID)
REFERENCES WORK (WorkID),
CONSTRAINT TransactionCustomerFK
FOREIGN KEY (CustomerID)
REFERENCES CUSTOMER (CustomerID));

```

После выполнения данного запроса можно получить список созданных таблиц с помощью команды \dt. Результат работы команды имеет вид:

Schema	Name	Type	Owner
public	artist	table	postgres
public	customer	table	postgres
public	customer_artist_int	table	postgres
public	transaction	table	postgres
public	work	table	postgres

2.1.3 Создание последовательностей

Последовательность (sequence) – это объект, который генерирует ряд последовательных уникальных чисел, которые чаще всего используются для формирования первичных ключей. Более подробно первичные ключи рассмотрены в пункте [3.1.2](#).

Запрос для создания последовательности с именем MYSEQ выглядит следующим образом:

```

CREATE SEQUENCE IF NOT EXISTS MYSEQ
INCREMENT BY 1 START WITH 1;

```

Предложение `IF NOT EXISTS` позволяет выполнять данный запрос несколько раз без возникновения ошибки, связанной с наличием в СУБД последовательности с аналогичным именем. Параметры `INCREMENT BY` и `START WITH` определяют величину, на которую будет произведен инкремент текущего значения последовательности, и величину, определяющую начальное значение последовательности соответственно.

Для генерации следующего значения последовательности используется внутренняя функция `nextval`, например, запрос `SELECT nextval('MYSEQ');`

вернет следующее значение последовательности `MYSEQ`.

Текущее значение последовательности можно получить с помощью функции `currval`. Например, результатом запроса `SELECT currval('MYSEQ');`

будет текущее значение последовательности `MYSEQ`.

Изменить текущее значение последовательности позволит внутренняя функция `setval`. После выполнения запроса `SELECT setval('MYSEQ', 3);`

текущее значение последовательности `MYSEQ` будет равно трем.

Листинг 2.2 содержит запрос для создания необходимых последовательностей.

Листинг 2.2.

```
CREATE SEQUENCE SEQ_ARTIST
  INCREMENT BY 1
  START WITH 101
  MINVALUE 100;

CREATE SEQUENCE SEQ_CUSTOMER
  INCREMENT BY 1
  START WITH 201
  MINVALUE 200;

CREATE SEQUENCE SEQ_WORK
  INCREMENT BY 1
  START WITH 301
  MINVALUE 300;
```



```
CREATE SEQUENCE SEQ_TRANSACTION
  INCREMENT BY 1
  START WITH 401
  MINVALUE 400;
```

После выполнения данного запроса можно получить список созданных последовательностей с помощью команды \ds. Результат представлен в таблице:

Schema	Name	Type	Owner
public	seq_artist	sequence	postgres
public	seq_customer	sequence	postgres
public	seq_transaction	sequence	postgres
public	seq_work	sequence	postgres

2.1.4 Ввод данных

Теперь можно начать заполнять таблицы данными. В листинге 2.3 показан созданный во внешнем редакторе файл, состоящий из последовательности операторов INSERT.

Листинг 2.3.

```
INSERT INTO ARTIST VALUES
  (nextval('seq_artist'), 'Miro', 'Spanish', 1870, 1950);
INSERT INTO ARTIST VALUES
  (nextval('seq_artist'), 'Kandinsky', 'Russian', 1854, 1900);
INSERT INTO ARTIST VALUES
  (nextval('seq_artist'), 'Frings', 'US', 1700, 1800);
INSERT INTO ARTIST VALUES
  (nextval('seq_artist'), 'Klee', 'German', 1900, NULL);
INSERT INTO ARTIST VALUES
  (nextval('seq_artist'), 'Moos', 'US', NULL, NULL);
INSERT INTO ARTIST VALUES
  (nextval('seq_artist'), 'Tobey', 'US', NULL, NULL);
INSERT INTO ARTIST VALUES
  (nextval('seq_artist'), 'Matisse', 'French', NULL, NULL);
INSERT INTO ARTIST VALUES
  (nextval('seq_artist'), 'Chagall', 'French', NULL, NULL);

INSERT INTO CUSTOMER VALUES
  (nextval('seq_customer'), 'Jeffrey Janes',
  '123 W. Elm St', 'Renton', 'WA', '98123', 'USA',
```

```
'206', '555-1345', 'Customer1000@somewhere.com');
INSERT INTO CUSTOMER VALUES
    (nextval('seq_customer'), 'David Smith',
     '813 Tumbleweed Lane', 'Loveland', 'CO', '80345', 'USA',
     '303', '555-5434', 'Customer1001@somewhere.com');
INSERT INTO CUSTOMER VALUES
    (nextval('seq_customer'), 'Tiffany Twilight',
     '88 - First Avenue', 'Langley', 'WA', '98114', 'USA',
     '206', '555-1000', 'Customer1015@somewhere.com');
INSERT INTO CUSTOMER VALUES
    (nextval('seq_customer'), 'Fred Smathers',
     '10899-88th Ave', 'Bainbridge Island', 'WA', '98108', 'USA',
     '206', '555-1234', 'Customer1033@somewhere.com');
INSERT INTO CUSTOMER VALUES
    (nextval('seq_customer'), 'Mary Beth Frederickson',
     '25 South Lafayette', 'Denver', 'CO', '80210', 'USA',
     '303', '555-1000', 'Customer1034@somewhere.com');
INSERT INTO CUSTOMER VALUES
    (nextval('seq_customer'), 'Selma Warning',
     '205 Burnaby', 'Vancouver', 'BC', 'V0N1B', 'Canada',
     '253', '555-1234', 'Customer1036@somewhere.com');
INSERT INTO CUSTOMER VALUES
    (nextval('seq_customer'), 'Susan Wu',
     '105 Locust Ave', 'Atlanta', 'GA', '23224', 'USA',
     '721', '555-1234', 'Customer1037@somewhere.com');
INSERT INTO CUSTOMER VALUES
    (nextval('seq_customer'), 'Donald G. Gray',
     '55 Bodega Ave', 'Bodega Bay', 'CA', '92114', 'USA',
     '705', '555-1345', 'Customer1040@somewhere.com');
INSERT INTO CUSTOMER VALUES
    (nextval('seq_customer'), 'Lynda Johnson',
     '117 C Street', 'Washington', 'DC', '11345', 'USA',
     '703', '555-1000', '');
INSERT INTO CUSTOMER VALUES
    (nextval('seq_customer'), 'Chris Wilkens',
     '87 Highland Drive', 'Olympia', 'WA', '98008', 'USA', '206',
     '555-1234', '');

INSERT INTO WORK VALUES
    (nextval('seq_work'), 'Mystic Fabric', 'One of the only pr',
     '99/135', 106);
INSERT INTO WORK VALUES
    (nextval('seq_work'), 'Mi Vida', 'Very black, but ve',
```

```
'7/100', 101);
INSERT INTO WORK VALUES
  (nextval('seq_work'), 'Slow Embers', 'From the artist''s',
   'HC', 106);
INSERT INTO WORK VALUES
  (nextval('seq_work'), 'Mystic Fabric', 'Some water damage',
   '105/135', 106);
INSERT INTO WORK VALUES
  (nextval('seq_work'), 'Northwest by Night', 'Wonderful,
moody',
   '37/50', 108);

INSERT INTO TRANSACTION VALUES
  (nextval('seq_transaction'), '1974-2-27', 8750,
   '1974-3-18', 18500, 20000, 203, 301);
INSERT INTO TRANSACTION VALUES
  (nextval('seq_transaction'), '1989-7-17', 28900,
   '1989-10-14', 46700, 47000, 202, 301);
INSERT INTO TRANSACTION VALUES
  (nextval('seq_transaction'), '1989-11-17', 4500,
   '2000-11-21', 9750, 10000, 208, 304);
INSERT INTO TRANSACTION VALUES
  (nextval('seq_transaction'), '1999-2-27', 8000,
   '2000-3-15', 17500, 17500, 206, 302);
INSERT INTO TRANSACTION VALUES
  (nextval('seq_transaction'), '2000-4-7', 38700,
   '2001-8-17', 73500, 75000, 206, 302);
INSERT INTO TRANSACTION VALUES
  (nextval('seq_transaction'), '2001-11-21', 6750,
   '2002-3-18', 14500, 15000, 208, 303);
INSERT INTO TRANSACTION VALUES
  (nextval('seq_transaction'), '2001-11-21', 21500,
   NULL, NULL, NULL, NULL, 304);
INSERT INTO TRANSACTION VALUES
  (nextval('seq_transaction'), '2002-7-17', 47000,
   '2002-10-2', 71500, 72500, 203, 305);

INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES
  (101, 206);
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES
  (103, 203);
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES
```

```
(103, 205);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (103, 209);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (103, 210);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (105, 205);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (105, 209);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (106, 202);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (106, 203);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (106, 204);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (106, 205);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (106, 206);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (106, 208);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (106, 209);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (106, 210);  
INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT VALUES  
  (108, 203);
```

После выполнения данного запроса созданные ранее таблицы будут наполнены данными.

2.1.5 Создание индексов

Индексы создаются для обеспечения уникальности столбцов, упрощения сортировки и быстрого поиска данных по значениям столбцов. Столбцы, которые часто фигурируют в условиях равенства в предложениях WHERE (см. пункт [3.2.2](#)), являются хорошими кандидатами на создание индекса.

Для первичного ключа PostgreSQL создает индекс автоматически. При этом в качестве ключа индекса выступает значение первичного ключа, а в качестве значения – указатель на строку. При использовании оператора UNIQUE, позволяющего контролиро-

вать уникальность значений в столбце таблицы, индекс для данного столбца также создается автоматически.

В PostgreSQL возможно создание двух типов индексов:

- хэш-индекс – структура, содержащая пары (*ключ, значение*), при этом все значения должны быть уникальны;
- В-дерево – древовидная структура, в которой длина любых двух путей от корня до листьев совпадает, а каждый узел дерева ссылается на большое число узлов-потомков. В-дерево позволяет увеличить скорость выполнения запросов (например, запрос по диапазону дат) за счет уменьшения количества узлов, просматриваемых при каждой операции.

Для создания хэш-индекса по полю Name таблицы ARTIST используется следующий запрос:

```
CREATE INDEX ARTIST_NAME
ON ARTIST USING hash (Name);
```

Построить В-дерево по столбцу DateAcquired таблицы TRANSACTION можно с помощью запроса:

```
CREATE INDEX TRANSACTION_DATEACQUIRED
ON TRANSACTION USING btree (DateAcquired);
```

Список созданных индексов можно получить с помощью команды \di. Результат представлен в таблице:

Schema	Name	Type	Owner	Table
public	artist_name	index	postgres	artist
public	artistak1	index	postgres	artist
public	artistpk	index	postgres	artist
public	customerartistpk	index	postgres	customer_artist_int
public	customerpk	index	postgres	customer
public	transaction_dateacquired	index	postgres	transaction
public	transactionpk	index	postgres	transaction
public	workak1	index	postgres	work
public	workpk	index	postgres	work

2.2 Контрольные вопросы

1. Для чего нужны последовательности?
2. Для чего нужны индексы?

3 ВВЕДЕНИЕ В ЯЗЫК SQL

Язык SQL был разработан фирмой IBM в конце 1970-х годов и был принят Американским национальным институтом стандартов (ANSI) в качестве национального стандарта США в 1992 году [4].

Язык SQL ориентирован на текст. Он был разработан задолго до появления графических интерфейсов пользователя, так что для работы с ним требуется лишь текстовый редактор. Разумеется, в таких СУБД, как PostgreSQL, имеются графические средства для выполнения многих из тех задач, которые ранее могли быть выполнены только с помощью SQL. Но не все из того, что позволяет делать SQL, можно осуществить с помощью графических средств; более того, в ряде случаев, например, для динамической генерации операторов SQL в программном коде, SQL использовать необходимо.

С помощью SQL можно определять структуры базы данных, а также запрашивать и обновлять информацию в базе данных. Совокупность команд, служащих для определения данных, называют иногда *языком определения данных (data definition language, DDL)*, а совокупность команд для обновления и запроса данных – *языком манипулирования данными (data manipulation language, DML)*. Далее в учебном пособии будут рассмотрены оба эти подмножества языка SQL на примере, приведенном в главе 2.

3.1 Средства определения данных языка SQL

3.1.1 Оператор CREATE TABLE

Основная функция этого оператора – создание новой таблицы и описание ее столбцов и типов данных. Кроме того, этот оператор позволяет определять первичные ключи, альтернативные ключи и внешние ключи с некоторыми ограничениями ссылочной целостности, а также задавать ограничения на столбцы и таблицы (листинг 3.1).

Листинг 3.1.

```
CREATE TABLE CUSTOMER(  
    CustomerID      int          PRIMARY KEY,  
    Name            char(25)     NOT NULL,  
    Street          char(30)     NULL,
```

City	char(35)	NULL,
State	char(2)	NULL,
ZipPostalCode	char(5)	NULL,
Country	varchar(50)	NULL,
AreaCode	char(3)	NULL,
PhoneNumber	char(8)	NULL,
Email	varchar(100)	NULL);

В SQL имеется пять типов ограничений: NULL, NOT NULL, UNIQUE, PRIMARY KEY и FOREIGN KEY. В листинге 3.1 столбец CustomerID принадлежит к типу данных integer (целочисленный) и имеет свойство PRIMARY KEY. Следующий столбец, Name, имеет тип данных char (строковый) с максимальной длиной 25 символов. Ключевые слова NOT NULL означают, что этот столбец обязан иметь значение.

В SQL первичные ключи ни при каких условиях не могут иметь пустых значений. Именно поэтому для столбца CustomerID можно просто указать свойство PRIMARY KEY, не уточняя, что он не должен быть пустым (NOT NULL). Ключевые слова PRIMARY KEY сами по себе уже говорят, что столбец CustomerID не будет иметь пустых значений. Для уникальных столбцов, однако, пустые значения возможны.

Седьмой столбец, Country, принадлежит к типу данных varchar(50) и имеет свойство NULL. varchar обозначает строку переменной длины. Таким образом, в разных строках значения столбца Country могут различаться по длине, и максимально возможная длина строки равна 50 символам. Ключевое слово NULL указывает на то, что пустые значения допустимы.

Значения типа char имеют фиксированную длину. Если столбец Name определен как char(25), это означает, что каждое значение столбца Name будет храниться в виде строки длиной 25 символов, независимо от того, какова реальная длина имени клиента. При необходимости имена будут дополняться пробелами до 25 символов. Значения типа varchar могут иметь разную длину. Если название страны состоит всего из четырех символов, то только эти четыре символа и будут храниться в столбце Country.

В табл. 3.1 перечислены некоторые из типов данных, поддерживаемых в СУБД PostgreSQL.

Таблица 3.1

Типы данных SQL в СУБД PostgreSQL

Тип данных	Описание
<code>smallint</code>	Целое число в диапазоне от -32768 до +32767
<code>integer, int</code>	Целое число в диапазоне от -2147483648 до +2147483647
<code>numeric(n, d)</code>	Число длиной n с d знаками после запятой
<code>char(n)</code>	Текстовое поле фиксированной длины n
<code>varchar(n)</code>	Текстовое поле переменной длины до n символов
<code>timestamp</code>	Поле, содержащее дату и время
<code>date</code>	Поле, содержащее только дату
<code>time</code>	Поле, содержащее только время
<code>bytea</code>	Двоичная строка переменной длины

3.1.2 Оператор ALTER TABLE

После того как таблица определена, ее структуру, свойства и ограничения можно изменить, используя оператор `ALTER TABLE`. Необходима некоторая осторожность при работе с этим оператором, поскольку при его использовании возможна потеря данных.

Добавление столбца осуществляется запросом:

```
ALTER TABLE MyTable ADD MyColumn int;
```

Рассмотренный запрос добавляет столбец с именем `MyColumn` с типом `integer`. Обратите внимание, что при создании столбца ключевое слово `COLUMN` опускается. Чтобы убедиться в том, что желаемые изменения действительно были произведены, посмотрите структуру таблицы с помощью команды `\d MyTable`.

Также в любой момент можно добавить пустой, или необязательный (`NULL`), столбец. Чтобы добавить обязательный (`NOT NULL`) столбец, сначала нужно создать его в таблице как необязательный, заполнить все его строки данными, а затем объявить его обязательным при помощи конструкции `ALTER COLUMN`. Предположим, например, что добавляется столбец `MyColumn` в таблицу `MyTable`. После того как этот столбец будет заполнен в каждой строчке таблицы `MyTable`, можно выполнить следующий запрос:

```
ALTER TABLE MyTable ALTER COLUMN MyColumn SET NOT NULL;
```

Теперь столбец `MyColumn` будет обязательно требовать присвоения значения.

При модификации столбца можно увеличивать количество символов в текстовых столбцах и количество цифр в числовых столбцах. Также можно свободно увеличивать или уменьшать количество цифр после десятичной точки. Если данный столбец является пустым во всех строках, можно уменьшать длину текстовых и числовых данных, а также менять тип данных столбца.

В листинге 3.2 представлен альтернативный способ определения первичного ключа, при котором сначала определяется таблица, а потом ее определение модифицируется оператором ALTER TABLE. Оператор CREATE TABLE определяет все столбцы таблицы CUSTOMER, но ни один из них не указывается в качестве первичного ключа. Затем при помощи оператора ALTER TABLE вводится новое ограничение под названием CustomerPK, которое определяет столбец CustomerID как первичный ключ.

Листинг 3.2.

```
CREATE TABLE CUSTOMER(
    CustomerID      int          NOT NULL,
    Name            char(25)      NOT NULL,
    Street           char(30)      NULL,
    City             char(35)      NULL,
    State            char(2)       NULL,
    ZipPostalCode    char(5)       NULL,
    Country           varchar(50)  NULL,
    AreaCode         char(3)       NULL,
    PhoneNumber      char(8)       NULL,
    Email            varchar(100)  NULL);

ALTER TABLE CUSTOMER
    ADD CONSTRAINT CustomerPK PRIMARY KEY (CustomerID);

CREATE TABLE ARTIST(
    ArtistID        int          NOT NULL,
    Name            char(25)      NOT NULL,
    Nationality      varchar(30)   NULL,
    BirthDate        numeric(4,0)  NULL,
    DeceasedDate     numeric(4,0)  NULL,
    CONSTRAINT ArtistPK PRIMARY KEY (ArtistID));
```

Имя для ограничения может выбираться произвольно. Однако есть смысл придерживаться некоторым стандартным соглашениям

об именовании. В этом пособии, например, имена первичных ключей образуются путем присоединения аббревиатуры *PK* (Primary Key – первичный ключ) к названию таблицы.

Оба способа определения первичных ключей для таблиц *CUSTOMER* (листинг 3.1 и листинг 3.2) являются правильными. Различие состоит в том, что во втором листинге разработчик указал явно имя ограничения первичного ключа. Ограничению первичного ключа таблицы *CUSTOMER* (листинг 3.1) также будет дано имя, но сгенерирует его уже СУБД, что очень часто затрудняет задачи администрирования данных. Поэтому второй метод более предпочтителен.

Определение таблицы *ARTIST* в листинге 3.3 демонстрирует еще один способ определения первичного ключа. Здесь ограничение определяется в теле оператора *CREATE TABLE*, после того как определены все столбцы. Используя этот подход, разработчик может присваивать имена ограничениям в момент создания таблиц, не прибегая к использованию оператора *ALTER TABLE*.

Композитный ключ определяется путем перечисления имен атрибутов в скобках. Первичный ключ таблицы *CUSTOMER_ARTIST_INT* (листинг 3.3) представляет собой сочетание {ArtistID, CustomerID}. Композитный первичный ключ не может быть определен с помощью того метода, который представлен в листинге 3.1.

Листинг 3.3.

```
CREATE TABLE CUSTOMER_ARTIST_INT(  
    ArtistID          int          NOT NULL,  
    CustomerID        int          NOT NULL,  
    CONSTRAINT CustomerArtistPK  
        PRIMARY KEY (ArtistID, CustomerID),  
    CONSTRAINT Customer_Artist_Int_ArtistFK  
        FOREIGN KEY (ArtistID)  
        REFERENCES ARTIST (ArtistID)  
        ON DELETE CASCADE,  
    CONSTRAINT Customer_Artist_Int_CustomerFK  
        FOREIGN KEY (CustomerID)  
        REFERENCES CUSTOMER (CustomerID)  
        ON DELETE CASCADE);
```

Посредством оператора ALTER TABLE можно также определять внешние ключи (листинг 3.3). Ограничение Customer_Artist_Int_ArtistFK указывает, что столбец ArtistID является внешним ключом, который указывает на столбец ArtistID таблицы ARTIST. Аббревиатура FK означает внешний ключ (Foreign Key). В определении внешнего ключа можно указать процедуру обеспечения ссылочной целостности при удалении: ON DELETE CASCADE.

3.1.3 Операторы DROP TABLE и DROP

Одним из самых полезных операторов определения данных SQL является оператор DROP TABLE. Но он одновременно является и одним из самых опасных, поскольку удаляет таблицу из базы данных *вместе со всеми содержащимися в ней данными*. Если необходимо удалить из базы данных таблицу ARTIST и все содержащиеся в ней данные, то можно использовать следующий вариант запроса:

```
DROP TABLE ARTIST;
```

Оператор DROP TABLE не выполняется, если таблица содержит или может содержать значения, необходимые для соблюдения ограничений ссылочной целостности. Например, столбец ArtistID таблицы ARTIST может содержать значения, необходимые для соблюдения ограничения внешнего ключа Customer_Artist_Int_ArtistFK. Попытка передать СУБД на выполнение запрос DROP TABLE ARTIST; окончится неудачей и система выдаст сообщение об ошибке.

Если необходимо удалить таблицу ARTIST, нужно сначала удалить либо ограничение внешнего ключа Customer_Artist_Int_ArtistFK, либо всю таблицу CUSTOMER_ARTIST_INT. Удалить ограничение можно при помощи следующего запроса:

```
ALTER TABLE CUSTOMER_ARTIST_INT  
DROP CONSTRAINT Customer_Artist_Int_ArtistFK;
```

С помощью оператора DROP можно удалить столбец из таблицы, как показано ниже:

```
ALTER TABLE MyTable DROP COLUMN MyColumn;
```

Столбец можно удалить в любой момент. При этом, однако, все данные из этого столбца будут потеряны.

3.2 Средства запроса данных языка SQL

Создав таблицу, можно записывать в нее данные, изменять их значения и удалять данные из таблицы. Предполагается, что данные, приведенные в табл. 2.1 и 2.5 уже введены в базу данных. Запросы, которые позволяют добавлять, модифицировать и удалять строки в таблицах, будут рассмотрены далее в этом разделе.

3.2.1 Чтение заданных столбцов из одиночной таблицы

Следующий запрос произведет выборку (чтение) трех из пяти столбцов таблицы ARTIST:

```
SELECT Name, Nationality, BirthDate
FROM ARTIST;
```

Имена запрашиваемых столбцов перечисляются после ключевого слова SELECT, а имя отношения (таблицы), из которого считываются данные, указывается после ключевого слова FROM. Результат запроса при использовании данных из таблицы ARTIST (см. табл. 2.2) будет иметь следующий вид:

Name	Nationality	BirthDate
Miro	Spanish	1870
Kandinsky	Russian	1854
Frings	US	1700
Klee	German	1900
Mloos	US	<NULL>
Tobey	US	<NULL>
Matisse	French	<NULL>
Chagall	French	<NULL>

Результатом работы оператора SELECT всегда является отношение. Этот оператор берет одно или несколько отношений, манипулирует ими определенным образом и выдает на выходе одно отношение. Даже если результатом является всего лишь одно число,

это число рассматривается как отношение, имеющее одну строку и один столбец.

Порядок столбцов в результирующей таблице определяется порядком следования их имен после ключевого слова `SELECT`. Предположим, что порядок имен столбцов в запросе будет следующим:

```
SELECT Nationality, Name, BirthDate
FROM ARTIST;
```

Результат работы запроса будет следующим:

Nationality	Name	BirthDate
Spanish	Miro	1870
Russian	Kandinsky	1854
US	Frings	1700
German	Klee	1900
US	Mloos	<NULL>
US	Tobey	<NULL>
French	Matisse	<NULL>
French	Chagall	<NULL>

Следующий запрос извлекает из таблицы `ARTIST` только столбец `Nationality`:

```
SELECT Nationality
FROM ARTIST;
```

Результатом будет таблица:

Nationality
Spanish
Russian
US
German
US
US
French
French

Следует обратить внимание, что в последней таблице есть одинаковые строки. Согласно определению отношения, повторения строк в отношении недопустимо. Однако процесс поиска и

удаления таких повторений отнимает много времени. Таким образом, на практике все же приходится сталкиваться с одинаковыми строками.

Если нужно, чтобы СУБД нашла и удалила повторяющиеся строки, при запросе необходимо использовать ключевое слово **DISTINCT**:

```
SELECT DISTINCT Nationality
FROM ARTIST;
```

Результат будет иметь вид:

Nationality

Spanish
Russian
US
German
French

3.2.2 Чтение заданных строк из одиночной таблицы

Ранее рассмотренные SQL-запросы выбирали определенные столбцы всех строк таблицы. Теперь рассмотрим запросы, позволяющие выбирать столбцы определенных строк. Следующий запрос получает все столбцы из тех строк таблицы **ARTIST**, которые содержат сведения о художниках французской национальности:

```
SELECT ArtistID, Name, Nationality, BirthDate, DeceasedDate
FROM ARTIST
WHERE Nationality = 'French';
```

Результат имеет следующий вид:

ArtistID	Name	Nationality	BirthDate	DeceasedDate
107	Matisse	French	<NULL>	<NULL>
108	Chaggall	French	<NULL>	<NULL>

Второй способ запросить все столбцы таблицы – использовать специальный символ **'*'** после ключевого слова **SELECT**. Приведенный ниже запрос эквивалентен предыдущему:

```
SELECT *
```

```
FROM ARTIST
WHERE Nationality = 'French';
```

Шаблон SELECT/FROM/WHERE – это фундаментальный шаблон построения SQL-запросов для выборки данных. В предложении WHERE могут содержаться различного рода условия. Например, следующий запрос извлекает все столбцы из тех строк таблицы ARTIST, где значение столбца BirthDate меньше 1880:

```
SELECT ArtistID, Name, Nationality, BirthDate, DeceasedDate
FROM ARTIST
WHERE BirthDate < 1880;
```

Результат следующий:

ArtistID	Name	Nationality	BirthDate	DeceasedDate
101	Miro	Spanish	1870	1950
102	Kandinsky	Russian	1854	1900
103	Frings	US	1700	1800

Следует обратить внимание на то, что когда столбец имеет тип данных char или varchar, сравниваемые значения должны помещаться в одиночные кавычки. Если столбец имеет тип данных integer или numeric, кавычки необязательны.

В предложении WHERE можно указать более одного условия, если использовать ключевое слово AND:

```
SELECT *
FROM ARTIST
WHERE Nationality = 'US' AND BirthDate < 1800;
```

Результат будет следующий:

ArtistID	Name	Nationality	BirthDate	DeceasedDate
103	Frings	US	1700	1800

3.2.3 Чтение заданных строк и столбцов из одиночной таблицы

Объединив описанные выше методы, можно выбирать из таблицы определенные столбцы и определенные строки. Следующий запрос извлекает из таблицы ARTIST столбцы Name и Nationality художников французской национальности:

```
SELECT Name, Nationality
FROM ARTIST
WHERE Nationality = 'French';
```

Этот запрос выдаст следующую таблицу:

Name	Nationality
Matisse	French
Chagall	French

Еще одна форма предложения WHERE предполагает задания списка значений, которые может иметь столбец. Это делается с помощью ключевого слова IN:

```
SELECT Name, Nationality
FROM ARTIST
WHERE Nationality IN ('Russian', 'German');
```

Результат будет следующим:

Name	Nationality
Kandinsky	Russian
Klee	German

Строка исходного отношения войдет в результирующую таблицу, если ее столбец Nationality имеет значение 'Russian' или 'German'.

Чтобы выбрать строки, у которых столбец Nationality не равен ни одному из этих значений, используйте ключевое слово NOT IN:

```
SELECT Name, Nationality
FROM ARTIST
WHERE Nationality NOT IN ('Russian', 'German');
```

Результат этого запроса будет следующим:

Name	Nationality
Miro	Spanish
Frings	US
Moos	US
Tobey	US
Matisse	French
Chagall	French

Обратите внимание на принципиальное различие между ключевыми словами IN и NOT IN. При использовании IN столбец может иметь любое из значений, указанных в списке. При использовании NOT IN столбец не должен принимать ни одно из перечисленных значений.

3.2.4 Диапазоны, специальные символы и пустые значения в предложениях WHERE

В предложениях WHERE могут также указываться диапазоны и шаблоны поиска. Для задания диапазонов используется ключевое слово BETWEEN. Например, запрос

```
SELECT Name, Nationality
FROM ARTIST
WHERE BirthDate BETWEEN 1700 AND 1890;
```

даст следующий результат:

Name	Nationality
Miro	Spanish
Kandinsky	Russian
Frings	US

Рассмотренный запрос эквивалентен следующему:

```
SELECT Name, Nationality
FROM ARTIST
WHERE BirthDate >= 1700
AND BirthDate <= 1890;
```

Таким образом, диапазон, задаваемый ключевым словом BETWEEN, включает в себя граничные значения (в данном случае 1700 и 1890).

Для задания шаблонов поиска в SQL используется ключевое слово LIKE. Символ подчеркивания ('_') представляет любой одиночный символ. С его помощью можно находить значения, удовлетворяющие заданному шаблону:

```
SELECT *
FROM ARTIST
WHERE Nationality LIKE 'S_anish';
```

Подчеркивание означает, что данном месте может стоять любой символ. Результатом этого запроса является следующая таблица:

ArtistID	Name	Nationality	BirthDate	DeceasedDate
101	Miro	Spanish	1870	1950

Следует обратить особое внимание на такую ситуацию. Чтобы найти всех художников, чье имя начинается на букву 'М' и состоит из четырех символов, нельзя использовать следующий шаблон:

```
SELECT *
FROM ARTIST
WHERE Name LIKE 'М___';
```

Результатом будет таблица, состоящая из нулевого количества строк. Причина такого результата заключается в том, что столбец Name имеет тип char(25). Следовательно, каждое имя будет содержать двадцать пять символов, а не четыре, как предполагалось в шаблоне.

Символ процента ('%') представляет последовательность из одного или нескольких произвольных символов. Запрос, возвращающий строки художников, чьи имена начинаются с буквы 'М', можно записать следующим образом:

```
SELECT *
FROM ARTIST
WHERE Name LIKE 'М%';
```

Результат будет следующим:

ArtistID	Name	Nationality	BirthDate	DeceasedDate
101	Miro	Spanish	1870	1950
105	Moos	US	<NULL>	<NULL>
107	Matisse	French	<NULL>	<NULL>

Если требуется найти всех художников, чьи национальности заканчиваются на букву 'h', можно использовать символ процента следующим образом:

```
SELECT *
FROM ARTIST
WHERE Nationality LIKE '%h';
```

Результат будет таким:

ArtistID	Name	Nationality	BirthDate	DeceasedDate
101	Miro	Spanish	1870	1950
107	Matisse	French	<NULL>	<NULL>
108	Chagall	French	<NULL>	<NULL>

Для поиска пустых значений в предложении WHERE служит конструкция IS NULL. Следующий запрос выдает имена и национальности всех художников, у которых не указан год рождения:

```
SELECT Name, Nationality
FROM ARTIST
WHERE BirthDate IS NULL;
```

Результат запроса будет таким:

Name	Nationality
Moos	US
Tobey	US
Matisse	French
Chagall	French

3.2.5 Сортировка результатов

Порядок строк в таблице, возвращаемой оператором SELECT, является произвольным. Если нужно отсортировать строки результата, это можно сделать с помощью конструкции ORDER BY. Например, следующий запрос возвращает имена и национальности художников, отсортированных в алфавитном порядке по именам:

```
SELECT Name, Nationality
FROM ARTIST
ORDER BY Name;
```

Результатом будет следующая таблица:

Name	Nationality
Chagall	French
Frings	US
Kandinsky	Russian

продолжение таблицы на следующей странице

Name	Nationality
Klee	German
Matisse	French
Miro	Spanish
Moos	US
Tobey	US

По умолчанию сортировка в SQL производится в порядке возрастания. Для явного указания порядка сортировки можно использовать ключевые слова ASC (по возрастанию) и DESC (по убыванию). Например, следующий запрос отсортирует художников по именам в обратном порядке:

```
SELECT Name, Nationality
FROM ARTIST
ORDER BY Name DESC;
```

Результат будет таким:

Name	Nationality
Tobey	US
Moos	US
Miro	Spanish
Matisse	French
Klee	German
Kandinsky	Russian
Frings	US
Chagall	French

Сортировать можно и более чем по одному столбцу. Чтобы отсортировать список имен художников и их национальностей сначала по национальностям в обратном порядке, а потом внутри каждой национальности по именам в прямом порядке, можно было бы использовать такой запрос:

```
SELECT Name, Nationality
FROM ARTIST
ORDER BY Nationality DESC, Name ASC;
```

Это приведет к следующему результату:

Name	Nationality
Frings	US
Moos	US
Tobey	US
Miro	Spanish
Kandinsky	Russian
Klee	German
Chagall	French
Matisse	French

3.2.6 Агрегатные функции SQL

В SQL имеется пять агрегатных функций: COUNT, SUM, AVG, MAX и MIN. Они выполняют различные действия над результатами оператора SELECT. Функция COUNT работает вне зависимости от типа данных столбца, а функции SUM, AVG, MAX и MIN оперируют только числовыми столбцами (integer, numeric и т. д.).

Функция COUNT подсчитывает количество строк в результате, а функция SUM вычисляет сумму значений числового столбца. Например, следующий SQL-запрос подсчитывает количество строк в таблице ARTIST:

```
SELECT COUNT(*)
FROM ARTIST;
```

Результат данного запроса представлен в таблице:

Count
8

Как уже говорилось ранее, результатом SQL-оператора SELECT всегда является отношение. Если, как в данном случае, результат представляет собой одиночное число, это число все равно считается отношением, имеющим одну строку и один столбец.

Рассмотрим следующие два запроса:

```
SELECT COUNT(Nationality)
FROM ARTIST;
```

и

```
SELECT COUNT(DISTINCT Nationality)
FROM ARTIST;
```

Результатом первого запроса будет отношение

Count
8

Результатом второго запроса будет отношение

Count
5

Разница в результатах возникает потому, что второй оператор SELECT не учитывает повторяющиеся строки.

Вот еще один пример использования агрегатных функций:

```
SELECT MIN(SalesPrice), MAX(SalesPrice), SUM(SalesPrice)
FROM TRANSACTION
WHERE TransactionID < 406;
```

Результатом будет следующая таблица:

Min	Max	Sum
9750.00	73500.00	165950.00

Кроме случая с использованием ключевых слов GROUP BY и PARTITION BY (см. далее), Имена столбцов не могут смешиваться с агрегатными функциями. Например, следующий оператор недопустим:

```
SELECT CustomerID, SUM(SalesPrice)
FROM TRANSACTION
WHERE TransactionID < 406;
```

3.2.7 Агрегатные функции и группировка

Полезность агрегатных функций увеличивает тот факт, что их можно применять к группам строк данных. Например, следующий оператор подсчитывает количество художников каждой национальности:

```
SELECT Nationality, COUNT(*)
FROM ARTIST
GROUP BY Nationality;
```

Результат будет таким:

Nationality	Count
German	1
French	2
Russian	1
US	3
Spanish	1

Ключевое слово `GROUP BY` предписывает СУБД отсортировать таблицу по указанному столбцу, а затем применить агрегатные функции к группам строк, имеющим одинаковые значения данного столбца. При использовании `GROUP BY` имя столбца, по которому производится группировка, и агрегатные функции могут сосуществовать в предложении `SELECT`. Это первый из двух случаев, когда имя столбца может появляться вместе с агрегатными функциями.

Далее ограничить множество выдаваемых результатов можно, применяя к формируемым группам различные условия. Например, если нас интересуют только те группы, в которых имеется более одной записи, мы могли бы написать следующее:

```
SELECT Nationality, COUNT(*)
FROM ARTIST
GROUP BY Nationality
HAVING COUNT(*) > 1;
```

Результатом этого оператора будет следующая таблица:

Nationality	Count
French	2
US	3

Вместе с ключевым словом `GROUP BY` можно использовать и предложение `WHERE`. Однако здесь имеет место неоднозначность. Если условие в предложении `WHERE` применяется до формирования групп, результат будет иным, чем когда это условие применяется к уже сформированным группам. Для устранения этой неоднозначности стандарт SQL устанавливает, что в случаях, когда предложения `WHERE` и `GROUP BY` используются одновременно, первым должно применяться условие, записанное в предложении `WHERE`. Рассмотрим, например, следующий оператор:

```
SELECT Nationality, COUNT(*)
FROM ARTIST
WHERE ArtistID < 106
GROUP BY Nationality
HAVING COUNT(*) > 1;
```

При выполнении данного оператора сначала применяется условие из предложения WHERE, которое отбирает художников, чей идентификатор меньше 106. Затем, после формирования групп, применяется условие из предложения HAVING. Результат имеет следующий вид:

Nationality	Count
US	2

3.2.8 Оконные функции

Использование *оконных функций* – второй из двух случаев, когда имя столбца может появляться вместе с агрегатными функциями.

При использовании группировки результирующая таблица содержит по одной строке для каждого группируемого значения, а оконная функция не свертывает результаты, принадлежащие одной группе.

Следующий запрос использует оператор GROUP BY:

```
SELECT Title, ArtistID, COUNT(*)
FROM WORK
GROUP BY Title, ArtistID
ORDER BY ArtistID;
```

Результат имеет вид:

Title	ArtistID	Count
Mi Vida	101	1
Mystic Fabric	106	2
Slow Embers	106	1
Northwest by Night	108	1

Следующий запрос содержит оператор PARTITION BY для реализации оконной функции и имеет вид:


```
SELECT Title, ArtistID, COUNT(*)
OVER (PARTITION BY ArtistID)
FROM WORK
ORDER BY ArtistID;
```

Результат данного запроса представлен в таблице:

Title	ArtistID	Count
Mi Vida	101	1
Mystic Fabric	106	3
Slow Embers	106	3
Mystic Fabric	106	3
Northwest by Night	108	1

Как видно из примеров, оператор `PARTITION BY` является близким аналогом оператора `GROUP BY`, но вместо группировки результатов по столбцам, указанным в запросе вне агрегатных функций, что приводит к уменьшению общего количества строк в результирующей таблице, данный оператор возвращает результаты вычисления агрегатных функций.

3.2.9 Чтение данных из нескольких таблиц с применением вложенных запросов

Все запросы, рассмотренные ранее, считывали данные из одной таблицы. Бывает, однако, что для получения требуемой информации необходимо обработать более одной таблицы. Предположим, например, что мы хотим знать названия работ, которые были проданы галереей дороже 20 000. Названия работ хранятся в таблице `WORK`, а стоимости продаж в таблице `TRANSACTION`.

Если бы мы знали, что дороже 20 000 были проданы работы с номерами 301, 302 и 305, мы могли бы получить названия этих работ с помощью следующего запроса:

```
SELECT Title
FROM WORK
WHERE WorkID IN (301, 302, 305);
```

Но в том-то и дело, что в условии задачи номера работ нам не заданы. Ничто, однако, не мешает нам узнать эти номера, инициировав следующий запрос:

```
SELECT DISTINCT WorkID
FROM TRANSACTION
WHERE SalesPrice > 20000;
```

Результатом будет таблица:

WorkID

301
305
302

Теперь мы можем объединить эти два SQL-запроса при помощи так называемого *вложенного запроса* (subquery):

```
SELECT Title
FROM WORK
WHERE WorkID IN (
    SELECT DISTINCT WorkID
    FROM TRANSACTION
    WHERE SalesPrice > 20000
);
```

Результатом этого оператора будет следующее:

WorkID

Mystic Fabric
Mi Vida
Northwest by Night

И действительно, здесь мы видим названия работ, которые были проданы галереей дороже 20 000. Подобным образом вложенность запросов может быть расширена до трех, четырех и более уровней.

3.2.10 Чтение данных из нескольких таблиц с помощью операции соединения

Вложенные запросы подходят для обработки нескольких таблиц до тех пор, пока результаты (столбцы в предложении SELECT) относятся к одной и той же таблице. Если же нам нужно извлечь данные из двух или более таблиц, при помощи вложенного запроса это сделать не удастся. Вместо этого необходимо использовать операцию соединения (JOIN).

Основная идея здесь – создать новое отношение, связав между собой содержимое двух или более исходных отношений. Рассмотрим следующий пример:

```
SELECT Title, SalesPrice
FROM WORK, TRANSACTION
WHERE WORK.WorkID = TRANSACTION.WorkID;
```

Смысл этого оператора заключается в том, что создается новая таблица с двумя столбцами Title и SalesPrice. Эти столбцы берутся соответственно из таблиц WORK и TRANSACTION при условии, что столбец WorkID в таблице WORK равен одноименному столбцу в таблице TRANSACTION. Обозначения WORK.WorkID и TRANSACTION.WorkID необходимы для устранения конфликта имен столбцов.

Эту операцию можно представить себе следующим образом. Начнем с первой строки таблицы TRANSACTION. Возьмем значение столбца WorkID в данной строке (в табл. 2.4 это 301) и посмотрим строки таблицы WORK (табл. 2.3). Найдя в таблице WORK строку, где WorkID также равняется 301, соединим столбец Title только что найденной первой строки таблицы WORK со столбцом SalesPrice первой строки таблицы TRANSACTION.

Первая строка таблицы WORK (см. табл. 2.3) имеет WorkID, равный 301, поэтому мы соединяем столбец Title первой строки таблицы WORK со столбцом SalesPrice первой строки таблицы TRANSACTION, и получаем тем самым первую строку соединения:

Title	SalesPrice
Mystic Fabric	18500.00

Теперь, по-прежнему используя равенство WorkID = 301, найдем следующую строку в отношении WORK, которая имеет WorkID, равный 301. Таких строк больше нет, поэтому переходим ко второй строке таблицы TRANSACTION. Так как в этой строке WorkID так же равен 301, снова найдем первую строку в отношении WORK, которая имеет WorkID, равный 301. Соединив столбец Title первой строки таблицы WORK со столбцом SalesPrice второй строки таблицы TRANSACTION, мы получим вторую строку соединения:

Title	SalesPrice
Mystic Fabric	18500.00
Mystic Fabric	46700.00

Таким образом, перебирая все строки отношения TRANSACTION, получаем окончательный результат:

Title	SalesPrice
Mystic Fabric	18500.00
Mystic Fabric	46700.00
Mystic Fabric	9750.00
Mi Vida	17500.00
Mi Vida	73500.00
Slow Embers	14500.00
Mystic Fabric	
Northwest by Night	71500.00

Таблицу, получившуюся в результате соединения, можно обрабатывать также, как и любую другую таблицу. Например, мы можем сгруппировать строки по названиям картин и просуммировать вырученные суммы по каждой из картин. Это сделает следующий запрос:

```
SELECT Title, SUM(SalesPrice)
FROM WORK, TRANSACTION
WHERE WORK.WorkID = TRANSACTION.WorkID
GROUP BY Title;
```

Результатом будет следующая таблица:

Title	Sum
Mi Vida	91000.00
Slow Embers	14500.00
Northwest by Night	71500.00
Mystic Fabric	74950.00

Предложение WHERE мы также можем применить в процессе создания соединения:

```
SELECT Title, SalesPrice
FROM WORK, TRANSACTION
WHERE WORK.WorkID = TRANSACTION.WorkID
AND SalesPrice > 20000;
```

Результат соединения будет таким:

Title	SalesPrice
Mystic Fabric	46700.00
Mi Vida	73500.00
Northwest by Night	71500.00

Это такая же таблица, поэтому все описанные выше SQL-операторы к ней применимы.

Теперь рассмотрим случай, когда требуется соединить три таблицы. Предположим, нам нужно знать по каждой картине вырученную сумму и имя художника. Для этого нам нужно соединить три таблицы: TRANSACTION (поле SalesPrice), WORK (поле Title) и ARTIST (поле Name):

```
SELECT Title, SalesPrice, Name
FROM WORK, TRANSACTION, ARTIST
WHERE WORK.WorkID = TRANSACTION.WorkID
AND WORK.ArtistID = ARTIST.ArtistID;
```

Результатом соединения будет следующая таблица:

Title	SalesPrice	Name
Mystic Fabric	46700.00	Tobey
Mystic Fabric	18500.00	Tobey
Mi Vida	73500.00	Miro
Mi Vida	17500.00	Miro
Slow Embers	14500.00	Tobey
Mystic Fabric		Tobey
Mystic Fabric	9750.00	Tobey
Northwest by Night	71500.00	Chagall

В стандарте SQL-92 введен альтернативный синтаксис соединения, ставший весьма популярным, поскольку его легче интерпретировать. Здесь вместо WHERE используются ключевые слова JOIN и ON:

```
SELECT Title, SalesPrice
FROM WORK JOIN TRANSACTION
ON WORK.WorkID = TRANSACTION.WorkID;
```

Результат имеет следующий вид:

Title	SalesPrice
Mystic Fabric	46700.00
Mystic Fabric	18500.00
Mi Vida	73500.00
Mi Vida	17500.00
Slow Embers	14500.00
Mystic Fabric	
Mystic Fabric	9750.00
Northwest by Night	71500.00

Сделать оператор соединения более удобным для чтения можно, используя псевдонимы для имен таблиц. Выражение `FROM WORK W` присваивает таблице `WORK` псевдоним `W`. Это позволяет переписать предыдущий оператор следующим образом:

```
SELECT Title, SalesPrice
FROM WORK W JOIN TRANSACTION T
ON W.WorkID = T.WorkID;
```

Соединение трех таблиц можно выполнить путем добавления предложения `JOIN` в конец первого оператора `SELECT`:

```
SELECT W.Title, SalesPrice, A.Name
FROM WORK W JOIN TRANSACTION T
ON W.WorkID = T.WorkID
JOIN ARTIST A
ON W.ArtistID = A.ArtistID;
```

Следует обратить внимание, что когда требуется указать имя столбца в первой строке оператора `SELECT`, необходимо использовать псевдоним, а не имя таблицы. Так, в вышеприведенном операторе `SELECT` используется запись `W.Title`, а не `WORK.Title`.

По мере того как запросы усложняются, этот формат оказывается легче интерпретировать, и именно он будет использоваться для соединений далее. На практике необходимо знать оба формата, поскольку и тот, и другой применяются в промышленности.

Теперь рассмотрим различия между вложенным запросом и соединением. На практике соединение во многих случаях можно использовать в качестве альтернативы вложенным запросам. Например, ранее в пункте [3.2.9](#) был использован вложенный запрос для нахождения названия работ, которые были проданы галереей

дороже 20 000. Этот же запрос можно реализовать и с помощью соединения:

```
SELECT DISTINCT Title
FROM WORK JOIN TRANSACTION
ON WORK.WorkID = TRANSACTION.WorkID
AND SalesPrice > 20000;
```

Хотя ситуации, когда соединение можно использовать вместо вложенного запроса, нередки, такая замена все же возможна не всегда. Например, соединения не могут заменить коррелированные вложенные запросы, а также запросы с использованием ключевых слов EXISTS и NOT EXISTS (будут рассматриваться далее в следующих разделах пособия).

И наоборот, не всегда вложенный запрос может служить заменой для соединения. В соединении запрашиваемые столбцы могут принадлежать любой из соединяемых таблиц, а во вложенном запросе все возвращаемые столбцы должны принадлежать только одной таблице, и именно той, которая указана в предложении FROM самого первого оператора SELECT. Например, в следующем вложенном запросе в результат войдут только столбцы таблицы ARTIST:

```
SELECT DISTINCT Name
FROM ARTIST
WHERE ArtistID IN (
    SELECT ArtistID
    FROM WORK
    WHERE WorkID IN (
        Select WorkID
        FROM TRANSACTION
        WHERE SalesPrice > 20000
    )
);
```

Если нужно включить в результат столбец WORK.Title, придется использовать соединение:

```
SELECT A.Name, W.Title
FROM ARTIST A JOIN WORK W
ON A.ArtistID = W.ArtistID
JOIN TRANSACTION T
ON T.WorkID = W.WorkID
AND SalesPrice > 20000;
```

3.2.11 Внешние соединения

При выполнении соединения возможна ситуация, когда могут быть потеряны данные. В частности, если строка имеет значение, которое не удовлетворяет условию, заданному в предложении WHERE, эта строка не будет включена в результат соединения. Такая потеря может быть нежелательной, и для предотвращения подобных ситуаций был введен специальный тип соединения - *внешнее соединение* (outer join).

Если нужно построить соединение таким образом, чтобы в результаты вошли каждая строка таблицы слева от ключевого слова JOIN, даже если для этой строки не имеется соответствия во второй таблице, то необходимо использовать следующий синтаксис:

```
SELECT Name, Title
FROM ARTIST LEFT JOIN WORK
ON WORK.ArtistID = ARTIST.ArtistID;
```

Смысл этого оператора в том, что строки таблицы ARTIST соединяются со строками таблицы WORK, как и раньше, но теперь, если какая-то строка в таблице слева от ключевого слова JOIN (здесь это таблица ARTIST) не имеет соответствия в таблице, находящейся справа, эта строка все равно будет включена в результат. Такое соединение называется левым внешним соединением (left outer join). Для данных из табл. 2.2 и табл. 2.3 результат этого запроса будет таким:

Name	Title
Tobey	Mystic Fabric
Miro	Mi Vida
Tobey	Slow Embers
Tobey	Mystic Fabric
Chagall	Northwest by Night
Moos	
Matisse	
Klee	
Kandinsky	

Для организации *правого внешнего соединения* (right outer join) используется оператор RIGHT JOIN. Правое соединение функ-

ционирует аналогично левому, однако в результат включаются все строки таблицы, находящейся справа от ключевого слова JOIN.

Полное внешнее соединение (full outer join) – объединяет в себе работу левого и правого соединения, возвращая все строки из обеих таблиц вне зависимости от наличия соответствия между столбцами. Для полного внешнего соединения используется оператор FULL JOIN.

3.2.12 Объединения

Иногда возникает ситуация, когда необходимо объединить результаты двух и более запросов в единую таблицу, состоящую из схожих строк. При этом, в отличие от операции соединения, операция объединения связывает схожие по структуре отношения, присоединяя одну таблицу к другой снизу.

Для выполнения объединения все отношения, участвующие в данном процессе, должны удовлетворять двум ограничениям:

1. Количество и порядок столбцов в объединяемых запросах должны совпадать.
2. Типы данных в соответствующих столбцах должны быть совместимы.

Одним из возможных вариантов использования операции объединения является ситуация, когда для увеличения быстродействия в базе данных существует несколько идентичных по структуре таблиц, содержащих данные за различный период времени.

Для объединения отношений используется оператор UNION. Рассмотрим следующий пример:

```
SELECT SalesPrice, AskingPrice
FROM TRANSACTION
WHERE WorkID = 301
UNION
SELECT SalesPrice, AskingPrice
FROM TRANSACTION
WHERE CustomerID = 203;
```

Данный запрос получает значения столбцов SalesPrice и AskingPrice для произведения с идентификатором 301 и аналогичные данные, но в отдельном запросе, для клиента с идентификатором 203. Результат выполнения запрос представлен в таблице:

SalesPrice	AskingPrice
18500.00	20000.00
46700.00	47000.00
71500.00	72500.00

Для объединения отношений также можно использовать оператор UNION ALL. Основное отличие оператора UNION от оператора UNION ALL заключается в том, что первый оператор удаляет дублирующиеся строки из результирующего отношения, а второй оставляет:

```
SELECT SalesPrice, AskingPrice
FROM TRANSACTION
WHERE WorkID = 301
UNION ALL
SELECT SalesPrice, AskingPrice
FROM TRANSACTION
WHERE CustomerID = 203;
```

SalesPrice	AskingPrice
18500.00	20000.00
46700.00	47000.00
18500.00	20000.00
71500.00	72500.00

3.3 Средства модификации данных языка SQL

Модификация данных подразумевает три возможных операции: вставка, изменение и удаление. В этом разделе показывается, как выполняются эти операции средствами языка SQL.

3.3.1 Вставка данных, оператор INSERT

Для вставки данных в таблицы служит SQL-оператор INSERT. Этот оператор имеет две формы, в зависимости от того, всем ли столбцам таблицы присваиваются значения. Если указываются значения всех столбцов, то оператор имеет следующий вид:

```
INSERT INTO WORK VALUES
(505, 'Mystic Fabric', 'One of the only pr', '99/136', 104);
```

Обратите внимание, что значения типа `integer` и `numeric` не заключаются в кавычки, в отличие от `char` и `varchar`.

Если данные для каких-то столбцов отсутствуют, можно использовать ключевое слово `NULL` для пропускаемых значений:

```
INSERT INTO ARTIST VALUES  
(15, 'Matisse1', 'French', NULL, NULL);
```

Вторая форма оператора `INSERT`, которая допускает пропуск значений некоторых столбцов, предполагает перечисление имен столбцов, которым будут присвоены значения. Например, следующий оператор добавляет в таблицу `ARTIST` строку, в которой столбцам `ArtistID`, `Name` и `Nationality` присвоены значения, а столбцы `BirthDate` и `DeceasedDate` оставлены пустыми:

```
INSERT INTO ARTIST (Name, Nationality, ArtistID) VALUES  
( 'Repin', 'Russian', 20 );
```

Если для какого-либо столбца при создании таблицы было определено начальное значение, тогда несмотря на то, что в операторе `INSERT` значение этому столбцу может и не присваиваться, СУБД установит значение равное значению по умолчанию.

Есть несколько дополнительных замечаний, которые следует сделать по поводу второй формы оператора `INSERT`. Во-первых, порядок, в котором перечисляются значения столбцов, должен соответствовать порядку следования их имен. В предыдущем примере имена столбцов идут в порядке (`Name`, `Nationality`, `ArtistID`), поэтому сначала должно быть указано значение столбца `Name`, затем – `Nationality` и, наконец, `ArtistID`. Следует отметить, что столбцы в таблице идут в другом порядке (см. табл. 2.2). Во-вторых, чтобы вставка была выполнена, необходимо задать значения всех столбцов, определенных как `NOT NULL`.

Если требуется скопировать большое количество данных из другой таблицы, их значения можно получить с помощью оператора `SELECT`. Например, следующий оператор копирует значения столбцов `ArtistID`, `Name` и `Nationality` из таблицы `ARTIST` в таблицу `ARTIST_NEW` (которая должна быть создана заранее):

```
INSERT INTO ARTIST_NEW (ArtistID, Name, Nationality)  
SELECT ArtistID, Name, Nationality  
FROM ARTIST;
```

Обратите внимание, что в этом случае ключевое слово VALUES не входит в оператор SELECT.

3.3.2 Изменение данных, оператор UPDATE

Значение существующих данных могут быть изменены с помощью SQL-оператора UPDATE. Нужно принимать во внимание, что это мощная команда и ее следует использовать с осторожностью. Рассмотрим следующий пример:

```
UPDATE WORK  
SET Copy = '99/100'  
WHERE WorkID = 302;
```

Этот запрос устанавливает значение столбца Copy в строке произведения с номером 302, равным '99/100'. Теперь посмотрим, что имелось в виду, когда речь шла об осторожности. Допустим, что собираясь произвести это изменение, вы сделали ошибку и забыли про предложение WHERE. Таким образом, был передан на исполнение СУБД следующий запрос:

```
UPDATE WORK  
SET Copy = '99/100';
```

В итоге, если не нарушаются ограничения столбца Copy (например, ограничения по уникальности), то во всей таблице WORK у столбца Copy будет одно значение - '99/100'.

Итог таков: оператор UPDATE весьма мощен и прост в использовании, но может привести к печальным последствиям.

С помощью оператора UPDATE можно обновлять и несколько столбцов за один прием. Это демонстрирует следующий пример:

```
UPDATE WORK  
SET Copy = '99/100', Description = 'Very Nice'  
WHERE WorkID = 302;
```

Эта команда изменяет значения столбцов Copy и Description для указанной работы.

3.3.3 Удаление данных, оператор DELETE

Для удаления строк служит SQL-оператор DELETE. К нему относятся те же самые предостережения, что и к оператору UPDATE.

Он обманчиво прост в использовании, и неосторожное его применение может привести к самым неожиданным последствиям. Следующий оператор удаляет из таблицы CUSTOMER_ARTIST_INT строку, в которой столбец ArtistID равен 108:

```
DELETE
FROM CUSTOMER_ARTIST_INT
WHERE ArtistID = 108;
```

Как и в случае с оператором UPDATE, если вы забудете указать предложение WHERE, последствия могут быть катастрофическими. Например, следующий запрос удалит все строки из отношения CUSTOMER_ARTIST_INT:

```
DELETE
FROM CUSTOMER_ARTIST_INT;
```

Здесь следует обратить внимание на процедуру обеспечения ссылочной целостности между таблицами ARTIST и CUSTOMER_ARTIST_INT. Если мы попытаемся выполнить следующую команду, то нас постигнет неудача, поскольку указанная строка таблицы ARTIST имеет дочерние строки в таблице CUSTOMER_ARTIST_INT (см. листинг 3.3):

```
DELETE
FROM ARTIST
WHERE ArtistID = 108;
```

3.4 Транзакции

Транзакция – механизм СУБД, обеспечивающий непротиворечивость данных. Явное использование механизма транзакций при модификации данных гарантирует, что все операции будут произведены успешно, а в случае возникновения ошибки будет вызван процесс отката транзакции (rollback) и состояние базы данных вернется к первоначальному (состояние до начала выполнения транзакции).

Транзакции в СУБД PostgreSQL обладают свойствами ACID:

- Atomicity (Атомарность) – гарантия успешного выполнения всех операций в рамках транзакции (транзакция не будет зафиксирована с СУБД частично);

- Consistency (Согласованность) – гарантия согласованности данных при выполнении транзакций, достигших своего нормального завершения (противоречивые состояния не видны пользователю, так как при возникновении ошибки происходит откат транзакции);
- Isolation (Изолированность) – гарантия того, что результат транзакции не зависит от результата другой транзакции и не влияет на работу других транзакций;
- Durability (Долговечность) – гарантия сохранности результатов работы успешно завершенных транзакций даже после аварийного отказа сервера СУБД.

Оператор `BEGIN TRANSACTION` позволяет использовать механизм *явных* транзакций, а оператор `ROLLBACK TRANSACTION` применяется для отката транзакции:

```
BEGIN TRANSACTION;  
    DELETE FROM CUSTOMER_ARTIST_INT;  
    DELETE FROM TRANSACTION;  
ROLLBACK TRANSACTION;  
SELECT * FROM CUSTOMER_ARTIST_INT;  
SELECT * FROM TRANSACTION;
```

После выполнения данного запроса содержимое таблиц `CUSTOMER_ARTIST_INT` и `TRANSACTION` останется прежним, так как все действия, совершенные оператором `DELETE`, были отменены в результате отката транзакции.

Помимо явных транзакций, вызываемых пользователем, в PostgreSQL присутствуют так называемые *неявные* транзакции. Данный вид транзакций используется в процессе работы SQL-операторов для модификации данных: `INSERT`, `UPDATE`, `DELETE`.

Например, если во время работы запроса

```
DELETE FROM TRANSACTION WHERE SalesPrice < 10000;
```

произошел аварийный останов сервера СУБД PostgreSQL, после восстановления его работоспособности будет произведен откат базы данных к первоначальному состоянию путем отката соответствующей неявной транзакции.

3.4.1 Контрольные вопросы

1. Оператор CREATE TABLE.
2. Определение ограничений CONSTRAINT.
3. Оператор вставки данных INSERT.
4. Оператор обновления UPDATE.
5. Оператор удаления строк DELETE.
6. Чтение строк и столбцов.
7. Шаблоны поиска в SQL.
8. Сортировка результатов запроса.
9. Встроенные функции SQL.
10. Группировка в запросах.
11. Вложенные запросы.
12. Внешние и внутренние соединения.

4 ПРИМЕНЕНИЕ SQL В ПРИЛОЖЕНИЯХ

4.1 SQL-представления

SQL-представление (SQL view) – это виртуальная таблица, составленная из других таблиц или представлений. Представление не имеет своих собственных данных, а объединяет данные из таблиц или представлений, которые в него входят. Представления создаются с помощью комбинации операторов CREATE VIEW и SELECT. Согласно стандарту SQL-92 представления не могут включать в себя конструкцию ORDER BY, но PostgreSQL такой вариант допускает.

Например, следующий оператор определяет представление под названием ArtistNameView, базирующийся на таблице ARTIST:

```
CREATE VIEW ArtistNameView AS
SELECT Name AS ArtistName
FROM ARTIST
ORDER BY Name;
```

Для получения отсортированного списка имен художников данное представление можно обработать при помощи следующего запроса:

```
SELECT *
FROM ArtistNameView;
```

Результат будет выглядеть следующим образом:

ArtistName

Chagall
Frings
Kandinsky
Klee
Matisse
Miro
Moos
Tobey

Следует обратить внимание на то, как используется оператор SELECT для запроса данных из представления ArtistNameView. Как известно, это выражение возвращает все столбцы. В данном случае возвращается только один столбец, так как он является единственным в представлении ArtistNameView, хотя таблица ARTIST, на основе которой он сформирован, имеет несколько столбцов.

Также обратите внимание, что столбцу Name из таблицы ARTIST в представлении ArtistNameView было дано имя ArtistName. В возвращаемых СУБД результатах в качестве имени столбца фигурирует именно ArtistName.

Представления имеют множество применений. Во-первых, с их помощью можно скрывать от доступа отдельные столбцы или строки. Кроме того, они позволяют отображать вычисляемые столбцы и скрывать сложные SQL-запросы. Также представления обеспечивают уровень абстракции между данными, обрабатываемыми приложением, и реальными данными, содержащимися в таблицах. Далее рассматриваются примеры каждого из этих применений и обсуждаются некоторые другие варианты использования представлений.

4.1.1 Использование представлений для скрытия столбцов и строк

С помощью представлений можно скрыть отдельные столбцы таблиц. Это делается для того, чтобы возвращаемый результат имел более простой вид, а также для предотвращения доступа к конфиденциальным данным. Предположим, что пользователям базы данных нужны только имена и номера телефонов клиентов, но не их домашние адреса или адреса электронной почты. Следующий оператор создает представление BasicCustomerData, содержащее только эти данные.

```
CREATE VIEW BasicCustomerData AS
SELECT Name, AreaCode, PhoneNumber
FROM CUSTOMER;
```

Результаты выполнения оператора SELECT над этим представлением следующие:

ArtistName	AreaCode	PhoneNumber
Jeffrey Janes	206	555-1345
David Smith	303	555-5434
Tiffany Twilight	206	555-1000
Fred Smathers	206	555-1234
Mary Beth Frederickson	303	555-1000

продолжение таблицы на следующей странице

ArtistName	AreaCode	PhoneNumber
Selma Warning	253	555-1234
Susan Wu	721	555-1234
Donald G. Gray	705	555-1345
Lynda Johnson	703	555-1000
Chris Wilkens	206	555-1234

Можно скрывать от просмотра и строки таблиц. Для этого в определении представления должно присутствовать предложение **WHERE**. Следующий оператор определяет представление, содержащее имена и номера телефонов всех клиентов, проживающих в штате Вашингтон:

```
CREATE VIEW BasicCustomerDataWa AS
SELECT Name, PhoneNumber
FROM CUSTOMER
WHERE State = 'WA';
```

Результирующая таблица будет такая:

Name	PhoneNumber
Jeffrey Janes	555-1345
Tiffany Twilight	555-1000
Fred Smathers	555-1234
Chris Wilkens	555-1234

Как и требовалось, в таблице присутствуют сведения только о тех клиентах, которые проживают в штате Вашингтон. Данный факт не является очевидным, поскольку столбец **State** не входит в результат. Это может быть хорошо или плохо в зависимости от того, как используется представление. Если оно используется только в тех случаях, когда значение имеют лишь клиенты из Вашингтона, это хорошо; в противном случае это будет дезориентировать пользователя, создавая впечатление, что кроме перечисленных персон, у галереи больше нет клиентов.

4.1.2 Использование представлений для отображения вычисляемых столбцов

Еще одно применение представлений – отображение результатов вычислений, не прибегая к вводу формул пользователем. На-

пример, следующее представление объединяет столбцы AreaCode и PhoneNumber и форматирует результат:

```
CREATE VIEW CustomerPhone AS
SELECT Name,
       ((' ' || AreaCode || ' ') || PhoneNumber AS Phone
FROM CUSTOMER;
```

Допустим, пользователь вводит следующий запрос:

```
SELECT *
FROM CustomerPhone;
```

Результаты выполнения этого запроса будут следующими:

Name	Phone
Jeffrey Janes	(206)555-1345
David Smith	(303)555-5434
Tiffany Twilight	(206)555-1000
Fred Smathers	(206)555-1234
Mary Beth Frederickson	(303)555-1000
Selma Warning	(253)555-1234
Susan Wu	(721)555-1234
Donald G. Gray	(705)555-1345
Lynda Johnson	(703)555-1000
Chris Wilkens	(206)555-1234

Выполнение необходимых вычислений в представлениях имеет два преимущества. Во-первых, это избавляет пользователей от необходимости вводить математическое выражение, чтобы получить желаемый результат (а также от необходимости знать, как это делается). Во-вторых, это обеспечивает единообразие результатов. Если каждый разработчик, использующий вычисления, будет писать собственные выражения, то они, скорее всего, будут написаны по-разному, из-за чего результаты будут иметь неодинаковый вид.

4.1.3 Использование представлений для скрытия сложного синтаксиса

Еще одно применение представлений – скрытие SQL-запросов со сложным синтаксисом. Это может делаться для того, чтобы избавить разработчиков от необходимости вводить сложный запрос всякий раз, когда им требуется определенное представление, или

для того, чтобы разработчики, не знающие SQL, могли тем не менее воспользоваться преимуществами, которые предоставляют сложные SQL-запросы. Кроме того, как и в случае использования представлений для вычислений, это обеспечивает единообразие результатов.

Два наиболее распространенных варианта использования представлений в данной ипостаси – это скрывание соединений и скрывание вложенных запросов.

Предположим, что продавцам-консультантам галереи необходимо знать, какими художниками интересуется тот или иной клиент. Поскольку связь между сущностями CUSTOMER и ARTIST имеет вид N:M, она представлена в виде таблицы пересечения. Таким образом, чтобы отобразить сведения об интересах клиентов, необходимо выполнить два соединения: сначала соединить таблицы CUSTOMER и CUSTOMER_ARTIST_INT, а затем полученный результат соединить с таблицей ARTIST. Представление, содержащее эти два соединения, конструируется с помощью следующего SQL-запроса:

```
CREATE VIEW CustomerInterests AS
SELECT C.Name AS Customer, A.Name AS Artist
FROM CUSTOMER C
JOIN CUSTOMER_ARTIST_INT CI
    ON C.CustomerID = CI.CustomerID
JOIN ARTIST A
    ON CI.ArtistID = A.ArtistID;
```

Данный запрос выполняет стандартное двойное соединение. Обратите внимание на использование псевдонимов для таблиц (C вместо CUSTOMER, CI вместо CUSTOMER_ARTIST_INT, A вместо ARTIST). Такие псевдонимы упрощают соединения. Например, проще написать C.CustomerID = CI.CustomerID, чем CUSTOMER.CustomerID = CUSTOMER_ARTIST_INT.CustomerID. Использовать псевдонимы не обязательно.

Также обратите внимание на переименование C.Name в Customer и A.Name в Artist. Такое переименование выполнять *необходимо*, в противном случае в представлении оказались бы два столбца с именем Name. СУБД не смогла бы различить эти два столбца и выдала бы ошибку при создании представления.

Следующий оператор запрашивает данные из представления CustomerInterests и сортирует результаты по столбцу Customer:

```
SELECT *
FROM CustomerInterests
ORDER BY Customer;
```

Результат получился следующий:

Customer	Artist
Chris Wilkens	Frings
Chris Wilkens	Tobey
David Smith	Tobey
Donald G. Gray	Tobey
Fred Smathers	Tobey
Lynda Johnson	Tobey
Lynda Johnson	Moos
Lynda Johnson	Frings
Mary Beth Frederickson	Frings
Mary Beth Frederickson	Moos
Mary Beth Frederickson	Tobey
Selma Warning	Tobey
Selma Warning	Miro
Tiffany Twilight	Chagall
Tiffany Twilight	Frings
Tiffany Twilight	Tobey

Представления используются также для скрытия группировки и встроенных функций. Рассмотрим следующее определение представления:

```
CREATE VIEW ArtistWorkNet AS
SELECT W.WorkID, Name, Title, Copy, AcquisitionPrice,
       SalesPrice, (SalesPrice - AcquisitionPrice) AS NetPrice
FROM TRANSACTION T
JOIN WORK W
  ON T.WorkID = W.WorkID
JOIN ARTIST A
  ON W.ArtistID = A.ArtistID;
```

Данное представление соединяет таблицы TRANSACTION, WORK и ARTIST и создает вычисляемый столбец NetPrice. С этим представлением можно выполнять различные операции на языке SQL, как если бы NetPrice был обычным столбцом таблицы. Например, что-

бы отобразить совокупную прибыль от продажи каждой картины, можно использовать следующий оператор:

```
SELECT Name, Title, Copy, SUM(NetPrice) AS TotalNet
FROM ArtistWorkNet
GROUP BY Name, Title, Copy;
```

Результаты выполнения этого запроса показаны ниже:

Name	Title	Copy	TotalNet
Tobey	Mystic Fabric	105/135	5250.00
Miro	Mi Vida	7/10	44300.00
Tobey	Slow Embers	NC	7750.00
Tobey	Mystic Fabric	99/135	27550.00
Chagall	Northwest by Night	37/50	24500.00

У представлений имеется еще одно важное применения – они могут обеспечивать определенный уровень абстракции между приложением базы данных и реальными таблицами. Этот уровень абстракции может быть важен, когда источник данных может меняться. Чтобы понять, о чем идет речь, рассмотрим следующее определение представления:

```
CREATE VIEW CustomerTable1 AS
SELECT *
FROM CUSTOMER;
```

В сущности, это представление присваивает таблице CUSTOMER псевдоним CustomerTable1. Представление CustomerTable1 можно обрабатывать точно таким же образом, как и таблицу CUSTOMER.

Если в коде приложения используется имя CustomerTable1, то источник данных, на котором основано это представление, может меняться, не вызывая необходимости переписывать приложение. Следовательно, в определенный момент в будущем, если источником данных о клиентах станет другая таблица, например, NEW_CUSTOMER, все, что потребуется сделать, – это переопределить представление CustomerTable1 следующим образом:

```
CREATE VIEW CustomerTable1 AS
SELECT *
FROM NEW_CUSTOMER;
```

Весь код приложения, в котором используется имя CustomerTable1, без проблем будет работать с новым источником данных.

Из-за потенциальной необходимости в изменении источников данных некоторые организации никогда не предоставляют разработчикам доступ к реальным таблицам. Вместо этого используются представления, базирующиеся на данных из этих таблиц. Такая стратегия повышает гибкость для будущих проектов по разработке баз данных и упрощает их перепроектирование.

4.2 SQL-запросы в прикладных программах

SQL-запросы можно встраивать в триггеры, хранимые процедуры и прикладные программы. Для того чтобы встроить SQL-запросы в программный код, необходимо преодолеть два затруднения. Во-первых, нужен какой-то способ, позволяющий записывать результаты выполнения SQL-запросов в программные переменные. Это можно сделать по-разному. В одних случаях для этого используются объектно-ориентированные программы, в других применяются более простые методы. Например, в PL/pgSQL (описание данного языка представлено далее) следующий оператор присваивает переменной rowcount значение, равное количеству строк в таблице CUSTOMER:

```
SELECT COUNT(*) INTO rowcount  
FROM CUSTOMER;
```

Вторая трудность заключается в несоответствии парадигм SQL парадигмам языков программирования. Язык SQL оперирует множествами: большинство запросов SQL возвращают таблицу или набор строк. В отличие от этого, программы оперируют отдельными элементами или строками. Из-за этого отличия оператор, подобный приведенному ниже, не имеет смысла:

```
SELECT Name INTO custName  
FROM CUSTOMER;
```

Если в таблице CUSTOMER имеется 100 строк, то запрос столбца Name возвратит 100 значений, в то время как переменная custName может принять только одно значение.

Чтобы преодолеть это затруднение, результаты выполнения SQL-запросов обрабатываются как коллекции. SQL-запрос возвращает набор строк. На первую строку помещается курсор, и данная строка обрабатывается. Затем курсор перемещается на следующую строку, и так далее, пока не будут обработаны все строки. Типичный процесс обработки выглядит так:

```
Использовать
коллекцию SQL (SELECT * FROM CUSTOMER); Поместить
курсор на первую строку;
Пока курсор не вышел за пределы таблицы {
    Присвоить custName значение столбца
        Name в строке под курсором;

    ... Прочие операторы, использующие значение custName ...

    Переместить курсор на следующую строку;
};
... Продолжение обработки...
```

Таким образом, строки, возвращенные SQL-запросом, обрабатываются по одной. Именно таким является принцип встраивания SQL-запросов в программный код. Примеры будут представлены далее.

4.3 Хранимые процедуры

Хранимая процедура (stored procedure) – это программа, которая выполняет некоторые действия с информацией в базе данных и при этом сама хранится в базе данных. В PostgreSQL хранимые процедуры можно писать на собственном языке программирования этой СУБД, носящим название PL/pgSQL (Procedural Language/PostGres Structured Query Language – процедурное расширение языка SQL) или на таких языках, как PL/Perl, PL/Python и PL/Tcl, дополнительно можно использовать PL/Java, PL/PHP, PL/Py, PL/R, PL/Ruby, PL/Scheme, PL/sh и PL/V8, а также имеется поддержка загрузки C-совместимых модулей.

Хранимые процедуры могут иметь входные параметры и возвращать результаты. В отличие от триггерных функций (см. подраздел 4.4), которые принадлежат определенной таблице или пред-

ставлению, хранимые процедуры принадлежат базе данных в целом. Они могут вызываться любым процессом, использующим базу данных, при условии, что у этого процесса есть достаточные права доступа.

Хранимые процедуры используются для многих целей. Хотя администраторы баз данных используют их для выполнения рутинных задач администрирования, главной областью их применения являются все же приложения баз данных. Эти процедуры могут вызываться из прикладных программ, написанных на таких языках, как Java, C#, C++, Python и т. д., а также из веб-сценариев, написанных на JavaScript и подобных языках. Кроме того, эти процедуры можно вызывать в интерактивном режиме из командной оболочки `psql`.

Выделяют следующие преимущества хранимых процедур:

- Большая безопасность.
- Меньший сетевой трафик.
- SQL-код можно оптимизировать.
- Совместное использование кода между разработчиками.

В отличие от кода приложений, хранимые процедуры никогда не передаются на клиентские компьютеры. Они всегда находятся в базе данных и выполняются СУБД на том компьютере, где располагается сервер базы данных. Таким образом, они более безопасны, чем распространяемый код приложения, а кроме того, снижают сетевой трафик. Хранимые процедуры постепенно становятся предпочтительным режимом реализации логики приложения в сети Интернет и корпоративных интрасетях. Еще одно преимущество хранимых процедур заключается в том, что SQL-запросы в них могут быть оптимизированы компилятором СУБД.

Пример хранимой процедуры

Предположим, для нашего примера требуется возможность добавлять в базу данных сведения о новых клиентах и о том, какими художниками они интересуются. В частности, нужно записывать имя и телефон клиента, а также связывать его со всеми художниками выбранной национальности.

В листинге 4.1 представлена хранимая процедура, выполняющая эту задачу. Процедура, которая называется `customer_insert`, принимает четыре параметра: `newname` (имя нового клиента), `newareacode` (код региона), `newphone` (телефон) и `artistnationality` (национальность художника). Ключевое слово `IN` указывает на то, что все эти параметры являются входными. Выходные параметры (которых у этой процедуры нет) обозначаются ключевым словом `OUT`, а параметры, играющие роль и входных и выходных, – сочетанием `INOUT`. Следует обратить внимание, что для параметра указывается только тип данных, а длина не указывается. PostgreSQL определит длину из контекста.

Листинг 4.1.

```
CREATE OR REPLACE FUNCTION customer_insert(  
    newname IN char,  
    newareacode IN char,  
    newphone IN char,  
    artistnationality IN char)  
    RETURNS int AS $customer_insert$  
DECLARE  
    artistcursor CURSOR FOR  
        SELECT ArtistID  
        FROM ARTIST  
        WHERE Nationality = artistnationality;  
    rowcount int;  
BEGIN  
    SELECT Count(*) INTO rowcount  
    FROM CUSTOMER  
    WHERE Name = newname  
    AND AreaCode = newareacode  
    AND PhoneNumber = newphone;  
  
    IF rowcount > 0 THEN  
        RAISE EXCEPTION 'There is client in DB! Count is %!',  
            rowcount;  
    END IF;  
  
    INSERT INTO CUSTOMER  
        (CustomerID, Name, AreaCode, PhoneNumber)  
        VALUES (nextval('seq_customer'), newname,  
            newareacode, newphone);
```

```
FOR artist IN artistcursor LOOP
    INSERT INTO CUSTOMER_ARTIST_INT
        (CustomerID, ArtistID)
        VALUES (currval('seq_customer'), artist.ArtistID);

    RAISE INFO 'Artist %; Customer %',
        currval('seq_customer'), artist.ArtistID;
END LOOP;

RAISE INFO 'Client is added!';

RETURN 1;
END;
$customer_insert$ LANGUAGE plpgsql;
```

Раздел объявления переменных следует за ключевым словом DECLARE. Оператор SELECT определяет *переменную-курсор* (cursor variable) с именем artistcursor. Этот курсор выделяет из таблицы ARTIST для обработки строки всех художников заданной национальности.

В первой части процедуры проверяется, есть ли в базе информация о данном клиенте. В этом случае никакие действия не предпринимаются, а пользователю с помощью оператора RAISE выводится соответствующее сообщение. Следует обратить внимание, что для вывода строки и значения переменной используется следующий синтаксис:

```
RAISE уровень<> строка'<> %' переменная<>;
```

В данном случае в качестве уровня могут быть указаны следующие значения: DEBUG, LOG, INFO, NOTICE, WARNING и EXCEPTION. Уровень EXCEPTION используется по-умолчанию. При использовании уровня EXCEPTION вызывается исключение, завершающее текущую транзакцию с выводом сообщения об ошибке, остальные уровни лишь выводят сообщения с различным уровнем приоритета. Символ '%' используется для вставки в строку значения переменной.

Пользователь получит это сообщение только в том случае, если процедура будет вызвана из rsql или pgAdmin III. В случае вызова процедуры иным путем, например с помощью браузера через Интернет, пользователь не увидит этого сообщения. Чтобы сообщить

пользователю об ошибке, разработчик должен воспользоваться выходным параметром или сгенерировать исключение.

Оставшаяся часть процедуры в листинге 4.1 вставляет данные о новом клиенте и затем перебирает всех художников выбранной национальности. Обратите внимание на использование специальной конструкции PL/pgSQL `FOR artist IN artistcursor LOOP`. Эта конструкция выполняет несколько задач. Прежде всего, она открывает курсор и считывает первую строку. Затем она последовательно обрабатывает все строки под курсором и по окончании обработки передает управление следующему после `FOR` оператору. Заметьте также, что обращение к столбцу `ArtistID` текущей строки происходит с использованием синтаксиса `artist.ArtistID`, где `artist` – это имя *переменной цикла* `FOR`, а не курсора.

После того как процедура написана, ее необходимо скомпилировать и сохранить в базе данных. Если текст процедуры сохранен в файле, то процедура будет скомпилирована и сохранена в базе данных автоматически после ввода команды `psql`

```
\i путь< до sql файла с текстом процедуры>
```

Если вы что-то ввели неправильно, у вас могут возникнуть ошибки компиляции. Если синтаксических ошибок не было, вы получите сообщение «CREATE FUNCTION» (Процедура создана). Теперь вы можете вызвать эту процедуру с помощью запроса.

Например:

```
SELECT customer_insert(  
    'Michael Bench', '203', '555-2014', 'US');
```

4.4 Триггеры

Триггер (trigger) – это специальная программа, назначаемая таблице или представлению. Триггер вызывается СУБД, когда пользователь запрашивает вставку, обновление или удаление строки из таблицы или представления, которому принадлежит данный триггер. С каждым триггером связана собственная триггерная функция.

PostgreSQL поддерживает три вида триггеров: предваряющие (BEFORE), замещающие (INSTEAD OF) и завершающие (AFTER). Как и логично было бы ожидать, предваряющие триггеры вызываются

перед обработкой запроса на вставку, обновление, удаление или опустошение, замещающие – вместо него, а завершающие – после обработки запроса. Всего имеется двенадцать возможных типов триггеров: предваряющий триггер вставки, обновления, удаления и опустошения, замещающий триггер вставки, обновления, удаления и опустошения и завершающий триггер вставки, обновления, удаления и опустошения.

При запуске триггера СУБД предоставляет доступ к вставляемым, обновляемым или удаляемым из тела триггера данным. В случае вставки триггеру доступны значения столбцов новой строки, в случае удаления – значения столбцов удаляемой строки, а в случае обновления триггер может оперировать как новыми, так и старыми значениями.

В PostgreSQL для получения нового состояния строки необходимо использовать переменную NEW. Так, например, при вставке в таблицу CUSTOMER переменная NEW.Name содержит значение столбца Name вставляемой строки. В случае обновления переменная NEW.Name содержит значение, которое будет иметь столбец Name после выполнения запроса. Аналогичным образом, для получения старых значений необходимо использовать переменную OLD. Например, при удалении переменная OLD.Name содержит значение столбца Name удаляемой строки. В случае обновления эта переменная содержит значение столбца Name до выполнения запроса.

Триггеры имеют множество применений. Основные из них: проверка допустимости вводимых данных, присваивание значений по умолчанию, обновление представлений и обеспечение ссылочной целостности.

4.4.1 Использование триггеров для проверки допустимости вводимых данных

Предположим, у галереи (см. описание практического примера в гл. 2) есть правило, что ни одна работа не может быть продана менее чем за 90% от запрошенной цены. Чтобы обеспечить выполнение этого правила, можно написать триггер обновления для таблицы TRANSACTION, сравнивающий значения AskingPrice и SalesPrice. Если правило нарушается, в столбец SalesPrice ставит-

ся значение столбца AskingPrice, а в столбец AskingPrice исходное значение.

Можно использовать две стратегии. Одна заключается в том, чтобы написать предваряющий триггер, который проверяет и переустанавливает, если необходимо, значение столбца SalesPrice до выполнения обновления. Вторая стратегия – написать завершающий триггер, проверяющий и переписывающий строку таблицы TRANSACTION после обновления.

Листинг 4.2 соответствует второй стратегии. Если есть необходимость в комментариях, то они помещаются в скобки вида `'/* ... */'` либо перед текстом комментария ставится символ `'--'`.

Листинг 4.2.

```
CREATE OR REPLACE FUNCTION sales_price_check()
  RETURNS trigger AS $sales_price_check$
BEGIN
  IF NEW.SalesPrice < 0.9 * OLD.AskingPrice THEN
    NEW.SalesPrice = OLD.AskingPrice;
    NEW.AskingPrice = OLD.AskingPrice;
  END IF;

  RETURN NEW;
END;
$sales_price_check$ LANGUAGE plpgsql;

CREATE TRIGGER sales_price_check
  BEFORE UPDATE ON TRANSACTION
  FOR EACH ROW EXECUTE PROCEDURE sales_price_check();
```

Логика работы триггера очевидна. Если новая продажная цена составляет менее 90% от запрашиваемой цены, продажная цена устанавливается равной запрашиваемой цене. Обратите внимание, что новая продажная цена сравнивается со *старой* запрашиваемой ценой; в противном случае можно было бы, изменив обе цены, успешно совершить обновление, нарушающее данное ограничение. На тот случай, если именно так и произошло, столбец AskingPrice в операторе UPDATE устанавливается равным OLD.AskingPrice.

4.4.2 Использование триггеров для присвоения значений по умолчанию

Столбцам таблицы могут присваиваться значения по умолчанию с помощью квалификатора DEFAULT. В качестве таких значений можно задавать константы или результаты вычисления простых выражений. Если же задание значения по умолчанию требует более сложной логики, необходимо использовать триггер.

В случае нашего примера предположим, что у галереи имеется правило, согласно которому запрашиваемая цена произведения устанавливается равной удвоенной стоимости его приобретения или сумме общей стоимости приобретения и чистой выручки от продажи этого произведения в прошлом. Это правило реализуется с помощью завершающего триггера, показанного в листинге 4.3. Представление, которое используется в рассматриваемом триггере, имеет следующий вид:

```
CREATE VIEW ArtistWorkNet AS
SELECT W.WorkID, Name, Title, Copy, AcquisitionPrice,
SalesPrice, (SalesPrice - AcquisitionPrice) AS NetPrice
FROM TRANSACTION T
JOIN WORK W
    ON T.WorkID = W.WorkID
JOIN ARTIST A
    ON W.ArtistID = A.ArtistID;
```

Листинг 4.3.

```
CREATE OR REPLACE FUNCTION set_asking_price()
    RETURNS trigger AS $set_asking_price$
DECLARE
    avgNetPrice numeric(8,2);
    newPrice numeric(8,2);
    rowcount integer;
BEGIN
    SELECT Count(*) INTO rowcount
    FROM TRANSACTION
    WHERE WorkID = NEW.WorkID;

    IF rowcount = 0 THEN
        NEW.AskingPrice = 2 * (NEW.AcquisitionPrice);
    ELSE
        SELECT AVG(NetPrice) INTO avgNetPrice
```

```
FROM ArtistWorkNet AW
WHERE AW.WorkID = NEW.WorkID
GROUP BY AW.WorkID;

newPrice = avgNetPrice + NEW.AcquisitionPrice;
IF newPrice > 2 * (NEW.AcquisitionPrice) THEN
    NEW.AskingPrice = newPrice;
ELSE
    NEW.AskingPrice = 2 * (NEW.AcquisitionPrice);
END IF;
END IF;

RETURN NEW;
END;
$set_asking_price$ LANGUAGE plpgsql;

CREATE TRIGGER set_asking_price
BEFORE INSERT ON TRANSACTION
FOR EACH ROW EXECUTE PROCEDURE set_asking_price();
```

Триггер сначала подсчитывает количество строк в таблице TRANSACTION, в которых значение WorkID равно NEW.WorkID. Поскольку это предваряющий триггер, произведение еще не добавлено в базу данных, и количество будет равным нулю, если это произведение не появлялось в галерее ранее. В этом случае NEW.AskingPrice устанавливается равным удвоенному значению AcquisitionPrice.

Если произведение появлялось в галерее в прошлом, рассчитывается средняя чистая прибыль от его продажи с помощью представления ArtistWorkNet. После этого вычисляется переменная newPrice как сумма средней чистой прибыли и стоимости приобретения. Наконец, NEW.AskingPrice присваивается большее из двух значений – newPrice или удвоенное значение AcquisitionPrice. Так как триггер предваряющий, для усреднения можно использовать встроенную функцию AVG: новая строка еще не добавлена в таблицу WORK, поэтому она не будет учтена при расчете среднего значения.

Следует обратить внимание на один нюанс: если в какой-либо из строк представления ArtistWorkNet столбец SalesPrice или AcquisitionPrice является пустым, это может вызвать проблемы при вычислениях в триггере.

Рассмотренный триггер выполняет полезную функцию, избавляя персонал галереи от значительного количества ручной работы, а также повышая точность результатов.

4.4.3 Триггер, обновляющий представление

Обновление представлений в ряде случаев может оказаться затруднительным. Одна из таких проблем касается представлений, созданных при помощи операции соединения: как правило, СУБД не способна обновлять таблицы, лежащие в основе таких представлений. Однако, зная специфику конкретного приложения, можно определить, как следует интерпретировать запрос на обновление соединенного представления.

Рассмотрим представление CustomerInterests:

```
CREATE VIEW CustomerInterests AS
SELECT C.Name AS Customer, A.Name AS Artist
FROM CUSTOMER C
JOIN CUSTOMER_ARTIST_INT CI
  ON C.CustomerID = CI.CustomerID
JOIN ARTIST A
  ON CI.ArtistID = A.ArtistID;
```

Данное представление содержит строки таблиц CUSTOMER и ARTIST, соединенные через таблицу пересечения. Столбцу CUSTOMER.Name дан псевдоним Customer, а столбцу ARTIST.Name – Artist.

Запрос на изменение имени клиента в представлении CustomerInterests можно интерпретировать как запрос на изменение столбца Name в таблице CUSTOMER. Такой запрос, однако, может быть обработан лишь в том случае, если это имя является уникальным в таблице CUSTOMER. В противном случае невозможно будет определить, какую из строк следует обновлять.

В листинге 4.4 приведен текст замещающего триггера, который обновляет имя клиента, если это имя является уникальным в базе данных. Вместо того чтобы подсчитывать количество строк с данным именем клиента и выполнять обновление только в том случае, если такая строка всего одна, триггер обуславливает обновление ключевым словом NOT EXISTS. Такая конструкция триггера

позволяет PostgreSQL оптимизировать SQL-запрос и приводит к лучшей производительности.

Листинг 4.4.

```
CREATE OR REPLACE FUNCTION customer_interests_update()
    RETURNS trigger AS $customer_interests_update$
BEGIN
    UPDATE CUSTOMER C1
    SET Name = NEW.Customer
    WHERE C1.Name = OLD.Customer
    AND NOT EXISTS
    (
        SELECT *
        FROM CUSTOMER C2
        WHERE C2.Name = C1.Name
        AND C2.CustomerID <> C1.CustomerID
    );

    RETURN NEW;
END;
$customer_interests_update$ LANGUAGE plpgsql;

CREATE TRIGGER customer_interests_update
    INSTEAD OF UPDATE ON CustomerInterests
    FOR EACH ROW EXECUTE PROCEDURE customer_interests_update();
```

4.4.4 Триггер, обеспечивающий ссылочную целостность

Согласно рис. 2.1, таблица WORK рассматриваемого в пособии примера имеет обязательного потомка в таблице TRANSACTION. Это означает, что всякий раз, когда в таблицу WORK вставляется строка, необходимо вставить соответствующую ей строку в таблицу TRANSACTION.

Реализовать такие ограничения ссылочной целостности непросто. Первое, что приходит в голову, – это создать завершающий триггер для таблицы WORK, который бы проверял, что приложение создало требуемую строку в таблице TRANSACTION. Однако любой такой триггер будет запускаться непосредственно после вставки строки в таблицу WORK, то есть до того как приложение получит шанс вставить новую строку в таблицу

TRANSACTION. Таким образом, триггер не сможет увидеть строку, которую собирается вставить приложение.

Другое решение – потребовать от приложения создать строку в таблице TRANSACTION, *перед тем* как вставить новую строку в таблицу WORK. Но в этом случае мы переопределяем связь так, что теперь строка в таблице TRANSACTION требует строки в таблице WORK. Поэтому СУБД откажется вставлять в таблицу TRANSACTION строку, не имеющую родителя, и сделает она это еще до того, как будет вызван какой-либо триггер таблицы TRANSACTION. Таким образом, триггер, определенный для таблицы TRANSACTION, никогда не получит возможности создать требуемую строку в таблице WORK.

Одно возможное, хотя и не очень красивое, решение заключается в том, чтобы создать пару триггеров. Первый из них будет создавать строку в таблице TRANSACTION при вставке строки в таблицу WORK. Второй триггер будет удалять строку, вставленную по умолчанию, когда приложение захочет вставить строку в таблицу TRANSACTION. При таком подходе, если приложение не создаст требуемой строки, будет использоваться строка, вставленная триггером. Если приложение создаст новую строку в таблице TRANSACTION, то вставленная по умолчанию строка будет предварительно удалена.

Эта пара триггеров представлена в листингах 4.5 и 4.6. Первый триггер (листинг 4.5) создает строку по умолчанию в таблице TRANSACTION. Сначала он проверяет, нет ли в этой таблице существующей строки с таким WorkID; если нет, он вставляет новую строку. Второй триггер (листинг 4.6) удаляет строку, созданную первым триггером, когда пользователь вставляет соответствующую строку в таблицу TRANSACTION.

Листинг 4.5.

```
CREATE OR REPLACE FUNCTION enforce_trans_child()  
  RETURNS trigger AS $enforce_trans_child$  
DECLARE  
  rowcount int;  
  NewID int;  
BEGIN  
  NewID = NEW.WorkID;  
  
  SELECT Count(*) INTO rowcount
```

```
FROM TRANSACTION
WHERE WorkID = NewID
AND CustomerID IS NULL;

IF rowcount = 0 THEN
    INSERT INTO TRANSACTION
        (TransactionID, DateAcquired, WorkID)
        VALUES (nextval('seq_transaction'), NOW(), NewID);
END IF;

RETURN NEW;
END;
$enforce_trans_child$ LANGUAGE plpgsql;

CREATE TRIGGER enforce_trans_child
AFTER INSERT ON WORK
FOR EACH ROW EXECUTE PROCEDURE enforce_trans_child();
```

Листинг 4.6.

```
CREATE OR REPLACE FUNCTION remove_dup_trans()
    RETURNS trigger AS $remove_dup_trans$
BEGIN
    DELETE FROM TRANSACTION
    WHERE WorkID = NEW.WorkID
    AND CustomerID IS NULL
    AND TransactionID <> NEW.TransactionID;

    RETURN NEW;
END;
$remove_dup_trans$ LANGUAGE plpgsql;

CREATE TRIGGER remove_dup_trans
BEFORE INSERT ON TRANSACTION
FOR EACH ROW EXECUTE PROCEDURE remove_dup_trans();
```

Тем не менее это решение нельзя назвать удовлетворительным. Еще одна альтернатива, более сложная в реализации, но эстетически более привлекательная, – потребовать от приложения, чтобы новые произведения добавлялись в базу данных через представление, содержащее все необходимые данные для таблицы WORK и TRANSACTION. В этом случае вставку данных из представления WorkTransaction в таблицы WORK и TRANSACTION осуществлял бы триггер, а прямую вставку строк в эти таблицы следовало бы запретить.

4.5 Правила

Правила в PostgreSQL используются для изменения дерева запроса. Перед началом выполнения запроса PostgreSQL формирует так называемое *абстрактное синтаксическое дерево* данного запроса, в котором ветви сопоставлены с SQL-операторами, а листья – с соответствующими значениями.

Рассмотрим пример использования правил для решения задачи обновления представления (см. пункт 4.4.3). В данном случае правило работает аналогично триггеру из пункта 4.4.3 и «объясняет» PostgreSQL, каким образом применять оператор UPDATE к представлению CustomerInterests. Правила в PostgreSQL создаются с помощью оператора CREATE RULE (см. листинг 4.7).

Листинг 4.7.

```
CREATE RULE update_customer_interests AS
ON UPDATE TO CustomerInterests DO INSTEAD
    UPDATE CUSTOMER C1
    SET Name = NEW.Customer
    WHERE C1.Name = OLD.Customer
    AND NOT EXISTS
    (
        SELECT *
        FROM CUSTOMER C2
        WHERE C2.Name = C1.Name
        AND C2.CustomerID <> C1.CustomerID
    );
```

4.6 Модуль TABLEFUNC

Модуль TABLEFUNC содержит методы для формирования сводных таблиц.

Рассмотрим пример формирования сводной таблицы для отслеживания количества продаж картин в каждом месяце по годам:

```
SELECT YEAR,
SUM(JAN) AS JAN, SUM(FEB) AS FEB, SUM(MAR) AS MAR,
SUM(APR) AS APR, SUM(MAY) AS MAY, SUM(JUN) AS JUN,
SUM(JUL) AS JUL, SUM(AUG) AS AUG, SUM(SEP) AS SEP,
SUM(OCT) AS OCT, SUM(NOV) AS NOV, SUM(DEC) AS DEC
FROM crosstab(
```

```

'SELECT EXTRACT(YEAR FROM PurchaseDate) AS YEAR,
extract(MONTH FROM PurchaseDate) as MONTH,
COUNT(*) AS COUNT
FROM TRANSACTION
GROUP BY YEAR, MONTH',
'SELECT GENERATE_SERIES(1, 12)'
) AS (
    year int,
    jan int, feb int, mar int, apr int, may int, jun int,
    jul int, aug int, sep int, oct int, nov int, dec int
)
GROUP BY YEAR
ORDER BY YEAR;

```

Результат запроса будет следующим:

Year	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
1974			1									
1989										1		
2000			1								1	
2001								1				
2002			1							1		

В данном запросе для извлечения года и номера месяца из значения даты столбца PurchaseDate используется функция EXTRACT (см. подраздел 5.6). Функция CROSSTAB принимает на вход в качестве первого параметра запрос, который должен содержать три столбца:

1. Идентификатор строки – столбец YEAR.
2. Категория – столбец MONTH.
3. Значение – столбец COUNT.

Вторым параметром функции CROSSTAB выступает запрос, формирующий набор значений соответствующих номерам месяцев, для чего используется функция GENERATE_SERIES.

Первый запрос, в данном случае, определяет строки сводной таблицы, а второй – столбцы.

После ключевого слова AS объявляются переменные, которые будут соответствовать столбцам формируемой сводной таблицы, без чего функция CROSSTAB работать не будет.

Если при вызове методов модуля TABLEFUNC возникнет ошибка с текстом «Функция с данными именем и типами аргументов не найдена» необходимо выполнить запрос для активации модуля:

```
CREATE EXTENSION TABLEFUNC;
```

4.7 Словарь метаданных

PostgreSQL поддерживает исчерпывающий словарь метаданных (`information_schema`), содержащий описание структур таблиц, последовательностей, представлений, индексов, ограничений, хранимых процедур и т. д. Он также содержит исходные тексты хранимых процедур и триггерных функций.

Словарь метаданных отличается от функций `psql`, представленных в таблице [1.2](#), возможностью их использования в приложениях путем формирования запросов к СУБД.

Рассмотрим несколько примеров по работе со словарем метаданных:

- получение имени текущей базы данных:

```
SELECT * FROM  
    information_schema.information_schema_catalog_name;
```

- получение списка ограничений:

```
SELECT * FROM information_schema.table_constraints;
```

- получение списка внешних ключей:

```
SELECT * FROM  
    information_schema.referential_constraints;
```

- получение списка хранимых процедур:

```
SELECT * FROM information_schema.routines;
```

- получение списка последовательностей:

```
SELECT * FROM information_schema.sequences;
```

- получение списка таблиц:

```
SELECT * FROM information_schema.tables;
```

- получение списка триггеров:

```
SELECT * FROM information_schema.triggers;
```

- получение списка представлений:

```
SELECT * FROM information\_schema.views;
```

Документация по словарию метаданных PostgreSQL представлена в [5].

4.8 Контрольные вопросы

1. Среда выполнения PL/SQL.
2. Неименованный блок PL/SQL.
3. Курсоры в PL/SQL.
4. Атрибуты курсора.
5. Неявные курсоры.
6. Курсоры-циклы.
7. Курсоры с параметрами.
8. Курсоры с обновлением.
9. Процедуры и функции PL/SQL.
10. Строковые и операторные триггеры.
11. Псевдозаписи триггера.
12. Триггерные предикаты.

5 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ POSTGRESQL

В этой главе рассматриваются функции и операторы PostgreSQL, которые могут быть полезными при разработке реальных предметно-ориентированных баз данных, а также для их настройки и тестирования.

5.1 Функция ROW_NUMBER

Функция ROW_NUMBER генерирует порядковый номер строки запроса.

Например:

```
SELECT ROW_NUMBER() OVER (ORDER BY Name) Num, Name
FROM ARTIST;
```

В данном запросе производится нумерация извлекаемых строк. Также ROW_NUMBER может применяться для ограничения количества обрабатываемых строк. Так, данный запрос извлекает первые пять строк данных:

```
SELECT * FROM (
    SELECT ROW_NUMBER() OVER (ORDER BY Name) Num, Name
    FROM ARTIST
) Artists
WHERE Num <= 5;
```

Если при группировке необходимо нумеровать строки для каждой группы в отдельности, следует использовать оператор PARTITION BY.

Например:

```
SELECT ROW_NUMBER() OVER (PARTITION BY Nationality) Num,
    Nationality, COUNT(*)
FROM ARTIST
GROUP BY Nationality;
```

5.2 Функция COALESCE

Функция COALESCE, как правило, применяется чаще всего. Функция принимает несколько параметров:

```
COALESCE(value [, ...])
```

Функция возвращает значение первого аргумента, значение которого не равно NULL. Данная функция вернет NULL только в том случае, если все аргументы имеют значение NULL.

Рассмотрим практический пример. Поле BirthDate в таблице ARTIST может содержать значения NULL. При выполнении запроса вида:

```
SELECT Name, BirthDate,
       COALESCE(BirthDate, 0) Coalesce_BirthDate
FROM ARTIST;
```

значение NULL будет заменено на ноль. Обратите внимание на то, что в случае формирования значения при помощи функции ему назначается псевдоним. Результаты запроса будут иметь вид:

Name	BirthDate	Coalesce_BirthDate
Miro	1870	1870
Kandinsky	1854	1854
Frings	1700	1700
Klee	1900	1900
Moos	<NULL>	0
Tobey	<NULL>	0
Matisse	<NULL>	0
Chagall	<NULL>	0

5.3 Числовые функции

В PostgreSQL предусмотрен ряд встроенных функций для работы с числами.

Функция ABS

Функция ABS(n) возвращает абсолютное значение числа n.

Например:

```
SELECT ABS(100) X1, ABS(-100) X2, ABS(-100.2) X3;
```

X1	X2	X3
100	100	100.2

Функция CEIL

Функция CEIL(*n*) возвращает наименьшее целое, большее или равное переданному в качестве параметра числу *n*.

Например:

```
SELECT CEIL(100) X1, CEIL(-100) X2,
       CEIL(100.2) X3, CEIL(-100.2) X4;
```

X1	X2	X3	X4
100	-100	101	100

Функция FLOOR

Функция FLOOR(*n*) возвращает наибольшее целое, меньшее или равное переданному в качестве параметра числу *n*.

Например:

```
SELECT FLOOR(100.22) X1, FLOOR(-100.22) X2,
       FLOOR(100.99) X3, FLOOR(100.01) X4;
```

X1	X2	X3	X4
100	-101	100	100

Функция TRUNC

Функция TRUNC(*n*[, *m*]) возвращает число *n*, усеченное до *m* знаков после десятичной точки. Параметр *m* может не указываться – в этом случае *n* усекается до целого.

```
SELECT TRUNC(100.25678) X1, TRUNC(-100.25678) X2,
       TRUNC(100.99) X3, TRUNC(100.25678, 2) X4;
```

X1	X2	X3	X4
100	-100	100	100.25

Функция ROUND

Функция ROUND(*n*[, *m*]) возвращает число *n*, округленное до *m* знаков после десятичной точки по правилам математического

округления. Параметр *m* может не указываться – в этом случае *n* округляется до целого.

```
SELECT ROUND(100.25678) X1, ROUND(100.5) X2,  
ROUND(100.99) X3, ROUND(100.25678, 2) X4;
```

X1	X2	X3	X4
100	101	101	100.26

Функция *SIGN*

Функция *SIGN*(*n*) определяет знак числа. Если *n* положительное, то функция возвращает 1. Если отрицательное – возвращается -1. Если равно нулю, то возвращается 0.

Например:

```
SELECT SIGN(100.22) X1, SIGN(-100.22) X2, SIGN(0) X3;
```

X1	X2	X3
1	-1	0

Функция *MOD*

Функция *MOD*(*n*, *m*) возвращает остаток от деления *n* на *m*.

Например:

```
SELECT MOD(10, 3) X1, MOD(10, 2) X2, MOD(100, 98) X3;
```

X1	X2	X3
1	0	2

Функция *POWER*

Функция *POWER*(*n*, *m*) возводит число *n* в степень *m*. Степень может быть дробной и отрицательной, что существенно расширяет возможности данной функции.

```
SELECT POWER(10, 2) X1, POWER(100, 0.5) X2,  
POWER(1000, 0.33333333) X3, POWER(1000, -0.33333333) X4;
```

X1	X2	X3	X4
100	10	9.999...934	0.100...851

В некоторых случаях при вызове данной функции может возникнуть исключительная ситуация.

Например:

```
SELECT POWER(-100, 0.5) X2;
```

В данном случае производится попытка вычисления квадратного корня от отрицательного числа, что приведет к возникновению ошибки «Отрицательное число в дробной степени дает комплексный результат».

Функция SQRT

Функция SQRT(n) возвращает квадратный корень от числа n.

Например:

```
SELECT SQRT(100) X;
```

X
10

Функции EXP и LN

Функция EXP(n) возводит e в степень n, а функция LN(n) вычисляет натуральный логарифм от n (при этом значение n должно быть больше нуля).

Пример:

```
SELECT EXP(1) X1, LN(1) X2, LN(EXP(2)) X3;
```

X1	X2	X3
2,71828182845905	0	2

Попытка передать функции LN отрицательное значение приводит к возникновению ошибки «Вычислить логарифм отрицательного числа нельзя».

Функция LOG

Функция LOG(*n*, *m*) производит вычисление логарифма *m* по основанию *n*.

Пример:

```
SELECT LOG(2, 8) X1, LOG(10, 100) X2;
```

X1	X2
3	2

5.4 Тригонометрические функции

PostgreSQL поддерживает вычисление основных тригонометрических функций:

- SIN(*n*) – синус *n* (где *n* – угол в радианах);
- COS(*n*) – косинус *n* (где *n* – угол в радианах);
- TAN(*n*) – тангенс *n* (где *n* – угол в радианах);
- COT(*n*) – котангенс *n* (где *n* – угол в радианах).

Пример:

```
SELECT SIN(0) X1, COS(0) X2, TAN(0) X3, COT(0);
```

X1	X2	X3	X4
0	1	0	Infinity

5.5 Строковые и символьные функции

В этой части речь пойдет о функциях работы с текстовой информацией, которые могут применяться в запросах и программном коде на языке PL/pgSQL.

Функция CONCAT

Функция CONCAT(*str1*, *str2*) выполняет конкатенацию строк *str1* и *str2*. Если один из аргументов равен NULL, то он воспринимается как пустая строка. Если оба аргумента равны NULL, то функция возвращает NULL.

Пример:

```
SELECT CONCATU(' попа ', была' собака') X1,
CONCAT('Test', NULL) X2,
CONCAT(NULL, 'Test') X3,
CONCAT(NULL, NULL) X4;
```

X1	X2	X3	X4
У попа была собака	Test	Test	NULL

Для конкатенации строк PostgreSQL поддерживает специальный оператор конкатенации ||, который работает аналогично функции CONCAT, например:

```
SELECT CONCATU(' попа ', была' собака') X1,У
' попа ' || была' собака' X2;
```

X1	X2
У попа была собака	У попа была собака

Функция LOWER

Функция LOWER(str) преобразует все символы строки str в строчные.

Пример:

```
SELECT LOWER('TeXt DATA') X;
```

X
text data

Функция UPPER

Функция UPPER(str) преобразует все символы строки str в прописные.

Пример:

```
SELECT UPPER('TeXt DATA') X;
```

X

TEXT DATA

Функция *INITCAP*

Функция `INITCAP(str)` возвращает строку `str`, в которой первые буквы всех слов преобразованы в прописные. Функция удобна для форматирования полного имени при построении отчетов.

Пример:

```
SELECT INITCAP(Иванов(' петр сидорович')) X;
```

X

Иванов Петр Сидорович

Функции *LTRIM* и *RTRIM*

Функция `LTRIM(str [,set])` удаляет все символы с начала строки до первого символа, которого нет в наборе символов `set`. По умолчанию `set` состоит из одного пробела и может не указываться. Функция `RTRIM(str [,set])` аналогична `LTRIM`, но удаляет символы, начиная от конца строки. Рассмотрим несколько примеров:

```
SELECT LTRIM(' TeXt DATA') X1,
LTRIM(' _ # TeXt DATA', ' #_') X2,
LTRIM(' 1234567890 TeXt DATA', ' 1234567890') X3
UNION ALL
SELECT RTRIM('TeXt DATA ') X1,
RTRIM('TeXt DATA _ # ', ' #_') X2,
RTRIM('TeXt DATA 1234567890 ', ' 1234567890') X3;
```

X1

TeXt DATA
TeXt DATA

X2

TeXt DATA
TeXt DATA

X3

TeXt DATA
TeXt DATA

Функция *REPLACE*

Функция `REPLACE(str, search_str, replace_str)` осуществляет поиск образца `search_str` в строке `str` и каждое найденное вхож-

дение заменяет на `replace_str`. Поиск подстроки ведется с учетом регистра.

Пример:

```
SELECT REPLACEY(' попа была собака', собака'', кошка'') X1,
REPLACEY(' попа была злая собака', злая'', '') X2,
REPLACEY(' попа была собака', Собака'', Кошка'') X3;
```

X1	X2	X3
У попа была кошка	У попа была собака	У попа была собака

Функция *TRANSLATE*

Функция `TRANSLATE(str, from_mask, to_mask)` анализирует строку `str` и заменяет в ней все символы, встречающиеся в строке `from_mask`, на соответствующие символы из `to_mask`. Для корректной работы функции строки `from_mask` и `to_mask` должны иметь одинаковую длину или строка `from_mask` должна быть длиннее, чем `to_mask`. Если `from_mask` длиннее, чем `to_mask`, и в процессе обработки строки `str` обнаружатся символы, соответствующие одному из символов `from_mask`, и при этом им не найдется соответствия в `to_mask`, то такие символы будут удалены из строки `str`. Если передать `from_mask` или `to_mask` значение, равное `NULL`, то функция возвратит значение `NULL`. Сравнение производится с учетом регистра.

Примеры:

```
SELECT TRANSLATE('Test 12345', 'e2', 'E!') X1,
TRANSLATE('Test 12345', 'e234', 'E') X2;
```

X1	X2
TEst 1!345	TEst 15

Данная функция удобна для решения ряда практических задач, связанных с перекодировкой символов или с поиском запрещенных символов. Например, необходимо проанализировать пароль и выяснить, содержит ли он хотя бы одну цифру. Реализация данной проверки при помощи `TRANSLATE` имеет вид:

```

CREATE OR REPLACE FUNCTION is_password_correct(
    password IN char)
    RETURNS int AS $is_password_correct$
BEGIN
    IF TRANSLATE(password, '0123456789', '*') = password THEN
        RAISE WARNING
            'Пароль' должен содержать хотя бы одну цифру!';
        RETURN 0;
    END IF;

    RAISE INFO 'Корректный' пароль!';
    RETURN 1;
END;
$is_password_correct$ LANGUAGE plpgsql;

```

Другой пример: идет подготовка числа к его преобразованию в NUMBER. Необходимо заменить разделители десятичных знаков ',' на '.' и удалить пробелы. Реализация данной операции при помощи TRANSLATE имеет вид:

```

SELECT TRANSLATE('123 455,23', '., ', '..') X1,
TRANSLATE('-123 455.23', '., ', '..') X2;

```

X1	X2
123455.23	-123455.23

Функция SUBSTR

Функция SUBSTR(str, m [,n]) возвращает фрагмент строки str, начиная с символа m длиной n символов. Длину можно не указывать – в этом случае возвращается строка от символа m и до конца строки str. Нумерация символов идет с 1. Если указать m равное 0, то копирование все равно начнется с первого символа. Задание отрицательного значения m приводит к тому, что символы отсчитываются от конца строки, а не от начала. Задание значений m, превышающих по абсолютному значению длину строки, приводит к тому, что функция возвращает NULL.

Пример:

```
SELECT SUBSTRY(' по па была собака', 13) X1,
SUBSTRY(' по па была собака', -6) X2,
SUBSTRЭто(' тестовый текст', 5, 8) X3,
SUBSTRY(' по па была собака', 150) X4;
```

X1	X2	X3	X4
собака	собака	текстовый	NULL

Функция *LENGTH*

Функция `LENGTH(str)` возвращает длину строки `str` в символах. Для пустой строки функция вернет 0, а для значения `NULL` – `NULL`.

Пример:

```
SELECT LENGTHУ(' по па была собака') X1,
LENGTH('') X2,
LENGTH(NULL) X3;
```

X1	X2	X3
18	0	NULL

Функция *ASCII*

Функция `ASCII(str)` возвращает ASCII-код первого символа строки `str` в случае применения кодировок ASCII и UTF-8.

Пример:

```
SELECT
ASCII('Test') X1,
ASCIITест('') X2;
```

X1	X2
84	1058

Функция *CHR*

Функция *CHR*(*n*) возвращает символ по его коду.

Пример:

```
SELECT
CHR(84) X1,
CHR(1058) X2,
CHR(80) X3,
CHR(1060) X4;
```

X1	X2	X3	X4
T	T	P	Φ

5.6 Функции работы с датой и временем

В данном подразделе речь пойдет о функциях работы с датой и временем, а также функциями преобразования типов для даты. Для хранения даты и времени в PostgreSQL предусмотрен специальный тип *timestamp*. С физической точки зрения это дробное число, целая часть которого хранит количество дней с некоторой базовой даты, а дробная – время. Это позволяет совершать над датами арифметические операции – сложение и вычитание.

Функция *NOW*

Это одна из самых часто употребляемых функций, она возвращает текущую дату и время по часам сервера.

Пример:

```
SELECT NOW();
```

NOW
2016-09-05 21:31:10.095806+04

Функция *JUSTIFY_INTERVAL*

Функция `JUSTIFY_INTERVAL(interval)` преобразует интервал (тип `interval`), указанный в виде строки в соответствующее значение типа `timestamp`.

Пример:

```
SELECT NOW() D1,
       NOW() + JUSTIFY_INTERVAL('30 DAYS 1 HOUR 2 MINUTE') D2,
       NOW() - JUSTIFY_INTERVAL('30 DAYS 1 HOUR 2 MINUTE') D3;
```

D1	D2	D3
2016-09-05 21:39:08...+04	2016-10-05 22:41:08...+04	2016-08-05 20:37:08...+04

Функция *DATE_TRUNC*

Функция `DATE_TRUNC(timestamp)` используется для обрезки даты или интервала (`DATE_TRUNC(interval)`) до определенной точности.

Пример:

```
SELECT
DATE_TRUNC('HOUR', NOW()) D1,
DATE_TRUNC('DAY', NOW()) D2,
DATE_TRUNC('MONTH', NOW()) D3;
```

D1	D2	D3
2016-09-05 22:00:00+04	2016-09-05 00:00:00+04	2016-09-01 00:00:00+04

Получение начала и конца месяца

Для получения дат соответствующих началу и концу месяца необходимо использовать функции `DATE_TRUNC` и `JUSTIFY_INTERVAL`.

Пример:

```
SELECT
DATE_TRUNC('MONTH', NOW()) D1,
DATE_TRUNC('MONTH', NOW())
+ JUSTIFY_INTERVAL('1 MONTH - 1 DAY') D2;
```

D1	D2
2016-09-01 00:00:00+04	2016-09-30 00:00:00+04

Данные функции также могут быть использованы для определения количества дней в заданном месяце.

Например:

```
SELECT NOW() D1,
TO_CHAR(DATE_TRUNC('MONTH', NOW())
+ JUSTIFY_INTERVAL('1 MONTH - 1 DAY'), 'DD') D2;
```

D1	D2
2016-09-05 21:51:19.727702+04	30

Функция AGE

Функция AGE([end_date,]start_date) возвращает разницу между датами, обозначенными как end_date и start_date. Если параметр end_date опущен, то используется значение глобальной переменной CURRENT_DATE, которая содержит текущую дату (тип date, дата без времени).

Пример:

```
SELECT
CURRENT_DATE D1,
AGE(MAKE_TIMESTAMP(2013, 7, 15, 8, 15, 23.5)) D2,
AGE(MAKE_DATE(2016, 3, 3),
MAKE_TIMESTAMP(2013, 7, 15, 8, 15, 23.5)) D3;
```

D1	D2	D3
2016-09-05	3 years 1 mon 20 days 15:44:36.5	2 years 7 mons 18 days 15:44:36.5

В данном примере также используются функции MAKE_TIMESTAMP и MAKE_DATE, которые возвращают значения типов timestamp и date соответственно.

Функция EXTRACT

Функция EXTRACT(field FROM timestamp) извлекает элемент даты field из значения типа timestamp. Также существует функ-

ция `EXTRACT(field FROM interval)` для работы со значениями типа `interval`.

Пример:

```
SELECT
NOW() D1,
EXTRACT(MONTH FROM NOW()) D2,
EXTRACT(YEAR FROM NOW()) D3,
EXTRACT(MINUTE FROM NOW()) D4;
```

D1	D2	D3	D4
2016-09-05 22:37:54.6046+04	9	2016	37

Количество месяцев между двумя датами

Функции `EXTRACT`, `AGE` и `DATE_TRUNC` могут быть использованы для нахождения количества месяцев между двумя датами.

Пример:

```
SELECT
NOW() D1,
EXTRACT(MONTH FROM AGE(DATE_TRUNC('MONTH', NOW()),
DATE_TRUNC('MONTH', MAKE_DATE(2016, 3, 3)))) D2;
```

D1	D2
2016-09-05 22:41:08.68334+04	6

Функция TO_DATE

Функция `TO_DATE(str, mask)` преобразует строку `str` в дату. Преобразование ведется по маске `mask`.

Пример:

```
SELECT
TO_DATE('05 Dec 2000', 'DD Mon YYYY') D1,
TO_DATE('15.12.2000', 'dd.mm.yy') D2;
```

D1	D2
2000-12-05	2000-12-05

Функция **TO_CHAR**

Функция `TO_CHAR(date, mask)` преобразует дату `date` в символьную строку в соответствии с заданной маской.

Пример:

```
SELECT NOW() D1,  
TO_CHAR(NOW(), 'DD.MM.YY HH24:MI') D2;
```

Например:

D1	D2
2016-09-05 22:49:37.044199+04	05.09.16 22:49

Некоторые форматные маски представлены в таблице [5.1](#). Полный список масок и их описание представлен в [\[6\]](#).

Таблица 5.1

Маски для форматирования даты и времени

Маска	Назначение
CC	Номер века
YYYY, или YY	Четыре или последние две цифры номера года
Q	Номер квартала
MONTH, или MON, или MM	Строковое или числовое представление номера месяца
WW	Номер недели в году
W	Номер недели в месяце
DDD	Номер дня в году
DD	Номер дня в месяце
DAY, или DY, или ID	Номер дня недели
HH, или HH12, или HH24	Час
MI	Минута

5.7 Контрольные вопросы

1. Перечислите основные функции PostgreSQL для работы с числами.
2. Перечислите основные тригонометрические функции PostgreSQL.

3. Перечислите основные функции PostgreSQL для работы со строками.
4. Перечислите основные функции PostgreSQL для работы с датой и временем.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

Методические указания к занятиям
по учебной дисциплине ЕН. 01 Элементы высшей математики

Методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины ЕН. 01 «Элементы высшей математики». В методических указаниях приведена структура и содержание занятий, предусмотренных рабочей программой дисциплины.

Разработчик: Мелешко С.В., преподаватель

учебно-методического отдела

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания предназначены для студентов и служат пособием при работе на занятиях, предусмотренных рабочими учебными планами специальности, запланированных в рабочих программах.

Содержание и объем занятий по дисциплине соответствует требованиям ФГОС СПО, реализуемого в пределах ППССЗ с учетом профиля профессионального образования.

Практические задания направлены на подтверждение теоретических положений и формирование учебных умений, они составляют важную часть теоретической подготовки по освоению дисциплины.

В данных методических указаниях приведены тема, цель, сведения из теории, практико-ориентированные задания, вопросы для закрепления, задания для самостоятельного решения, домашнее задание.

Занятие 1

Тема: Решение задач с комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексного числа.

Цель: Научиться изображать комплексные числа на плоскости и выполнять действия над ними

1.Сведения из теории:

Определение1. Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом число a называется *действительной частью* числа z ($a = \operatorname{Re} z$), а b – *мнимой частью* ($b = \operatorname{Im} z$).

Если $a = \operatorname{Re} z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = \operatorname{Im} z = 0$, то число z будет действительным.

Определение2. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются *комплексно сопряженными*.

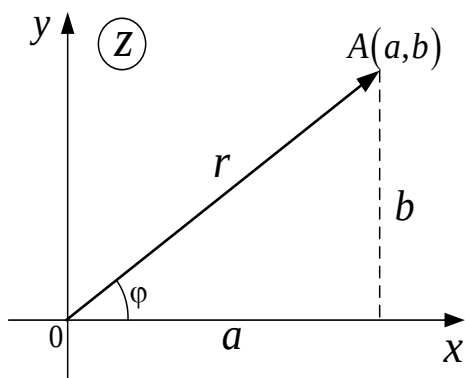
Определение3. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:
 $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$;

Определение4. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.
 $a = b = 0$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Известно, что отрицательные числа были введены в связи с решением линейных уравнений с одной переменной. В конкретных задачах отрицательный ответ истолковывался как значение направленной величины (положительные и отрицательные температуры, передвижения в противоположных направлениях, прибыль и долг и т.п.). Однако еще в XVI веке многие математики не признавали отрицательных чисел. Только с введением координатной прямой и координатной плоскости отчетливо проявился смысл отрицательных чисел, и они стали такими же «равноправными» и понятными, как и натуральные числа. Аналогично обстоит дело с комплексными числами. Смысл их отчетливо проявляется при введении их геометрической интерпретации.

Всякое комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить на плоскости Ox



в виде точки $A(a, b)$ с координатами a и b . Плоскость на которой изображаются комплексные числа, называется **плоскостью комплексного переменного z** (на плоскости ставить символ z). Ось Oy называют мнимой осью, а ось Ox действительной осью.

Соединив точку $A(a, b)$ с началом координат, получим вектор $\overline{OA}$. В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением комплексного числа $z = a + ib$ вектор $\overline{OA}$.

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек координатной плоскости. Подобным образом было установлено соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой.

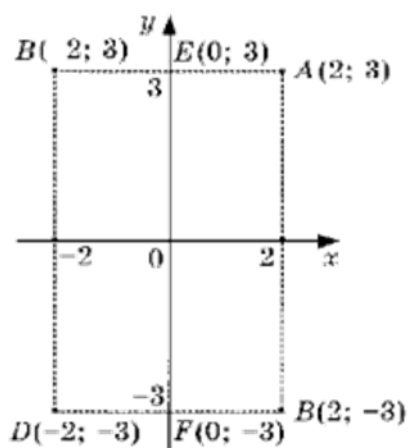


Рис. 1

На рисунке 1 изображена координатная плоскость. Числу $2 + 3i$ соответствует точка $A(2, 3)$ плоскости; числу $2 - 3i$ – точка $B(2, -3)$; числу $-2 + 3i$ – точка $C(-2, 3)$; числу $-2 - 3i$ – точка $D(-2, -3)$. Числу $3i$ соответствует точка $E(0, 3)$; а числу $-3i$ – точка $F(0, -3)$. Итак, каждому комплексному числу соответствует единственная точка координатной плоскости и, наоборот, каждой точке координатной плоскости соответствует единственное комплексное число,

при этом двум различным комплексным числам соответствуют две различные точки координатной плоскости. Ясно, что действительным числам $x + 0i$ соответствуют точки оси абсцисс, а чисто мнимым числам $0 + yi$, где $y \neq 0$ – точки оси ординат. Поэтому ось Oy называют мнимой, а ось Ox – действительной. Сопреженным комплексным числам $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ соответствуют точки, симметричные относительно оси абсцисс (рис. 2).

2. Модуль и аргумент комплексного числа.

Модулем комплексного числа $|z|$ называется длина радиус-вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначают буквой r .

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Если комплексное число z изображается точкой оси абсцисс (т.е. является действительным числом), то его модуль совпадает с абсолютным значением. Все комплексные числа, имеющие модуль 1, изображаются точками единичной окружности – окружности с центром в начале системы координат, радиуса 1 (рис. 4).

Угол φ между положительной полуосью Ox и лучом Oz называют аргументом комплексного числа $z = x + iy$ (рис. 3).

Сопряженные комплексные числа $z = x + iy$ и $z = x - iy$ имеют один и тот же модуль $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и аргументы, отличающиеся знаком: $\varphi = -\varphi$

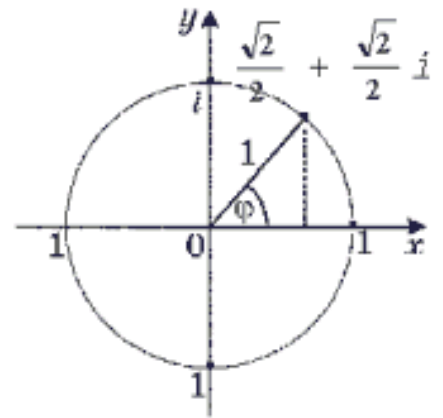


Рис. 4

В отличие от модуля аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Аргумент одного и того же комплексного числа может иметь бесконечно много значений, отличающихся друг от друга на число, кратное 360° . Например, число z (рис. 3) имеет модуль r , аргумент же этого числа может принимать значения j ; $\varphi + 360^\circ$; $\varphi + 720^\circ$; $\varphi + 1080^\circ$; ... или значения $\varphi - 360^\circ$; $\varphi - 720^\circ$; $\varphi - 1080^\circ$; ... Данное значение модуля r и любое из приведенных выше значений аргумента определяют одну и ту же точку плоскости, соответствующую числу z .

Пример: Найти модуль и аргумент для комплексного числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4 \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -60^\circ$$

3. Арифметические действия над комплексными числами.

Правило сложения и вычитания комплексных чисел.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Например:

$$(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3 + 1)i = 7 + 4i;$$

$$(-2 + 3i) + (1 - 8i) = (-2 + 1) + (3 + (-8))i = -1 - 5i;$$

$$(-2 + 3i) + (1 - 3i) = (-2 + 1) + (3 + (-3))i = -1 + 0i = -1.$$

Вычитание комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению, и выполняется по формуле:

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

Например:

$$(5 - 8i) - (2 + 3i) = (3 - 2) + (-8 - 3)i = 1 - 11i;$$

$$(3 - 2i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + ((-2) - (-2))i = 2 + 0i = 2.$$

Правило умножения комплексных чисел.

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Таким образом операции сложения, вычитания и умножения над комплексными числами осуществляются так, как будто мы выполняем операции над многочленами, однако с условием, что $i^2 = -1$.

Действительно: $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i + y_1y_2i^2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$.

Например, $(-1 + 3i)(2 + 5i) = -2 - 5i + 6i + 15i^2 = -2 - 5i + 6i - 15 = -17 + i$; $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 + 9 = 13$.

Из второго примера следует, что результатом сложения, вычитания, произведения двух комплексных чисел может быть число действительное. В частности, при умножении двух комплексных чисел $x + yi$ и $x - yi$, называемых сопряженными комплексными числами, в результате получается действительное число, равное сумме квадратов действительной части и коэффициента при мнимой части. Действительно:

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2i^2 = x^2 + y^2$$

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число.

Например: $5i \cdot 3i = 15i^2 = -15$; $-2i \cdot 3i = -6i^2 = 6$.

Деление комплексных чисел.

Деление комплексного числа $x_1 + y_1i$ на комплексное число $x_2 + y_2i \neq 0$ определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

$$\frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i$$

Формула теряет смысл, если $x_2 + y_2i = 0$, так как тогда $x_2^2 + y_2^2 = 0$, т. е. деление на нуль и во множестве комплексных чисел исключается.

Обычно деление комплексных чисел выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Например,

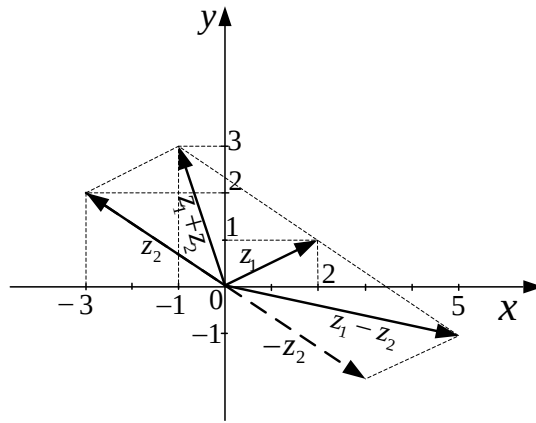
$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1+1} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = i;$$

$$\frac{3+2i}{2+i} = \frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8+i}{2^2+1^2} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i.$$

ПРИМЕР 1. $z_1 = 2 + i$ $z_2 = -3 + 2i$

Найти: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ (геометрически и алгебраически), $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^2 .

Решение



$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (-3 + 2i) = -1 + 3i,$$

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (-3 + 2i) = 5 - i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(-3 + 2i) = -6 + 4i - 3i + 2i^2 = -6 + i - 2 = -8 + i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{-3 + 2i} = \frac{(2 + i)(-3 - 2i)}{(-3 - 2i)(-3 - 2i)} = \frac{-6 - 4i - 3i - 2i^2}{(-3)^2 + (2)^2} = \frac{-4 - 7i}{13} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i,$$

$$z_1^2 = (2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i.$$

ПРИМЕР 2. Решить уравнение $x^2 + 2x + 9 = 0$.

Решение

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 36 = -32 = 32i^2, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{32i^2}}{2} = \frac{-2 + 4\sqrt{2}i}{2} = -1 + 2\sqrt{2}i,$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{32i^2}}{2} = \frac{-2 - 4\sqrt{2}i}{2} = -1 - 2\sqrt{2}i.$$

Ответ: $x_1 = -1 + 2\sqrt{2}i$, $x_2 = -1 - 2\sqrt{2}i$.

Задания для самостоятельного решения

1 вариант

2 вариант

1. Найдите $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2 - 8i$

1. Найдите $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$,

$$z_2 = -4 + 2i$$

2. Найдите модуль к.ч. $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

2. Найдите модуль к.ч. $z = 3 - 4\sqrt{5}i$

3. Найдите $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 6 - 2i$,
 $z_2 = 3 - 4i$

3. Найдите $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 1 + 2i$,
 $z_2 = 3 + i$

4. Изобразите число на комплексной

4. Изобразите число на комплексной

плоскости $z = 2 + 4i$

плоскости $z = -3 + 4i$

5. Вычислите: $(-5x + 4y^2i) \cdot (5x - 4y^2i)$

5. Вычислите: $(6x^3 + yi) \cdot (-6x^3 + yi)$

Вопросы для закрепления:

1. Какие числа называются комплексными и мнимыми?
2. Как геометрически представляется комплексное число?
3. Что называется модулем комплексного числа?
4. Как выполняется сложение и вычитание комплексных чисел?

Как выполняется умножение комплексных чисел?

Практическое занятие 2,3

Тема: Матрицы и действия с ними. Определитель матрицы.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

Сведения из теории

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись «матрица B имеет размер $m \times n$ » означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ имеет размер } 2 \times 3. \text{ Далее, } b_{ij} \text{ - обозначение элемента,}$$

стоящего на пересечении i -й строки и j -го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на i -ю строку матрицы A используют обозначение A_i , при ссылке на j -й столбец – обозначение A^j .

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы A (размера $n \times n$) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной*. Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной*. Наконец, квадратная

матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной, E – единичной.

Матрицы A, B называются *равными* ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k* , необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B одной размерности*, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти $2A-B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу A на число «2», затем матрицу B на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Произведение AB можно определить только для матриц A размера $m \times n$ и B размера $n \times r$, при этом $AB=C$, матрица C имеет размер $m \times r$, и ее элемент

c_{ij} находится как скалярное произведение i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B : $c_{ij} = A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,p$). Фактически необходимо каждую строку матрицы A (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы B (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы A 3×2 , матрицы B 2×2 . Поэтому произведение AB найти можно, произведение BA – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1,3) & (0;4)(-2;4) \\ (2;1)(1,3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице A размера $m \times n$, называется матрица A^T размера $n \times m$, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A , B называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы A в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение $r(A)$. Так, в рассмотренном выше примере 3.4 $r(A)=3$, $r(B)=2$. Можно доказать, что ранг матрицы A (размера $m \times n$) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы A размера 2×3 $r(A) \leq 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от

выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице B можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12} , а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3 = -C_2$):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3 \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T;$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$

6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T;$

7) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство $(AB)C = A(BC)$ для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Вычисление определителей. Определитель матрицы A размера 2×2 (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или определителем третьего порядка, называется число, которое находится по

формуле $\Delta_3 = |A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарриуса). Покажем это на схеме:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 1 =$

$$= 0 + 4 - 12 - 0 + 10 - 4 = -2.$$

Определитель матрицы A размера 3×3 (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу «*раскрытие определителя по первой строке*»:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= 2(-1 \cdot 0 - 2 \cdot 5) + 3(4 \cdot 0 - 2 \cdot 3) - 1(4 \cdot 5 - (-1) \cdot 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$$

Вычислить определители:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; & 2) \begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}; & 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ 4) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}; & 5) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}; & 6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ 7) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; & 8) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \end{array}$$

Тема: Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса.

Сведения из теории: Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера

[illegible]
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Формулы Крамера для нахождения решения системы алгебраических линейных уравнений имеют вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

При решении системы методом Крамера возможны случаи:

- если $\Delta \neq 0$, то система совместна и единственное решение системы выражается формулами Крамера;

- если $\Delta = 0$ и все $\Delta_{x_j} = 0$, то система совместна и имеет множество решений; тогда свободные $(n-r)$ неизвестных (где r – ранг матрицы) выбирается произвольно, а главные (базисные) r неизвестных определяются единственным образом через свободные неизвестные;

- если $\Delta = 0$ и хотя бы один $\Delta_{x_j} \neq 0$, то система несовместна и решений не имеет.

1. Установить, что система имеет единственное решение, найти его.

$$\begin{cases} x + y - z = 36 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7. \end{cases}$$

Решение: Найдём определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta \neq 0, \text{ следовательно, система имеет}$$

единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 36 & 1 & -1 \\ 13 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 + 7 - 13 - 7 - 36 - 13 = -98,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 36 & -1 \\ 1 & 13 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 13 - 36 - 7 - 13 - 7 - 36 = -86,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & 13 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 36 - 13 - 36 - 13 - 7 = -40,$$

$$x = \frac{98}{4} = 24,5; \quad y = \frac{86}{4} = 21,5; \quad z = \frac{40}{4} = 10.$$

ОТВЕТ: (24,5; 21,5; 10)

Предположим, что в системе (1) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

[illegible]

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$). Умножая второе уравнение на подходящие числа $(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \dots, \dots, -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, $\dots$, m -му уравнению

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} \neq 0$, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2) , (-3) , (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13,5 & 9 & 4,5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array} \right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на $13,5/8 = 27/16$ и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3 . Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ -8x_3 + x_4 = 6, \\ -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6 + 2}{-8} = -1$; из второго $x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \frac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + (-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы $(1; 2; -1; 2)$.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x + y - z = 36 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + y + z = 5 \\ 6x + 3y + 4z = 1 \\ 7x + 2y + 5z = 2 \end{cases}$$

2. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Вопросы для закрепления:

1. В чем заключается метод Крамера при решении систем линейных уравнений?

2. Алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Домашнее задание: Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

Практическое занятие 6

Тема: Решение матричных уравнений.

Цель: Приобрести навыки решения матричных уравнений.

Сведения из теории:

Две системы уравнений называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m \times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n \times 1}$,

их произведение $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец.

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (1). На основании определения равенства матриц систему (1) можно записать в виде:

$$AX = B. \quad (2)$$

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (1) при $m = n$ предположим, что квадратная матрица системы $A_{n \times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1} .

Умножая слева обе части матричного равенства (2) на матрицу A^{-1} , получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец:

$$X = A^{-1}B$$

Пример 1. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде:

$$AX = B \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

Получим A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A}^T = \frac{1}{-30} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Находим вектор X .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; **Решение.** а) Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид $AX=B$. Найдем определитель $|A|=5$. Так как $|A| \neq 0$, матрица A – невырожденная, и существует обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

Задания для самостоятельного решения.

Решить систему уравнений матричным методом

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Домашнее задание.

Практическое занятие 7

Тема: Графический метод решения задачи линейного программирования

Цель: сформировать умения решать задачи линейного программирования графическим методом

Сведения из теории

Геометрический смысл решения неравенств и систем неравенств

Пусть дана система линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \end{cases}$$

О₁. Уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ определяет на плоскости Ox_1x_2 прямую, которая разбивает эту плоскость на две полуплоскости, каждая из которых лежит по одну сторону от прямой. Сама прямая называется граничной и принадлежит обеим полуплоскостям.

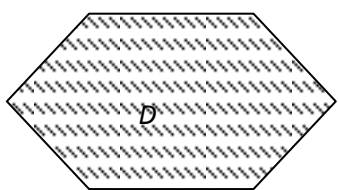
О₂. Координаты точек лежат в одной полуплоскости и удовлетворяют неравенству $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$, а координаты точек, лежащих в другой полуплоскости удовлетворяют неравенству: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$.

Аналогично для второго неравенства.

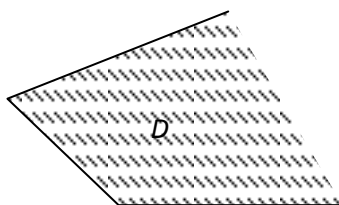
О₃. В системе неравенств удовлетворяют множество точек (x_1, x_2) , лежащих в пересечении полуплоскостей, заданных неравенствами системы.

О₄. Пересечение плоскостей есть некоторая многоугольная область D , которая называется областью решения системы неравенств.

О₅. Если область D ограничена, то её называют многоугольником решений системы.

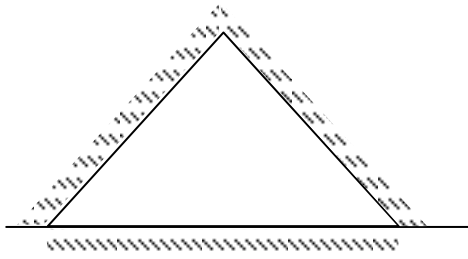


замкнутая ограниченная
область

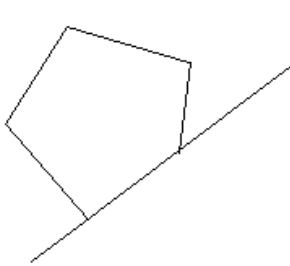


открытая неограниченная
область решений

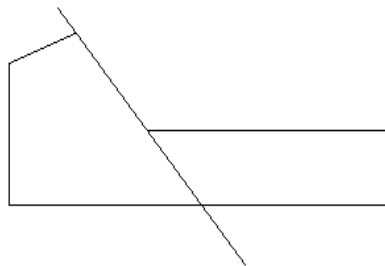
О₆. Если система неравенств противоречива, то область D – пустое множество $\emptyset$.



О₇. Множество точек называется выпуклым, если оно вместе со своими двумя точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.



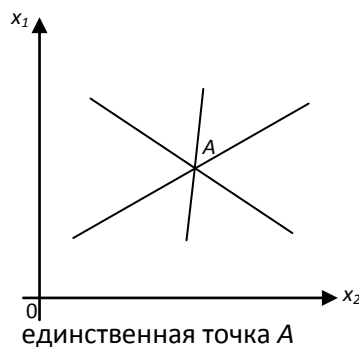
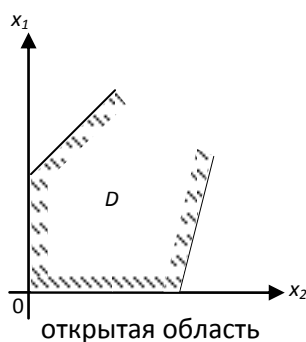
выпуклый



невыпуклый

Замечания.

При построении области решений системы неравенств могут встречаться и другие случаи.



Геометрический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными:

Давая C различные числовые значения, будем получать прямые параллельные l_0 и перпендикулярные вектору $\bar{N}$. Значит, уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ определяет на плоскости семейство параллельных прямых.

1. Решением задачи на минимум является первая точка, в которой прямая l встречается с областью D при перемещении прямой l_0 в положительном направлении вектора $\bar{N}$.

$Z(E) - \min$ для первого случая

$Z(A) - \min$ для второго случая

2. Решением задачи на максимум является последняя точка, в которой прямая l встречается с областью D .

$Z(C) - \max$ для первого случая

Во втором случае задача на $\max$ решений не имеет, т.к. Z не ограничена сверху.

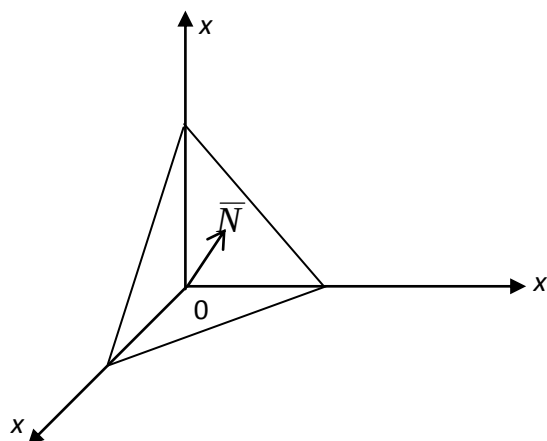
Аналогично может быть не ограничено снизу, тогда на минимум задача решений не имеет.

Замечание.

1. Если прямая l при перемещении совпадает с отрезком BC , то все точки этого отрезка дают решение задачи на максимум (l параллельна BC). Следовательно, решений на максимуме бесчисленное множество.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Аналогично, можно показать решение задачи линейного программирования в случае 3-х переменных.



Задача об использовании ресурсов.

При производстве двух видов продукции A и B предприятием используется четыре вида сырья. Расход каждого вида сырья на единицу продукции A - 1, 2, 0, 1 единиц соответственно; для продукции B - 3, 1, 1, 0. Запасы сырья составляют 18, 16, 5, 7 единиц. Прибыль от производства продукции A - 2 усл. ед., продукции B - 3 усл. ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу графически.

Решение.

Составим экономико-математическую модель задачи. Пусть x_1 - количество единиц продукции A , x_2 - количество единиц продукции вида B .

Так как на первый вид продукции необходима 1 единица первого сырья, а на второй - 3 единицы и запасы этого сырья составляют 18 единиц, получаем первое неравенство системы. Рассуждая аналогично, получаем следующую систему неравенств и целевую функцию:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 7 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

Строим область допустимых решений задачи. В прямоугольной декартовой системе координат строим прямые, соответствующие системе ограничений.

$$l_1: x_1 + 3x_2 = 18$$

x_1	0	18
x_2	6	0

$$l_2: 2x_1 + x_2 = 16$$

x_1	0	8
x_2	16	0

$$l_3: x_2 = 5 \text{ (параллельна } OX_1); \quad l_4: x_1 = 7 \text{ (параллельна } OX_2)$$

$$l_5: x_1 = 0 \text{ (} OX_2); \quad l_6: x_2 = 0 \text{ (} OX_1)$$

Каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости. Находим, какие из полуплоскостей являются областями решений для каждого неравенства. Для этого достаточно координаты какой либо точки, не лежащий на прямой, подставить в неравенство. Если получили верное неравенство, то полуплоскость является областью решений (на чертеже указываем

стрелками). Пересечение всех полуплоскостей и является областью допустимых решений D .

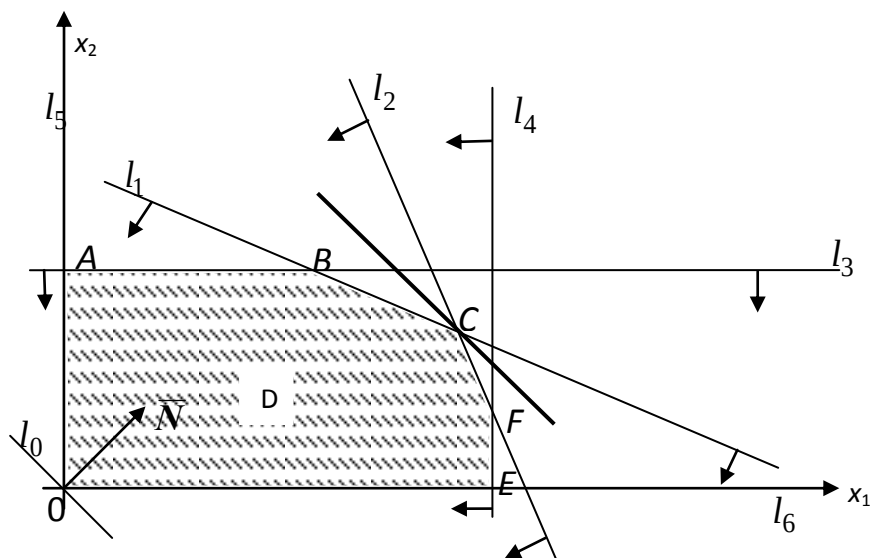
Строим нормальный вектор и прямую l_0 . Так как задача на максимум, то перемещаем ее в направлении вектора до пересечения с самой крайней точкой области и находим ее координаты.

$$\bar{N} = (2; 3); \quad Z_{\max} = r(C); \quad B: l_1 \cap l_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases} \quad C(6; 4)$$

$$-5x_2 = -20; \quad x_2 = 4$$

$$Z_{\max} = Z(6; 4) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 12 + 12 = 24$$



Задания для самостоятельного решения.

1. При производстве двух видов краски A и B предприятием используется три компонента. Расход каждого вида компонента на единицу продукции и запасы компонентов приведены в таблице. Прибыль от производства краски вида A - 3 усл. ед., краски вида B - 2 усл. ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу графически.

Компоненты	Расход компонента на единицу продукции		Запасы компонентов
	A	B	
1	1	2	6
2	2	1	8
3	0	1	2
Прибыль	3	2	

2. В рационе животных используется два вида кормов. Животные должны получать три вида веществ. Составить рацион кормления, обеспечивающий минимальные затраты и решить задачу графически. Данные приведены в таблице:

Питательные вещества	Содержание питательного вещества в единице корма		Необходимое количество питательных веществ
	А	В	
1	2	1	12
2	1	1	10
3	2	3	24
Цена	60	60	

Практическое занятие 8

Тема: Экстремум функции нескольких переменных

Цель: Сформировать умение находить экстремум функции двух переменных.

Частной производной по x функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения по x $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю и обозначается z'_x , $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$\text{По определению } z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Значение частной производной зависит от точки, в которой она вычисляется. Поэтому частная производная есть функция точки (x, y) , т.е. также является функцией 2-х переменных.

Частные приращения и производные функции n переменных ($n > 2$) определяются и обозначаются аналогично.

Из определения частных производных следует, что при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Все правила и формулы дифференцирования для функции одной переменной сохраняются для частных производных функции нескольких переменных.

Решение типовых примеров

1. Найти частные производные функций:

а) $z = e^{x^2+y^2}$;

Решение

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

б) $z = y \ln(x^2 - y^2)$.

Решение

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Частные производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Частные производные от частных производных $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ называются частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$.

Каждая частная производная первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеет две частные производные. Таким образом, получаем четыре частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Производные $f''_{xy}(x, y)$; $f''_{yx}(x, y)$ называются смешанными производными второго порядка и $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Пример. Найти все частные производные первого и второго порядков от функции $z = x^3 - x^2y - y^3$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 - 3y^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 2xy) = 6x - 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - 2xy) = -2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (-x^2 - 3y^2) = -2x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (-x^2 - 3y^2) = -6y.$$

Экстремум функции.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную и непрерывную в некоторой области D .

Функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный максимум (минимум) в точке $M(x_0, y_0)$, если неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) < f(x, y)$) имеет место во всех точках $M(x, y) \neq M_0$.

Необходимые условия экстремума:

Если дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум, то в этой точке обе частные производные первого порядка равны нулю, то есть

$$f'_x(x_0; y_0) = 0, \quad f'_y(x_0; y_0) = 0.$$

Точка $(x_0; y_0)$ называется стационарной точкой функции $f(x, y)$, если $df(x_0, y_0) = 0$. Пусть $(x_0; y_0)$ - стационарная точка функции $f(x, y)$, обозначим $A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$.

Достаточные условия экстремума:

Если $AC - B^2 > 0$, и $A < 0$, то $(x_0; y_0)$ - точка максимума.

Если $AC - B^2 > 0$, и $A > 0$, то $(x_0; y_0)$ - точка минимума.

Если $AC - B^2 < 0$, то $(x_0; y_0)$ - не является точкой экстремума.

Если $AC - B^2 = 0$, то точка $(x_0; y_0)$ может как быть, так и не быть точкой экстремума, требуется дополнительное исследование.

Решение типовых примеров

1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6.$$

Решение

Область определения функции $D(f)$ - плоскость Oxy , $f(x, y)$ - дифференцируема в каждой точке $\dot{I} (x; y) \in D(f)$.

Определим стационарные точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8xy + 24y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 + 24x + 2y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x + 3) = 0, \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0. \end{cases}$$

$$y = 0; x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = -2,$$

$$x = -3, y = 2.$$

Получили три стационарные точки: $M_1(-4, 0)$, $M_2(-2, 0)$, $M_3(-3, 2)$.

Эти точки исследуем на достаточность условий экстремума:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8x + 24, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Для каждой точки вычислим соответствующие A, B, C .

$M_1(-4; 0)$: $A_1 = 0$, $B_1 = -32 + 24 = -8$, $C_1 = 2$, $A_1C_1 - B_1^2 = -64 < 0$, то есть $M_1(-4; 0)$ не является точкой экстремума.

$M_2(-2; 0)$: $A_2 = 0$, $B_2 = -16 + 24 = 8$, $C_2 = 2$, $A_2C_2 - B_2^2 = -64 < 0$, то есть $M_2(-2; 0)$ не является точкой экстремума.

$M_3(-3;2): A_3=16, B_3=0, C_3=2, A_3C_3-B_3^2=32>0$ при этом $A>0$. Вывод: $M_3(-3;2)$ точка локального минимума функции $f(x,y)$, $f(-3;2)=-10$.

Задания для самостоятельного решения.

Исследовать на экстремум функции:

1. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

2. $z = x^3 + y^3 - 9xy$

3. $z = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 2xy - 5x - y + 2$

Практическое занятие 9

Тема: Нахождение неопределённого интеграла с помощью таблиц, а также используя его свойства.

Цель: Выработать практические умения в интегрировании табличных неопределённых интегралов. Приобрести навыки при решении неопределённых интегралов, используя свойства.

Сведения из теории:

В дифференциальном исчислении решалась задача, где по данной функции $y = f(x)$ находилась ее производная или дифференциал.

В интегральном же исчислении решается обратная задача: по дифференциалу данной функции находится сама функция. Этот процесс называется **интегрированием**.

Первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется функция $F(x)$, производная которой в каждой точке отрезка равна $f(x)$, т.е:

$$F'(x) = f(x)$$

Теорема. *Две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$, определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

Прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ все возможные постоянные значения C , можно получить все первообразные для данной функции $f(x)$, т.е. $F(x) + C$ - это есть совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от этой функции и обозначается: $\int f(x) dx = F(x) + C$, где

$f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x) dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$; C - постоянная интегрирования;

x - переменная интегрирования; $\int$ - знак интеграла.

Действие нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется **интегрированием** данной функции.

Основные свойства неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x)$$

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$

На этом свойстве основывается проверка правильности нахождения неопределенного интеграла.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого:

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int A \cdot f(x) dx = A \int f(x) dx, \quad A \neq 0$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

6. Свойство *инвариантности*: всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо x любой дифференцируемой функции от x .

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u) du = F(u) + C$. На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C$	11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
5. $\int e^u du = e^u + C$	15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
6. $\int \cos u du = \sin u + C$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$	17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C$
8. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$
9. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$	
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	

Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C$$

$$(\ln |\sin u| + C)' = \frac{(\sin u)'}{\sin u} = \frac{\cos u}{\sin u} = \operatorname{ctg} u$$

Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

Непосредственное интегрирование функций

1. Интегрирование по таблице.

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

2. Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

3. Непосредственное интегрирование.

- Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ если } u = \varphi(x), \text{ то } \int f(u) du = F(u) + C$$

- Добавление постоянного слагаемого под знак дифференциала.

При любой постоянной a будет выполняться равенство: $d(x+a) = dx$.
Значит, и наоборот $dx = d(x+a)$ и поэтому $\boxed{\int f(x) dx = \int f(x) d(x+a)}$, т.е. под знак дифференциала можно ввести любое постоянное слагаемое.

- Введение под дифференциал постоянного множителя.

Если $a = \text{const}$, то $d(ax) = adx$. Отсюда при $a \neq 0$ - $dx = \frac{1}{a} d(ax)$.

Следовательно, $\boxed{\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) d(ax)}$, т.е. под знак дифференциала можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

- Интеграл от дроби, числитель которой является производной знаменателя, равен логарифму знаменателя.

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C}$$

Пример 1. $\int \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} + 1 \right) dx$

Решение:

$$\begin{aligned} \int \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} + 1 \right) dx &= 2 \int x^3 dx - 3 \int x^{2/3} dx + 4 \int x^{-3} dx + \int dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + x + C = \frac{x^4}{2} - \frac{9}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^2} + x + C \end{aligned}$$

Пример 2. $\int 3^x \cdot e^{2x} dx$

Решение:

$$\int 3^x \cdot e^{2x} dx = \int (3e^2)^x dx = \frac{(3e^2)^x}{\ln(3e^2)} + C$$

Пример 3. $\int \frac{\sin 2x}{4 + \sin^2 x} dx$

Решение:

$$\int \frac{\sin 2x}{4 + \sin^2 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{4 + \sin^2 x} dx = \int \frac{(4 + \sin^2 x)'}{4 + \sin^2 x} dx = \ln |4 + \sin^2 x| + C$$

Пример 4. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$

Решение

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2} \ln |x^2+4x+5| + C$$

Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1) $\int x^3 dx,$	7) $\int \sqrt[5]{x^4} dx,$
2) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2}},$	8) $\int 10x dx,$
3) $\int -\frac{dx}{3}.$	9) $\int (2x^2 - 3x - 7) dx,$
4) $\int (\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}) dx,$	10) $\int \frac{3x^2(2+x^2)}{2} dx,$
5) $\int \frac{3+2t-t^2}{t^4} dt,$	11) $\int \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
6) $\int (2^x - \frac{1}{1+x^2}) dx,$	12) $\int (\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 7 \cos x) dx.$

Вопросы для закрепления:

1. В чем заключается непосредственное интегрирование?
2. Какие свойства неопределенного интеграла применяются при непосредственном интегрировании?

Домашнее задание:

1. Является ли функция $F(x) = x^2 + 3x + 1$ первообразной для функции $f(x) = 2x + 3$ на $\mathbf{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}.$

3. Для функции $f(x) = \sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4}; -2\right)$.
4. Найдите неопределённый интеграл: а) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 4x^4\right) dx$; б) $\int (5x + 3)^3 dx$.

Практическое занятие 10

Тема: Методы замены переменной и интегрирования по частям

Цель: Выработать практические умения в интегрирование неопределённых интегралов методами подстановкой и по частям. Приобрести навыки при решении неопределённого интеграла методами подстановкой и по частям.

Сведения из теории:

Интегрирование методом подстановки

Пусть $\int f(x) dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$$\boxed{\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix}}, \text{ т.е.}$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) \cdot d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной x . Такой способ нахождения интеграла называется **методом замены переменной** или **методом подстановки**.

Задача нахождения неопределённых интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов. Этого можно достичь путём алгебраических тождественных преобразований подынтегральной функции или подведения части её множителей под знак дифференциала.

Подведение множителя под знак дифференциала

$dx = d(x + b), b = \text{const}$	$\sin x dx = -d(\cos x)$
$dx = \frac{1}{a} d(ax), a \neq 0$	$\cos x dx = d(\sin x)$
$dx = \frac{1}{a} d(ax + b), a \neq 0$	$\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$
$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$	$\sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x$

$x dx = \frac{1}{2} d(x^2 + b)$	$\cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$

Выбор удачной формулы (подстановки) для замены переменной имеет большое значение. Вместе с тем дать одно общее правило для выбора хорошей подстановки невозможно. Некоторые частные правила для важнейших типов интегралов даются в решениях типовых примеров.

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-1}dx$

Замечание: В данном примере с первого взгляда не определить, что подвести под знак дифференциала, а поэтому сделаем подстановку, позволяющую избавиться от иррациональности. Обозначим $\sqrt{x-1}=t$. Эта подстановка приводит исходный интеграл к новому интегралу, сводящемуся к табличному.

Решение:

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-1}=t \\ x=t^2+1 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = \int (t^2+1) \cdot t \cdot 2tdt = 2 \int (t^4+t^2)dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

Если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $f(x)$, то есть выражение $f'(x)dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t = f(x)$.

Пример 2. Найти $\int \sqrt[3]{1+\sin x} \cdot \cos x dx$

Решение: $\int \sqrt[3]{1+\sin x} \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} 1+\sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^{1/3} dt = \frac{t^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1+\sin x)^4} + C$

Если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, используется подстановка $t = \varphi(x)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\sin \frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t = \frac{1}{x}$, а если e^{-x^3} , то $t = -x^3$).

Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

Данная формула называется **формулой интегрирования по частям**. Применять её целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. Отметим, что в некоторых случаях формулу необходимо применять несколько раз.

Метод интегрирования по частям рекомендуется для нахождения интегралов от функций $x^k \cdot \sin \alpha x$; $x^k \cdot \cos \alpha x$; $x^k \cdot e^{\alpha x}$; $x^n \cdot \ln^k x$; $a^{\beta x} \sin \alpha x$; $a^{\beta x} \cos \alpha x$; $\arcsin x$; $\arctg x$ и т.д., где n, k - целые положительные постоянные, $\alpha, \beta \in R$, а также для отыскания некоторых интегралов от функций, содержащих обратные тригонометрические и логарифмические функции.

Основные типы интегралов, «берущихся» по частям

интеграл		u	dv
I	$\int p(x) \cdot e^{\alpha x} dx$	$p(x)$	$e^{\alpha x} dx$
	$\int p(x) \cdot \sin \alpha x dx$	$p(x)$	$\sin \alpha x dx$
	$\int p(x) \cdot \cos \beta x dx$	$p(x)$	$\cos \beta x dx$
II	$\int p(x) \cdot \ln x dx$	$\ln x$	$p(x) dx$
	$\int p(x) \cdot \arcsin x dx$	$\arcsin x$	$p(x) dx$
	$\int p(x) \cdot \arccos x dx$	$\arccos x$	$p(x) dx$
III	$\int e^{\alpha x} \cdot \sin \alpha x dx$	$e^{\alpha x}$	$\sin \alpha x dx$
		$\sin \alpha x$	$e^{\alpha x} dx$
	$\int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x dx$	$e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x} dx$
		$\cos \beta x$	$\cos \beta x dx$
	$\int \sin(\ln x) dx$	$\sin(\ln x)$	dx

Замечания:

1. Интегралы 1-го типа берутся **n**-кратным интегрированием, если $P(x)$ - многочлен **n**-й степени.
2. Под знаком интегралов 2-го типа стоят функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\ln x$, от которых интеграл не существует.
3. Интегралы 3-го типа берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Пример 1. Найти $\int x \cdot e^{-2x} dx$

Решение:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-2x} dx &= \left| \begin{array}{l} x = u; e^{-2x} dx = dv \\ dx = dv; v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C; (C = 0) \end{array} \right| = \\ &= x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx = -\frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int x \cdot \arctg x dx$

Решение:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \arctg x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arctg x; dv = x dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1-1)dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C \end{aligned}$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы методом подстановки и по частям:

- 1) $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$, 2) $\int \frac{dx}{1+25x^2}$, 3) $\int \cos \frac{x}{2} dx$, 4) $\int 3^{-x} dx$.
5). $\int (4-3x) e^{-3x} dx$ 6). $\int (4x-2) \cos 2x dx$
7). $\int (3x+4) e^{3x} dx$

Вопросы для закрепления:

1. В чем заключается принцип решения интегралов методов подстановки?
2. Как проинтегрировать по частям и в каком случае применяется этот метод?

Домашнее задание:

Вариант № 1

$$\int (5x^4 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3\sqrt{x}} + 9\sqrt[7]{x^2}) dx$$

$$\int \cos(7x+1) dx$$

Вариант № 2

$$1. \int (4x^3 - \frac{4}{x^5} + \frac{9}{x^4\sqrt{x}} + 10\sqrt[7]{x^3}) dx$$

$$2. \int \frac{dx}{\sin^2(5x-3)}$$

$$\int (5x - 2)e^{3x} dx$$

$$3. \int (2 - 4x) \sin 2x dx$$

Вариант № 3

$$\int \left(6x^5 - \frac{1}{x^2} - 8\sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^4\sqrt{x}} \right) dx$$

Вариант № 4

$$1. \int \left(7x^6 - \frac{3}{x^4} + 3\sqrt{x} - \frac{6}{x^2\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\int 5^{2x+1} dx$$

$$2. \int \operatorname{Ctg}(7x + 2) dx$$

$$\int (1 - 6x) e^{2x} dx$$

$$3. \int (2 - 9x) e^{-3x} dx$$

Вариант № 5

$$\int \left(8x - \frac{5}{x^6} + 7\sqrt[6]{x} - \frac{5}{x^3\sqrt{x}} \right) dx$$

Вариант № 6

$$1. \int \left(4x - \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^5\sqrt{x^3}} + 9\sqrt[7]{x^2} \right) dx$$

$$\int (2x - 7)^5 dx$$

$$2. \int \sqrt[4]{3x + 1} dx$$

$$\int (3x - 2) \cos 5x dx$$

$$3. \int e^{-2x} (4x - 3) dx$$

Вариант № 7

$$\int \left(8x^7 + \frac{7}{x^8} - \frac{1}{x^3\sqrt{x}} + 5\sqrt[4]{x} \right) dx$$

Вариант № 8

$$1. \int \left(9x^8 - \frac{15}{x^4} + \frac{7}{x^4\sqrt{x}} + 13\sqrt[10]{x^3} \right) dx$$

$$\int \frac{dx}{3x + 10}$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x - 2)^2}}$$

$$\int (5x + 6) \cos 2x dx$$

$$3. \int (4x + 7) \cos 3x dx$$

Вариант № 9

$$\int \left(11x^{10} - \frac{6}{x^7} + 9\sqrt[5]{x^4} - \frac{1}{x^4\sqrt{x}} \right) dx$$

Вариант № 10

$$1. \int \left(6x^5 + \frac{6}{x^3} - \frac{5}{2x\sqrt{x}} + 13\sqrt[8]{x^5} \right) dx$$

$$\int \frac{dx}{(2x - 5)^3}$$

$$2. \int \sqrt[3]{(2x + 7)} dx$$

$$\int (8 - 3x) \cos 5x dx$$

$$3. \int (2x - 5) \cos 4x dx$$

Вариант № 11

$$\int \left(6x^2 + 7\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{3x^3\sqrt{x}} + \frac{9}{x^4} \right) dx$$

$$\int 6^{2x+1} dx$$

$$\int (x + 5) \sin 3x dx$$

Вариант № 12

$$1. \int \left(8x^3 + 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{x^5} - \frac{3}{4x^4\sqrt{x}} \right) dx$$

$$2. \int e^{3x-10} dx$$

$$3. \int (2 - 3x) \sin 2x dx$$

Тема: Интегрирование простейших рациональных дробей

Сведения из теории

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} dx.$$

Если $A \neq 0$, то из числителя можно выделить слагаемое $2x + b$, равное производной квадратного трёхчлена, стоящего в знаменателе. Тогда в результате простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} dx &= \frac{A}{2} \int \frac{(2x + b) + (2B/A - b)}{x^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x + b}{x^2 + bx + c} dx + \\ &+ (B - Ab/2) \int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \frac{A}{2} \ln|x^2 + bx + c| + (B - Ab/2) \int \frac{dx}{x^2 + bx + c}. \end{aligned}$$

Для отыскания последнего интеграла выделим в квадратном трёхчлене полный квадрат, то есть представим трёхчлен в виде

$$x^2 + bx + c = \left(x + b/2\right)^2 + \left(c - b^2/4\right)$$

и в зависимости от знака выражения $c - b^2/4$ получим один из табличных

интегралов вида $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2}$.

Пример 1. Найти $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 13} dx$.

Решение

$$\int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 13} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + 4 - 4 - 4/3}{x^2 + 4x + 13} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 13} dx -$$

$$-8 \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+13| - 8 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + c.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{5x-7}{x^2-8x+7} dx$.

Решение

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-7}{x^2-8x+7} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{2x-8+8-14/5}{x^2-8x+7} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x-8}{x^2-8x+7} dx + 13 \int \frac{dx}{x^2-2 \cdot 4x+16-9} = \\ &= \frac{5}{2} \ln|x^2-8x+7| + 13 \int \frac{dx}{(x-4)^2-9} = \frac{5}{2} \ln|x^2-8x+7| + 13 \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-4-3}{x-4+3} \right| + c = \\ &= \frac{5}{2} \ln|x^2-8x+7| + \frac{13}{6} \ln \left| \frac{x-7}{x-1} \right| + c. \end{aligned}$$

Замечание Если в интеграле квадратный трёхчлен имеет вид ax^2+bx+c ($a \neq 0$), то для отыскания этого интеграла коэффициент a в знаменателе выносят за скобки: $ax^2+bx+c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$.

Пример 3. Найти $\int \frac{4x-3}{-2x^2+12x-10} dx$.

Решение

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-3}{-2x^2+12x-10} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{4x-3}{x^2-6x+5} dx = -\int \frac{2x-6+6-3/2}{x^2-6x+5} dx = \\ &= -\int \frac{2x-6}{x^2-6x+5} dx - \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x-3)^2-4} = -\ln|x^2-6x+5| + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+x-3}{2-x+3} \right| + c. \end{aligned}$$

Методы нахождения интеграла вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

аналогичны рассмотренным выше, однако в результате получаются другие табличные интегралы. При $A \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b-b+2Ba/A}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \left(B - \frac{bA}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{bA}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)}}.$$

Тогда при $c \neq \frac{b^2}{4a}$ и $a > 0$ последний интеграл можно привести к виду

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm q^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm q^2} \right| + c,$$

а при $c > \frac{b^2}{4a}$ и $a < 0$ - к виду

$$\int \frac{du}{\sqrt{q^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{q} + c.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx$.

Решение

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x-4) + (4-2/3)}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x-4)}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx - 5 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}} = \\ &= 3\sqrt{x^2-4x+8} - 5 \ln \left| x-2 + \sqrt{(x-2)^2+4} \right| + c. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельного решения.

1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$

Интегрирование рациональных функций путём разложения на простейшие дроби

Рациональной функцией $R(x)$ называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n},$$

где m, n - целые положительные числа; $b_i, a_j \in R$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m$; $j = 0, 1, 2, \dots, n$).

Если $m < n$, то $R(x)$ называется **правильной дробью**, если $m \geq n$, то **неправильной дробью**.

Всякую неправильную дробь путём деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{Q_l(x)}{P_n(x)},$$

где $M_{m-n}(x)$, $Q_l(x)$ - многочлены; $\frac{Q_l(x)}{P_n(x)}$ - правильная дробь; $l < n$.

Например $\frac{x^4 + 4}{x^2 + 3x - 1}$ - неправильная дробь. Разделив её по правилу деления многочленов, получим

$$\frac{x^4 + 4}{x^2 + 3x - 1} = x^2 - 3x + 10 + \frac{-33x + 14}{x^2 + 3x - 1}.$$

Так как всякий многочлен легко интегрируется, то интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных дробей.

Простейшей дробью называется дробь одного из следующих четырёх типов:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \frac{A}{x-a}; & 2) \quad \frac{A}{(x-a)^k}; \\ 3) \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; & 4) \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \end{array}$$

где A, a, M, N, p, q - постоянные числа, k - целое, $k \geq 2$, $p^2 - 4q < 0$.

Интегралы от простейших дробей первого и второго типов находятся легко:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + c.$$

Методика нахождения интегралов от простейших дробей третьего и четвёртого типов рассмотрена в пункте 5.3.1. Таким образом, всякая простейшая рациональная дробь может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Известно, что всякий многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами на множестве действительных чисел может быть представлен в виде

$$P_n(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_m$ - действительные корни многочлена $P_n(x)$ кратностей $k_1, k_2, \dots, k_m$, а $p_\gamma^2 - 4q_\gamma < 0$ ($\gamma=1, 2, \dots, s$); $k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2t_1 + \dots + 2t_s = n$; числа $k_1, k_2, \dots, k_m, t_1, \dots, t_s$ - целые неотрицательные. Тогда верна теорема.

Для вычисления значений A, B, M, N в разложении функции $R(x)$ на сумму простейших рациональных дробей часто используют **метод неопределённых коэффициентов**. В некоторых случаях с целью упрощения вычислений можно воспользоваться **методом частных значений**. Суть этих методов покажем на примерах.

Пример 1. Найти $\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} dx$.

Решение

В соответствии с формулой разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \right) dx. \quad (1)$$

Если привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадает со знаменателем исходной подынтегральной функции, а числители подынтегральной функции в левой и правой частях формулы (1) будут тождественно равными, то есть

$$2x-3 \equiv A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + C(x-1)x. \quad (2)$$

Найдём коэффициенты A, B, C **методом неопределённых коэффициентов**.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (2), получаем систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} x^2 | 0 = A + B + C, \\ x^1 | 2 = -3A - 2B - C, \\ x^0 | -3 = 2A, \end{array} \right\}$$

решение которой: $A = -3/2, B = 1, C = 1/2$.

Теперь найдём коэффициенты разложения **методом частных значений**. Подставим в тождество (2) вместо x частные значения, равные

корням знаменателя $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$. Получим равенства $-3 = 2A$, $-1 = -B$, $1 = 2C$, откуда следует, что $A = -3/2$, $B = 1$, $C = 1/2$. Подставив в равенство (1) найденные значения коэффициентов, окончательно имеем

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{-3/2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2} \right) dx =$$

$$-\frac{3}{2} \ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x-2| + c.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

Решение

На основании теоремы о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)} \right) dx.$$

Приведя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, имеем

$$x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x^2-1). \quad (1)$$

При $x=1$ и $x=-1$ находим, что $4A=1$, $-1=-2B$, то есть $A=1/4$, $B=1/2$.

Для вычисления значения C приравняем в тождестве (1) коэффициенты при x^2 . Получим $0 = A + C$, то есть $C = -1/4$.

Окончательно имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \frac{1/4}{x-1} dx + \int \frac{1/2}{(x+1)^2} dx + \int \frac{-1/4}{(x+1)} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \ln|x+1| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + c.$$

Задания для самостоятельного решения.

1. $\int \frac{x^3}{x-2} dx.$

2. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx.$

Домашнее задание:

Тест

1 Чему равно значение интеграла $\int \frac{xdx}{1+x^2}$:

1: $\ln(1+x^2)+C$;

2: $\frac{1}{2} \ln(1+x^2)+C$;

3: $\arctg x + C$.

2 Первообразная функции $y(x) = \frac{1}{x^2} - 4 \sin x$ равна:

1: $4 \cos x - \frac{1}{x} + c$; 2: $4 \cos x + \frac{1}{x} + c$; 3: $4 \cos x - \frac{1}{2x} + c$.

3 Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если в любой точке интервала (a, b) функция $F(x)$ дифференцируема и:

1: $F''(x) = f(x)$ 2: $F'(x) = 0$; 3: $F'(x) = f(x)$.

4 Отметить правильный ответ. Формула интегрирования по частям:

1: $\int u dv = uv - \int v du$; 2: $\int u dv = uv - \int u dv$; 3: $\int u dv = v^2 - \int v du$.

5 Отметить правильный ответ. Отыскание неопределенного интеграла называется

1: дифференцированием; 2: интегрированием; 3: логарифмированием.

6 Отметить правильный ответ. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется :

1: совокупность всех первообразных; 2: сумма функций $f(x) + f^2(x)$;
3: производная функции $f(x)$; 4: выражение $f(x)dx$.

7 Чему равен интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$:

1: $\ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$; 2: $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$; 3: $\ln|x-a| + \ln|x+a| + c$; 4: $\ln|x^2 - a^2| + C$.

8 Чему равен интеграл $\int x\sqrt{x} dx$:

1: $\frac{x^3}{3} + C$; 2: $2\sqrt{x} + C$; 3: $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$; 4: $x^{\frac{3}{2}} + C$.

9 Дополнить формулировку:

У всякой непрерывной на данной интервале функции существует ...

1: точка разрыва; 2: неопределенный интеграл; 3: вертикальная асимптота графика функции.

10 Дополнить формулировку:

Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен ...

1: подынтегральному выражению; 2: самой функции; 3: производной функции; 4: натуральному логарифму функции.

11 Универсальная тригонометрическая подстановка:

1: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 2: $t = \cos x$; 3: $t = \cos \frac{x}{2}$; 4: $t = \sin \frac{x}{2}$; 5: $t = \arccos x$.

12 Чему равен интеграл $\int (7x-1)^{23} dx$:

1: $(7x-1)^{23}$; 2: $(7x-1)^{23} + C$; 3: $\frac{(7x-1)^{24}}{168} + C$; 4: $\frac{(7x-1)^{24}}{168}$.

13 Чему равен интеграл $\int x^2 \cdot \sin(x^3+1) dx$:

1: $-\frac{1}{3} \cos(x^3+1)$; 2: $-\frac{1}{3} \cos(x^3+1) + C$; 3: $\cos(x^3+1) + C$; 4: $3 \cos(x^3+1) + C$;
5: $-3 \cos(x^3+1) + C$.

14 Чему равен интеграл $\int 2x dx$:

1: $x^2 + C$; 2: x^2 ; 3: $\frac{x^3}{9} + C$; 4: $2x^2 + C$; 5: $-x^2 + C$;

15 Дополнить формулировку:

С точки зрения геометрической, неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, каждая из которых получается путем перемещения кривой $y = F(x)$...

1: параллельно самой себе вдоль оси ОУ; 2: параллельно самой себе вдоль оси ОХ; 3: симметрично относительно начала координат.

Практическое занятие 11

Правила замены переменной и интегрирования по частям

Цель: Выработать практические умения в интегрирование определённых интегралов методами замены переменной и по частям. Приобрести навыки при решении определенного интеграла методами замены переменной и по частям.

Сведения из теории.

Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и функция $F(x)$ - некоторая первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$, то определённый интеграл от функции $f(x)$ на $[a;b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, то есть

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Нахождение определённых интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница осуществляется в два шага:

на первом шаге, используя технику нахождения неопределённого интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для $f(x)$,

на втором подсчитывают разность значений первообразной в точках b и a . Разность этих значений первообразной принято обозначать символом $F(x)\Big|_a^b$, то есть

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Следует подчеркнуть, что при применении формулы Ньютона-Лейбница можно использовать любую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, например, имеющую более простой вид при $c = 0$.

Пример 1 Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

Решение

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Замена переменной (интегрирование подстановкой)

Пусть выполняются следующие условия

- 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- 2) функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$;
- 3) $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$;
- 4) функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$,

$$\text{тогда } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (6.5)$$

Пример 2 Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Решение

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left. \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ x = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ \text{если } x = 1, \text{ то } t = 0 \\ \text{если } x = e, \text{ то } t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1 - 0) = \frac{1}{3}.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$; $V = V(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции на $[a; b]$, тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b u dV = uV \Big|_a^b - \int_a^b V du. \quad (6.6)$$

Пример 3 Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x \cos 2x dx$.

Решение

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dV = \cos 2x dx; \quad V = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sin 4\pi - \frac{1}{2} \cdot 0 \sin 0 + \frac{1}{4} \cos 4\pi - \frac{1}{4} \cos 0 = \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Интегрирование чётной и нечётной функции

Если $f(x)$ - чётная функция, то есть $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Если $f(x)$ - нечётная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Пример 4 Вычислить интеграл $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx$.

Решение

Функция $f(x) = \sin^2 x$ - чётная, так как

$$f(-x) = \sin^2(-x) = [\sin(-x)]^2 = [-\sin x]^2 = \sin^2 x = f(x),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2x) dx = \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Пример 5 Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$ - нечётная, так как

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \arcsin(-x)}{\sqrt{1+(-x)^2}} = -\frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} = -f(x),$$

поэтому

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0.$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы

6.6 $\int_1^3 x^3 dx.$

6.7 $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) dx.$

6.8 $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx.$

6.9 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx.$

6.10 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^2}.$

6.11 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

6.12 $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} \right) dx.$

6.13 $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx.$

6.18 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x} dx.$

6.19 $\int_1^2 e^x \left(2 + \frac{x^2}{e^x} \right) dx.$

6.20 $\int_1^2 2^{3x-4} dx.$

6.21 $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}.$

6.22 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

6.23 $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$

6.34 $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$

6.35 $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}.$

6.36 $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx.$

6.37 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{8-x^2} dx.$

$$6.38 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

$$6.39 \quad \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx.$$

$$6.40 \quad \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

$$6.41 \quad \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$6.42 \quad \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

$$6.43 \quad \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

$$6.44 \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$6.45 \quad \int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$6.46 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

$$6.47 \quad \int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

$$6.48 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$$

$$6.49 \quad \int_1^e \cos \ln x dx.$$

Практическое занятие 12

Тема: Вычисление несобственных интегралов. Исследование сходимости (расходимости) интегралов

Цель: Выработать навыки исследования сходимости интегралов.

Сведения из теории.

Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются:

- 1) интегралы с бесконечными пределами;
- 2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a; +\infty)$ определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (6.28)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же предел не существует или равен ∞ , то интеграл называется расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл функции $f(x)$ на $(-\infty; b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (6.29)$$

Несобственный интеграл функции $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$ определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad (6.30)$$

где c - любая фиксированная точка оси Ox .

Пример 1 Вычислить $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$.

Решение

По определению имеем (формула (6.28))

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. -\frac{1}{2x^2} \right|_1^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \Big|_1^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b} - 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 2 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

Решение

Воспользуемся формулами (6.28), (6.29), (6.30):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^x dx,$$

В формуле (6.30) полагаем, что $c = 0$.

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) = 1,$$

то есть первый интеграл сходится.

Но

$$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} e^x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (e^\infty - e^0) = \infty,$$

то есть второй интеграл расходится.

И, следовательно, расходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, но не ограничена на полуинтервале $[a; b)$.

Несобственным интегралом $\int_a^b f(x) dx$ от функции $y = f(x)$ на $[a; b)$ называется предел $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$, то есть

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_a^{b-\delta} f(x) dx. \quad (6.31)$$

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции $y = f(x)$ непрерывной, но неограниченной на $(a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{a+\delta}^b f(x) dx. \quad (6.32)$$

Замечание. Если функция $f(x)$ не ограничена при $x = c$, где $c \in [a; b]$, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ также называется несобственным. В этом случае

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (6.33)$$

считается сходящимся, если сходятся два несобственных интеграла в правой части равенства.

Пример 3 Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x = 0$ не ограничена, а потому имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+} 2\sqrt{x} \Big|_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0+} (2 - 2\sqrt{\delta}) = 2.$$

Интеграл сходится.

Пример 4 Вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x=1$ не ограничена, где $1 \in [0; 2]$. Тогда по формуле (6.33) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \int_0^1 (x-1)^{-2} d(x-1) + \int_1^2 (x-1)^{-2} d(x-1) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^{1-\delta} (x-1)^{-2} d(x-1) + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{1+\delta}^2 (x-1)^{-2} d(x-1) = \\ &= -\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{x-1} \Big|_0^{1-\delta} - \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{x-1} \Big|_{1+\delta}^2 = -\lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{1-\delta-1} - \frac{1}{-1} \right) - \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(1 - \frac{1}{1+\delta-1} \right) = \infty. \end{aligned}$$

То есть данный интеграл расходится.

Задания для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы

6.138 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$.

6.139 $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$.

6.140 $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$.

6.141 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$.

6.142 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

6.143 $\int_0^{\infty} x \sin x dx$.

Практическое занятие 13

Тема: Приложения интегрального исчисления

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин и объемов фигур, выработать навыки применения определенного интеграла к вычислению физических величин.

Сведения из теории

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a, b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (8)$$

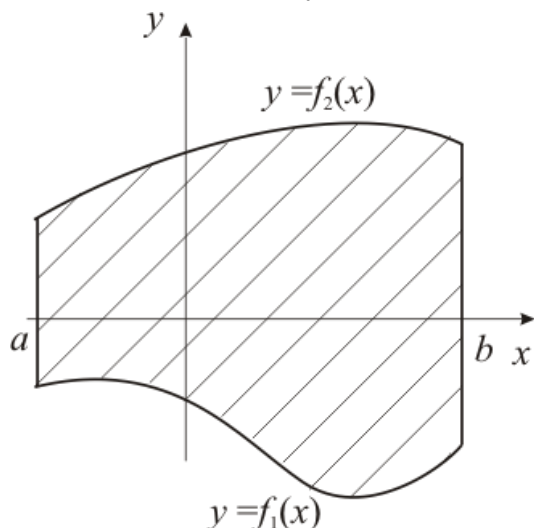


Рис. 1

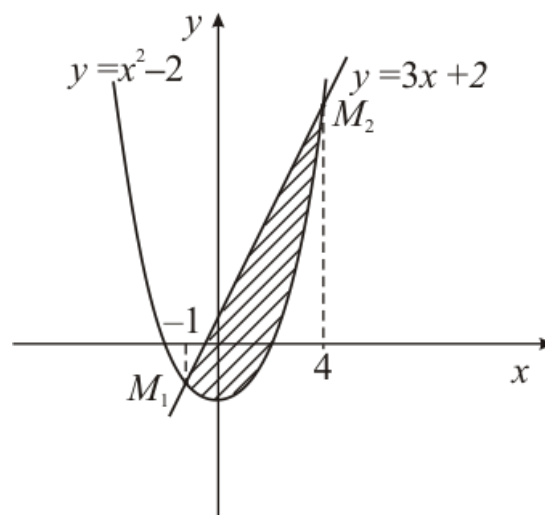


Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, \quad y = 3x + 2.$$

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
y	-2	-1	-1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$, $y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$. Итак, $M_1(-1, -1)$, $M_2(4, 14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой

$f_2(x) = 3x + 2$, $f_1(x) = x^2 - 2$, поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$.

Получим:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 (3x + 2 - (x^2 - 2)) dx = \int_{-1}^4 (3x - x^2 + 4) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-1}^4 = \\ &= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1) \right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 = \\ &= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20 \frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

2. *Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически*

Если функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t \in [t_0, t_1]$, то площадь плоской фигуры,

ограниченной линией $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [t_0, t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a =$

$x(t_0)$,

$b = x(t_1)$, и осью OX , вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt \right|. \quad (9)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

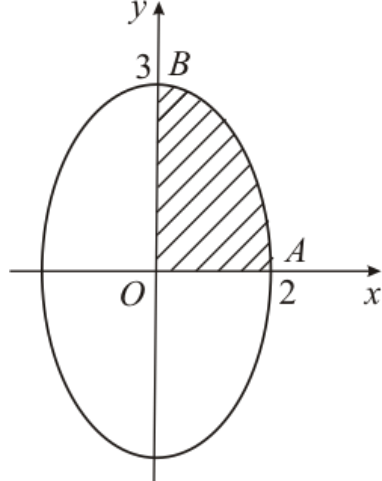
$$x = 2 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра t , $0 \leq t \leq 2\pi$.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	-2	0	2
y	0	3	0	-3	0

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π , соответствующая точка (x, y) описывает

эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$ —



параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY , найдем её площадь S , умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB . Согласно формуле (9) получим:

$$\begin{aligned} S &= 4 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin t (2 \cos t)' dt \right| = 4 \left| -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2 \alpha \text{ из таблицы 2} \end{array} \right\} = \\ &= 4 \left| -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt \right| = 4 \left| -3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \right| = 4 \left| -3 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 4 \left| -3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) \right| = 4 \left| -3 \frac{\pi}{2} \right| = 6\pi \approx 18,850 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Длина дуги плоской кривой

1. Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную при всех $x \in [a, b]$, то длина дуги AB (рис. 4) этой

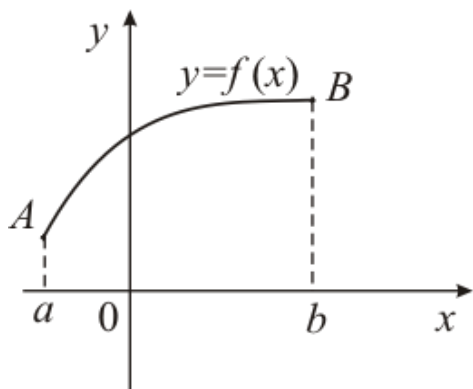


Рис. 4

кривой, заключенной между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, вычисляется по формуле:

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (10)$$

2. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t_0 \leq t \leq t_1$, и функции

$x(t), y(t)$ имеют непрерывные производные 1-го порядка при всех $t \in [t_0, t_1]$, то длина дуги AB , соответствующей изменению параметра от t_0 до t_1 , вычисляется по формуле:

$$l_{AB} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (11)$$

Пример. Найти длину дуги кривой

а) $y = x^{3/2}, 0 \leq x \leq 1$; б) $x = 2\cos t - \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (10).

Найдем y' : $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ и подставим в (10):

$$\begin{aligned} l_{AB} &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + \frac{9x}{4}, dt = \frac{9}{4} dx, dx = \frac{4}{9} dt, \\ x = 0 \rightarrow t = 1, \\ x = 1 \rightarrow t = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}. \end{array} \right| = \\ &= \frac{4}{9} \int_1^{13/4} t^{\frac{1}{2}} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{4}{9} \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_1^{13/4} = \frac{8}{27} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{13/4} = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{13}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \\ &= \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right) \approx 1,440 \text{ (единиц длины)}. \end{aligned}$$

б) $x = 2\cos t - \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (11).

Найдем $x'(t), y'(t)$:

$x'(t) = -2\sin t + 2\sin 2t, y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$ и подставим в (11):

$$\begin{aligned}
l_{AB} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t + 2\sin 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2} dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t - 8\sin t \sin 2t + 4\sin^2 2t + 4\cos^2 t - 8\cos t \cos 2t + 4\cos^2 2t} dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t) + 4(\sin^2 2t + \cos^2 2t) - 8(\cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t)} dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{используем тригонометрические формулы} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ и } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos t} dt = \\
&= \sqrt{8} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\
&= 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -8 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -8(\cos \pi - \cos 0) = -8(-1 - 1) = 16 \text{ (единиц длины)}.
\end{aligned}$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (12)$$

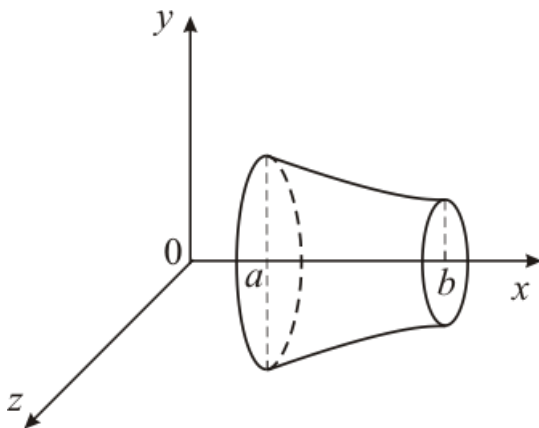


Рис. 5

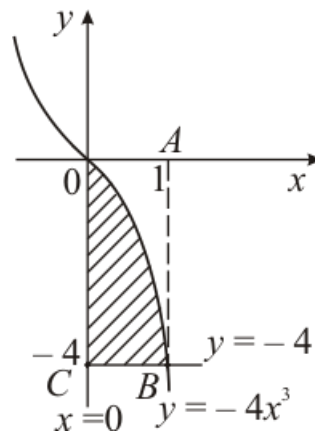


Рис. 6

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3$, $x = 0$, $y = -4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры $OABC$, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры OAB . Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2 :

$$V_1 = \pi \int_0^1 (-4)^2 dx = \pi 16x \Big|_0^1 = 16\pi \text{ (ед. объема);}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (-4x^3)^2 dx = 16\pi \int_0^1 x^6 dx = 16\pi \frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43,085 \text{ (ед. объема).}$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

- 1) $y = x^2 - 2$, $y = 1 - 2x$
- 2) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$
- 3) $y = 3x^2 + 1$, $y = 3x + 6$
- 4) $y = x^2$, $y = x + 1$
- 5) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$
- 6) $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

- 1) $x = 2t - t^2$, $y = t(t - 1)$, $0 \leq t \leq 1$
- 2) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, $0 \leq t \leq 1$
- 3) $x = 2\sin t$, $y = \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Задание 3. Найти длину дуги кривой.

- 1) $y = 1 + \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$
- 2) $x = t^2 - 1$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 1$

Задание 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

- 1) $x^2 - y = 0$, $y = 1$
- 2) $x^2 + y = 0$, $y = -1$

Физические приложения определённого интеграла

1. Путь, пройденный телом, перемещающимся со скоростью $V = V(t)$, за промежуток времени $[t_1; t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt.$$

Пример 1 Автобус начинает двигаться с ускорением 1 м/с^2 . Какой путь пройдёт автобус за 12 секунд от начала движения?

Решение

Скорость движения автобуса выражается формулой

$$V = at \text{ м/с, то есть } V = t \text{ м/с.}$$

Согласно формуле (6.26) находим путь, пройденный автобусом от времени $t_1 = 0$ до $t_2 = 12$ секунд:

$$S = \int_0^{12} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{12} = 72 \text{ м.}$$

2. Работа переменной силы, заданной функцией $F = F(x)$ и направленной вдоль оси Ox на отрезке $[a; b]$, равна интегралу

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Пример 2 Сжатие винтовой пружины пропорционально приложенной силе. Найти работу, производимую при сжатии пружины на 3см, если известно, что для сжатия на 0,5см нужно приложить силу в 1Н.

Решение

Сила $F(x)$, требующаяся для сжатия пружины на x м, будет равна kx , где k - коэффициент пропорциональности. При $x = 0,005$ м сила $F(x) = k \cdot 0,005$. Согласно условию задачи $1 = k \cdot 0,005$, следовательно,

$$k = \frac{1}{0,005} = 200.$$

Значит, $F(x) = 200x$, по формуле (6.27) работа, произведённая силой при сжатии пружины на 3см (0,03 м), равна

$$A = \int_0^{0,03} 200x dx = 100x^2 \Big|_0^{0,03} = 0,09 \text{ Дж}$$

Задания для самостоятельного решения.

6.127 Скорость тела меняется по закону $v = 0,03t^2 \text{ м/с}$. Какой путь пройдёт тело за 10сек? Чему равна средняя скорость движения?

6.128 Скорость автобуса при торможении изменяется по закону $v(t) = (15 - 3t)$ м/с. Какой путь пройдёт автобус от начала торможения до полной остановки?

6.129 Скорость движения тела задана уравнением $v(t) = (12t - 3t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом от начала движения до его остановки.

6.130 Скорость движения материальной точки задана уравнением $v(t) = (6t^2 + 4)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за пятую секунду.

6.131 Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если сила в 20 Н растягивает пружину на 5 см?

6.132 Для растяжения пружины на 4 см необходимо совершить работу 24 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 150 Дж?

6.133 Вычислить работу, необходимую для того, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила в 1 Н растягивает её на 1 см.

Домашнее задание

Тест

1 Несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \dots$

1: расходится; 2: $\frac{\pi}{2}$; 3: $-\frac{\pi}{4}$; 4: $\frac{\pi}{4}$.

2 Значение интеграла $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx$ равно

1: $\ln 2$; 2: $\ln 4$; 3: $1 + \ln 5$; 4: $1 + \ln 2$.

3 Значение интеграла $\int_{-1}^0 (x+1)^4 dx$ равно

1: $\frac{1}{5}$; 2: $\frac{1}{2}$; 3: 1; 4: $\frac{1}{3}$.

4 Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением

$\rho = 3 \cos \varphi$, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ равна

1: $\frac{\pi}{4}$; 2: $\frac{3}{4}\pi$; 3: $\frac{2}{3}\pi$; 4: $\frac{\pi}{2}$.

5 Несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{3x^5} \dots$

- 1: расходится; 2: $-\frac{1}{12}$; 3: $\frac{4}{3}$; 4: $\frac{1}{12}$;

6 Площадь фигуры ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ равна

- 1: $3\frac{3}{4}$; 2: $2\frac{1}{3}$; 3: 2; 4: 1.

7 Путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t = 0$, до $t = 5$, если скорость точки меняется по закону $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$ равен...

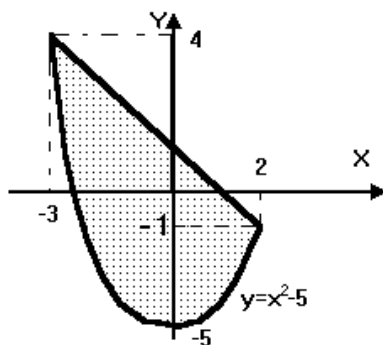
- 3: 155м; 4: 150м.

8 Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt{x+1}$ и прямой $2y - x = 1$, равен

- 1: $\frac{8\pi}{3}$ куб.ед.; 2: $\frac{\pi}{3}$ куб.ед.; 3: $\frac{4\pi}{3}$ куб.ед.; 4: 2π

куб.ед.

9 Какой из следующих интегралов представляет площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже?



1: $\int_{-3}^2 [(x^2 - 5) - (x + 1)] dx$;

2: $\int_{-3}^2 [(1 + x) - (x^2 - 5)] dx$;

3: $\int_{-3}^2 [(-1 - x) - (x^2 - 5)] dx$;

4: $\int_{-3}^2 [(1 - x) - (x^2 - 5)] dx$.

10 Пусть кривая АВ задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ –непрерывная функция, имеющая непрерывную первую производную во всех точках сегмента $[a, b]$.

Тогда дуга АВ имеет длину, равную...

$$1: l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt; \quad 2: l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi; \quad 3: l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx;$$

11 Несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$...

- 1: 2; 2: -2; 3: 1; 4: расходится.

12 Объем тела образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x + 2)^3$ и прямой $x = -1$ равен

- 1: $\frac{\pi}{2}$; 2: $\frac{\pi}{4}$; 3: $\frac{\pi}{3}$; 4: π .

13 Вычисление интеграла $I = \int_0^{\pi/2} \lg x dx$ приводит к следующему результату

- 1: расходится; 2: -1; 3: 0; 4: π .

14 Работа, затраченная на растяжение пружины на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м, равна...

- 1: 12,5 Дж; 2: 1,25 Дж; 3: 0,25 Дж; 4: 125 Дж.

Практическое занятие 14,15,16

Тема: Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородное дифференциальное уравнение.

Цель: Выработать навыки решения дифференциальных уравнений.

Сведения из теории

Основные понятия

Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и её производные или дифференциалы различных порядков называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение. Например, уравнение $y' \sin x + y \cos x = 1$ - первого порядка; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x$ - второго порядка; $y''' = xy$ - третьего порядка и т.д.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y=y(x)$, удовлетворяющая этому уравнению. Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Если решение уравнения получено в неявном виде $\varphi(x, y) = 0$, то оно обычно называется интегралом уравнения.

Задача Коши для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

ставится следующим образом. Среди всех решений уравнения (I) требуется найти решение $y=y(x)$, для которого функция $y(x)$ вместе со своими производными до (n-1)-го порядка включительно принимает заданные значения $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, при заданном значении x_0 аргумента x , т.е.

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (2)$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ - заданные числа.

Условия (2) называются начальными условиями решения $y=y(x)$, а само это решение - частным решением уравнения (I), удовлетворяющим начальным условиям (2).

Общее решение уравнения (I) - это решение вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, зависящее от произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, которые можно подобрать таким образом, чтобы удовлетворить любой системе начальных условий.

Частное решение уравнения (I) может быть получено из общего решения при некоторых числовых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Геометрически общее решение (общий интеграл) изображается семейством интегральных кривых, а частное решение (частный интеграл) - одной из этих интегральных кривых.

6.1 Дифференциальные уравнения I порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется

уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } y' = f(x, y)$$

где y - неизвестная функция; x - независимая переменная.

Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка имеет вид $\varphi(x, C) = 0$ или $\Phi(x, y, c) = 0$ - соответственно. Для получения частного решения (частного интеграла), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x) = y_0$, надо найти соответствующее значение $C = C_0$, подставляя в общее решение (общий интеграл) значения x_0 и y_0 . Будем иметь $y = \varphi(x, C_0)$ или $\Phi(x, y, c) = 0$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (1)$$

Поделив обе части уравнения (I) на $N_1(y)M_2(x)$ получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 \quad (2)$$

в котором переменные разделены. Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

Однородные уравнения I порядка

Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - однородные функции одного измерения. Функция $F(x, y)$ называется однородной измерения m , если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Оно приводится к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Где $f\left(\frac{y}{x}\right)$ - однородная функция нулевой степени однородности. Однородное уравнение с помощью подстановки $\left(\frac{y}{x}\right) = u$ или $y = ux$, ($y' = u'v + uv'$), приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции u . При этом $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$, или $dy = xdu + udx$.

Интегрируя получившееся уравнение с разделяющимися переменными, и, заменяя затем $u = \left(\frac{y}{x}\right)$, находим искомое общее решение (общий интеграл) данного однородного уравнения.

Линейные уравнения I порядка

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно линейно (т.е. первой степени) относительно искомой функции y и её производной y' .
Общий вид линейного уравнения

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (1).$$

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию y заменить произведением двух вспомогательных функций u и v , т.е. положить $y = uv$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \text{ и данное уравнение (1) примет вид}$$

$$v \frac{du}{dx} + u \left[\frac{dv}{dx} + P(x)v \right] = Q(x) \quad (2)$$

Пользуясь тем, что одну из вспомогательных функций, например v можно выбрать произвольно, подберем ее так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль, т.е. в качестве v возьмем одно из частных решений $v = v(x)$ уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$$

Подставляя выражение $v = v(x)$ в уравнение (2), получаем уравнение относительно функции u :

$$v \frac{du}{dx} = Q(x), \quad (3)$$

которое также является уравнением с разделяющимися переменными. Найдя общее решение уравнения (3) в виде $u = u(x, C)$ получив общее решение линейного уравнения (1):

$$y = u(x, C) \cdot v(x)$$

Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, где P и Q функции, зависящие только от x и n -рациональное число, называется уравнением Бернулли.

При $n=0$ имеем линейное уравнение. Уравнение Бернулли решается также подстановкой $y = uv$.

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y' = (y+1)\operatorname{ctg} x$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx и

разделим на множитель $(y+1)$. Получим уравнение с разделенными переменными: $\frac{dy}{y+1} = \operatorname{ctg} x dx$.

Интегрируя обе части уравнения и беря произвольную постоянную в вида $\ln C$, получим $\ln|y+1| = \ln|\sin x| + \ln C$.

Потенцируя, находим общее решение: $y = C \sin x - 1$.

Найдем значение C , соответствующее начальным условиям: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $2 = C \sin \frac{\pi}{2} - 1$, откуда $C = 3$. Подставим $C = 3$ в формулу общего решения. Получим, $y = 3 \sin x - 1$ есть частное решение, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

Решение. Здесь $P = x^2 + 2xy$, $Q = xy$. Функции однородные второго измерения. Введем подстановку $y = ux$, тогда $dy = xdu + udx$.

Данное уравнение примет вид: $(x^2 + 2x^2u)dx + ux^2(xdu + udx) = 0$, или $(x^2 + 2x^2u + u^2x^2)dx + ux^3du = 0$.

Разделяя переменные и интегрируя, имеем: $\frac{dx}{x} + \frac{udu}{(u+1)^2} = 0$,
 $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{udu}{(u+1)^2} = C$, $\ln|x| + \int \frac{u+1-1}{(u+1)^2} du = C$, $\ln|x| + \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = C$.

Возвращаясь к прежней неизвестной функции y заменой " u " на $\frac{y}{x}$,
 получаем $\ln|x| + \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = C$, $\ln\left|x\left(\frac{y}{x} + 1\right)\right| + \frac{x}{x+y} = C$.

Пример 3. Решить уравнение $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$.

Решение. Данное уравнение является линейным, так как оно содержит искомую функцию y и её производную y' в первой степени и не содержит их произведений.

Применяем подстановку $y = uv$, где u и v - некоторые неизвестные функции аргумента x . Если $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид $u'v + uv' - uv \operatorname{ctg} x = \sin x$ или $u'v + u(v' - v \operatorname{ctg} x) = \sin x$.

Так как искомая функция представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию v так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках левой части равенства, обращалось в нуль. Тогда данное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$I) v' - v \operatorname{ctg} x = 0$$

$$II) u'v = \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} = v \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctg} x dx$$

$$\ln v = \ln \sin x$$

$$v = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} \sin x = \sin x$$

$$du = dx$$

$$\int du = \int dx$$

$$u = x + c$$

Т.к. $y = uv$, то $y = (x + c) \sin x$ - общее решение.

Пример 4. Найти общий интеграл уравнения: $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$

Решение. Разделив обе части уравнения на $x^2 y^2$, убеждаемся, что данное уравнение является уравнением Бернулли: $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^{-2}}{x^2}$

Заменяя функцию y по формуле $y = uv$, имеем $y' = (uv)' = u'v + uv'$,
 $u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}$ или $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}$

Отсюда получаем два уравнения с разделяющимися переменными:

$$1) \left(v' + \frac{v}{x} \right) = 0 \text{ и } 2) u'v = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}$$

Решая первое уравнение, находим v как простейший частный интеграл этого уравнения: $v = \frac{1}{x}$. Подставляя v во второе уравнение и решая

его, находим u как общий интеграл этого уравнения: $\frac{u'}{x} = \frac{1}{u^2}$, $u^2 du = x dx$,

$\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{3}$, $u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}$. Следовательно, искомый общий интеграл данного

уравнения $y = uv = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}$

Задания для самостоятельного решения.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(1+y^2)dx = (1+x^2)dy$

б) $y' = e^{x+y}$

2. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:

а. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$, если $y(0) = 1$

б) $y' \operatorname{ctgx} + y = 2$, если $y(0) = -1$

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x + 2y)dx - xdy = 0$

б) $y^2 + x^2y' = xyu'$

4. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:

$(2x - 3y)dx + xdy = 0$, если $y(1) = -1$

5. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$

б) $ydx + 2(x + y)dy = 0$

6. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:

а) $y' - 2xy = 1$, если $y(0) = 0$

б) $xy' + y - e^x = 0$, если $y(a) = b$

7. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$y' - 2xy = 3x^3y^2$

8. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:

$(1 - x^2)y' + 2xy = xy^2$, если $y(0) = 0,5$

Домашнее задание:

Тест

1 Дополнить формулировку:

Уравнение, связывающее неизвестную функцию, аргумент и ... называется дифференциальным.

1: производные;

2: дифференциалы;

3: производные и дифференциалы;

4: определение полное.

2 Дополнить формулировку:

Общее решение дифференциального уравнения n -го порядка содержит ... произвольных постоянных.

- 1: две; 2: $n-1$; 3: $n+1$; 4: n .

3 Определить вид дифференциального уравнения $xy' - 2y - 2x = 0$

- 1: линейное; 2: с разделяющимися переменными;
3: уравнение Бернулли; 4: однородное уравнение.

4 Какая из функций не является решением заданного дифференциального уравнения 1-го порядка $x' + 3x = e^{2t}$

- 1: $x(t) = e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$; 2: $x(t) = Ce^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$;
3: $x(t) = e^{2t} + Ce^{-3t}$; 4: $x(t) = e^{-3t} \left(\frac{1}{5}e^{5t} + C \right)$.

5 Уравнение $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$ является общим решением дифференциального уравнения вида

- 1: $x + yy' = 0$; 2: $x + 2y = 0$; 3: $2x + 2y' = 0$; 4: $x + yy' = 4$.

6 Частное решение дифференциального уравнения $(x^2 + 1)y' = 2x(4 - y)$ при $y(0) = 1$ имеет вид...

- 1: $4 - \frac{3}{x^2 + 1}$; 2: $\frac{4x^2 + 1}{x^2 + 1}$; 3: $4 + \frac{1}{x^2 + 1}$; 4: $-4 + \frac{5}{x^2 + 1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007
2. Математика: учебное пособие/Т.А.Гулай, А.Ф.Долгополова, В.А.Жукова, С.В.Мелешко, И.А.Невидомская; - Ставрополь, 2019. - 145 с.
3. Математика. Часть 1: учебное пособие. - изд. 3-е, перераб. и доп. /Т.А.Гулай, А.Ф.Долгополова, В.А.Жукова, С.В.Мелешко, И.А.Невидомская. Ставрополь: СЕКВОЙЯ, 2019. - 126 с.
4. Литвин Д.Б., Таволжанская О.Н. Ряды: учебное пособие. – Ставрополь : Сервисшкола, 2016. – 87с.
5. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В./ - М.: Издательский центр «Академия», 2009
6. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
7. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2006
8. Спирина М.С. дискретная математика: учеб. – М.: Издательский центр «Академия», 2006
9. Ряды: учебное пособие / Д.Б. Литвин, Т.А. Гулай, И.И. Мамаев. – Ставрополь : Сервисшкола, 2017. – 88с.
- 10.Элементы теории вероятностей и математической статистики: учебное пособие/ Т.А.Гулай, А.Ф.Долгополова, В.А.Жукова, С.В.Мелешко, И.А.Невидомская; Ставропольский гос. аграрный ун-т - Изд 3-е, перераб. и доп. - Ставрополь, 2019. - 112 с.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИКА

**Методические указания к практическим занятиям
по учебной дисциплине ОУП.03У МАТЕМАТИКА**

Методические указания составлены в соответствии с программой общеобразовательного учебной дисциплины ОУП.03У «Математика». В методических указаниях приведена структура и содержание практических занятий, предусмотренных рабочей программой предмета.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания предназначены для студентов и служат пособием при работе на практических занятиях, предусмотренных рабочими учебными планами, запланированных в рабочих программах.

Содержание и объем практических занятий общеобразовательного учебного предмета ОУП.03У «Математика» соответствует требованиям ФГОС СПО, реализуемого в пределах ППССЗ с учетом технологического профиля профессионального образования.

Практические задания направлены на подтверждение теоретических положений и формирование учебных умений, они составляют важную часть теоретической подготовки по освоению дисциплины.

Результат выполнения практических заданий оценивается по пятибалльной системе.

В данных методических указаниях приведено 108 часов практических занятий. Каждое практическое занятие содержит тему, цель, сведения из теории, практико-ориентированные задания, вопросы для закрепления, задания для самостоятельного решения, домашнее задание.

Практическое занятие 1

Действия над действительными числами

Цель: повторить действия над действительными числами.

Сведения из теории:

Дроби делятся на обыкновенные и десятичные. Десятичная дробь- это, по существу другая форма записи. В виде десятичной дроби можно представить любую обыкновенную дробь, знаменатель которой является делителем некоторой степени числа 10. Если к десятичной дроби приписать справа нуль или несколько нулей, то получится равная ей дробь. Если десятичная дробь оканчивается одним или несколькими нулями, то эти нули можно отбросить- получится равная ей дробь.

При сложении десятичных дробей надо записать их одну под другой так, чтобы одинаковые разряды были друг под другом, а запятая -под запятой, и сложить дроби так, как складывают натуральные числа. В ответе запятая располагается под запятыми. Например,

+	0,	1	2
	1,	0	5
	1,	1	7

Аналогично выполняется вычитание десятичных дробей. **При умножении десятичных дробей** достаточно перемножить заданные числа, не обращая внимания на запятые (как натуральные числа), а затем в результате справа отделить запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях суммарно.

	×	2,	1	2
		0,	1	3
		6	3	6
		2	1	2
0,		2	7	5

Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как деление натурального числа на натуральное, а запятую в частном ставят после того, как закончено деление целой части. Для

того чтобы **разделить десятичную дробь на десятичную** нужно и в делимом и в делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их имеется в делителе. **Для того чтобы сложить (или вычесть) две обыкновенные дроби с разными знаменателями** нужно предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю, затем сложить

(вычесть) числитель первой дроби с числителем второй дроби, а знаменатель оставить тем же.

Например, $\frac{7}{9} + \frac{5}{12} = \frac{28}{36} + \frac{15}{36} = \frac{43}{36} = 1\frac{7}{36}$

Произведение двух дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель равен произведению знаменателей. Два числа называются взаимно обратными, если их произведение равно 1.

Например, 3 и $\frac{1}{3}$.

При делении обыкновенной дроби на обыкновенную дробь числитель делимого умножают на знаменатель делителя, а

знаменатель делимого- на числитель делителя. Первое произведение служит числителем, а второе знаменателем частного.

Процентом называется сотая часть какого-либо числа.

Самостоятельная работа

1. $\left(\frac{51}{60} \cdot \frac{12}{17}\right) : \frac{3}{10};$

2. $\left(3\frac{1}{12} + 1\frac{5}{12}\right) : 1\frac{1}{2};$

3.
$$\frac{\left(152\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8}\right) \cdot 0,3}{0,2}$$

4.
$$\frac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + 0,5}{0,0001 : 0,005}$$

5. Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 26 кг яблок?

6. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за 1 минуту разговора
«Повременный»	Нет	0,35 руб.
«Комбинированный»	140 руб. за 350 мин.	0,3 руб. (сверх 350 мин. в месяц)
«Безлимитный»	200 руб.	—

Абонент выбрал самый дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составляет 700 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет составлять 700 минут? Ответ дайте в рублях.

7. Стоимость проездного билета на месяц составляет 800 рублей. А стоимость билета на одну поездку 22 рубля. Аня купила проездной и сделала за месяц 45 поездок. Сколько рублей она сэкономила?

8.
$$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12} - 2\frac{11}{18} + 2\frac{1}{24}\right) \cdot 1\frac{5}{31} - \frac{3}{52} \cdot \left(3\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right)\right) \cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84} : \left(5\frac{13}{42} - 2\frac{13}{28} + \frac{5}{24}\right) + 1\frac{2}{27} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}}$$

9. В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 6 человек следует взять 2,5 фунта чернослива, $\frac{1}{4}$ фунта миндаля и $\frac{1}{3}$ фунта сливочного масла. Сколько граммов чернослива следует взять для пирога, рассчитанного на 9 человек?

Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

Домашнее задание: учебник с. 10 №1. с.15 №7.

Практические занятия 2.

Приближенные вычисления

Цель:

Показать формулы для вычисления границ абсолютной и относительной погрешности суммы, разности, произведения и частного приближенных значений чисел;

Научить вычислять сумму, разность, произведение и частное приближенных значений чисел.

Сведения из теории:

Сложение приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b,$$

где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности суммы вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a+b}=\frac{\Delta(a+b)}{a+b}.$$

Пример 1.

Найти сумму S приближенных значений чисел $6,8\pm 0,05$; $4,3\pm 0,05$ и $3,575\pm 0,0005$.

Решение:

вычислим сумму заданных чисел и сумму их погрешностей:

$$S=6,8+4,3+3,575=14,675;$$

$$\Delta S=0,05+0,05+0,0005=0,1005.$$

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах $0,05<0,1005<0,5$. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц $S=14,675\approx 15$.

Вычитание приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей:

$$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b.$$

Граница относительной погрешности разности вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a-b} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a - b}.$$

Пример 2.

Вычислить разность двух приближенных значений чисел $a = 5,863 \pm 0,0005$ и $b = 2,746 \pm 0,0005$. Найти $\Delta(a-b)$ и ε_{a-b} .

Решение:

вычисляем границу абсолютной погрешности разности $a-b$:

$$\Delta(a-b) = 0,0005 + 0,0005 = 0,001.$$

В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной, так как $\Delta(a-b) > 0,0005$. Итак, $a-b = 3,117 \approx 3,12$. Абсолютная погрешность разности 0,001. В приближенном числе 3,12 все цифры верные. Находим относительную погрешность разности:

$$\varepsilon_{a-b} = \frac{0,001}{3,12} = 0,00032 \approx 0,03\%.$$

Умножение приближенных значений чисел

Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного) сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного), а затем границу абсолютной погрешности произведения (частного).

Формулы для границ абсолютной и относительной погрешности некоторых функций приведены в таблице 1.

Таблица 1. Формулы для границ абсолютной и относительной погрешностей.

№ п/п	Функция	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности
1	$y = ab$	$\Delta y = b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
2	$y = abc$	$\Delta y = bc \cdot \Delta a + ac \cdot \Delta b + ab \cdot \Delta c$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$
3	$y = a^n$	$\Delta y = n a^{n-1} \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = n \frac{\Delta a}{a}$
4	$y = a^2$	$\Delta y = 2a \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = 2 \frac{\Delta a}{a}$
5	$y = a^3$	$\Delta y = 3a^2 \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = 3 \frac{\Delta a}{a}$

6	$y = \sqrt{a}$	$\Delta y = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{2a}$
7	$y = \sqrt[3]{a}$	$\Delta y = \frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{3a}$
8	$y = \frac{a}{b}$	$\Delta y = \frac{ b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

Пример 3.

Найти верные цифры произведения приближенных значений чисел $a=0,3862$ и $b=0,8$.

Решение:

имеем $0,3862 \cdot 0,8 = 0,30896$. Границы абсолютной погрешности сомножителей равны 0,00005 и 0,05. По формуле $\varepsilon_{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$ находим относительную погрешность произведения:

$$\varepsilon_{ab} = \frac{0,00005}{0,3862} + \frac{0,05}{0,8} = 0,063.$$

Находим границу абсолютной погрешности произведения:

$$\Delta(ab) = 0,30896 \cdot 0,063 = 0,0195;$$

$$0,005 < 0,0195 < 0,05.$$

Полученный результат означает, что в произведении одна верная цифра (в разряде десятых): $0,30896 \approx 0,3$.

Пример 4.

Вычислить объем цилиндра $V = \pi R^2 H$, если $R=45,8$ см, $H=78,6$ см.

Решение:

по формуле объема цилиндра, имеем

$$V = \pi \cdot 45,8^2 \cdot 78,6 = 517000 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Используя формулу $\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$ и полагая $\pi \approx 3,14$, находим относительную погрешность:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{2\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} = \frac{0,005}{3,14} + \frac{2 \cdot 0,05}{45,8} + \frac{0,05}{78,6} = 0,0044.$$

Находим границу абсолютной погрешности:

$$\Delta V = V \cdot \varepsilon_v = 517\,000 \cdot 0,0044 = 2270 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Верными цифрами являются 5 и 1.

Деление приближенных значений чисел

Пример 5.

Найти границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел $a=8,36 \pm 0,005$ и $b=3,72 \pm 0,004$.

Решение:

имеем $8,36:3,72=2,25$.

По формуле $\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$ находим относительную погрешность частного:

$$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{0,005}{8,36} + \frac{0,004}{3,72} = 0,002 = 0,2\%.$$

Находим границу абсолютной погрешности частного:

$$\Delta(a/b) = 2,25 \cdot 0,002 = 0,0045.$$

Полученный результат означает, что в частном все три цифры верные.

Пример 6.

Вычислить $X = \frac{a}{b+c}$, если известно, что $a=7,2 \pm 0,05$, $b=3,46 \pm 0,03$, $c=5,09 \pm 0,04$.

Решение:

$$\text{находим } X = \frac{a}{b+c} = \frac{7,2}{3,46+5,09} = 0,844;$$

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b + \Delta c}{b+c} = \frac{0,05}{7,2} + \frac{0,03+0,04}{8,55} = 0,015;$$

$$\Delta X = X \cdot \varepsilon_X = 0,844 \cdot 0,015 = 0,0127; X = 0,844 \pm 0,0127 \text{ или } X \approx 0,84 \pm 0,01.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите сумму, разность, произведение и частное приближенных значений чисел:

1 вариант $\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}$ с четырьмя значащими цифрами.	2 вариант $0,456 \pm 0,0005$ и $3,35 \pm 0,005$.	3 вариант $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ с четырьмя значащими цифрами.
4 вариант $8,72$ и $2,6532$, границы абсолютной погрешности которых соответственно равны $0,005$ и $0,00005$.	5 вариант $6,54 \pm 0,005$; $16,022 \pm 0,0005$ и $1,9646 \pm 0,00005$.	6 вариант $\sqrt{5}, \sqrt{7}$ взяв приближенные значения корней с точностью до $0,001$.
7 вариант $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}$ с четырьмя значащими цифрами.	8 вариант $a = 19,8 \pm 0,05$ и $b = 48,4 \pm 0,03$.	9 вариант $a = 68,4 \pm 0,02$ и $b = 72,8 \pm 0,4$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите действия над приближенными значениями чисел.
2. Перечислите формулы для вычисления границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций.

Домашнее задание: учебник с18 № 4,5; с.22 №2.

Практическое занятие № 3,4

Вычисление и сравнение корней. Расчет по формулам, содержащим радикалы.

Цель:

Показать основные показательные тождества, свойства степеней с действительными показателями; научить вычислять степени с действительными показателями.

Сведения из теории:

Повторим определения *понятия степени* с натуральным, нулевым, целым отрицательным и рациональным показателями:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots \cdot a}_n; a^{-n} = 1/(a^n); a^0 = 1, a \neq 0; a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},$$

$$\begin{array}{c} n \text{ раз} \\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \end{array}$$

Степень с действительным показателем

Свойства степеней с действительным показателем:

1. $a^{x/y} = a^{(xk)/(yk)}$, $a > 0$, $y, k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$.
2. $a^x > 0$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ (любая степень положительного числа положительна).
3. $a^x > 1$ при $a > 1$, $x > 0$.
4. $a^x < 1$ при $a > 1$, $x < 0$.
5. $1^x = 1$ (любая степень единицы равна единице).
6. $a^x < 1$ при $0 < a < 1$, $x > 0$.
7. $a^x > 1$ при $0 < a < 1$, $x < 0$.
8. Если $a > 1$, $a \neq 1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число x такое, что $a^x = b$ при $b > 0$.
9. Любая положительная степень нуля равна нулю.

Кроме перечисленных свойств важно отметить три свойства, на которых основано решение простейших показательных уравнений и неравенств:

10. Если $a^x = a^y$, то $x = y$ при $a > 0$, $x, y \neq 1$.
11. Если $a^x < a^y$, то $x < y$ при $a > 0$.
12. Если $a^x < a^y$, то $x > y$ при $0 < a < 1$.

Правила действия над степенями с действительным показателем выражаются формулами (тождествами):

Свойства степеней	Свойства корней n-ой степени
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n \cdot k]{a^{n \cdot k}} = \sqrt[n]{a^k}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\sqrt[n]{a^n} = a$
$a^0 = 1$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$	
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	
10. $ ab ^a = a ^a b ^a$ при $ab > 0$.	
11. $ a/b ^a = a ^a / b ^a$ при $ab > 0$.	

Пример 1.

Вычислите:
$$\frac{7^{-1} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} - 64^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{-2}}{5^{-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Решение:

упростим заданное выражение, используя свойства степеней:

$$\begin{aligned} \frac{7^{-1} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} - 64^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{-2}}{5^{-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}} &= \frac{\frac{1}{7} \cdot 49^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{5} - 9^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{7} \sqrt{49} - \sqrt{\frac{1}{64}} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{5} - \sqrt{9}} = \frac{\frac{1}{7} \cdot 7 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{5} - 3} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{72}}{-2\frac{4}{5}} = \frac{\frac{72}{72} - \frac{1}{72}}{-\frac{14}{5}} = \frac{\frac{71}{72}}{\left(-\frac{14}{5}\right)} = \frac{71}{72} \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) = -\frac{355}{1008}. \end{aligned}$$

Пример 2.

Вычислите:
$$\frac{8^{-\frac{2}{3}} \cdot 25^{-\frac{1}{2}} - 2^{-1}}{64^{0,25} \cdot 2^{0,5}}.$$

Решение:

упростим заданное выражение, используя свойства степеней:

$$\frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 2^{-1}}{64^{0,25} \cdot 2^{0,5}} = \frac{(2^3)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}{(2^6)^{0,25} \cdot 2^{0,5}} = \frac{2^{-2} \cdot \sqrt{\frac{1}{25}} - \frac{1}{2}}{2^{1,5} \cdot 2^{0,5}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{2}}{2^2} = \frac{\frac{1}{20} - \frac{1}{2}}{4} =$$

$$= -\frac{\frac{9}{20}}{4} = -\frac{9}{80}.$$

Пример 3.

Вычислите: $\sqrt[5]{7 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7 + \sqrt{17}}$.

Решение:

используя свойства степеней, имеем:

$$\sqrt[5]{7 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7 + \sqrt{17}} = \sqrt[5]{(7 - \sqrt{17})(7 + \sqrt{17})} = \sqrt[5]{7^2 - (\sqrt{17})^2} = \sqrt[5]{49 - 17} =$$

$$= \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2.$$

Задания для самостоятельного решения:

1. Найдите значение выражения: $9^{\sqrt{2}+6} \cdot 9^{-1-\sqrt{2}}$
2. Найдите значение выражения: $\frac{x^{15} \cdot x^{-4}}{x^7}$ при $x = 8$
3. Найдите значение выражения: $\frac{x^{16} \cdot x^{10}}{x^{23}}$ при $x = 8$
4. Вычислить без калькулятора $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$
5. Вычислить без калькулятора $\sqrt{9 \cdot 121 \cdot 64}$;
Вычислить без калькулятора $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$;
6. Вычислить без калькулятора $\sqrt{13^2 - 12^2}$;
7. Вычислить без калькулятора $\sqrt{313^2 - 312^2}$;
8. Вычислить без калькулятора $\sqrt{936^2 - 864^2}$;
9. Вычислить без калькулятора $\sqrt{325^2 - 300^2}$;
10. Вычислить без калькулятора $\sqrt{35^2 - 28^2}$;
11. Вычислить без калькулятора $\sqrt{320^2 - 192^2}$;
12. Вычислить без калькулятора $\sqrt{610^2 - 272^2}$;
13. Вычислить без калькулятора $\sqrt{0,09} + \sqrt{0,16}$;

1 вариант №1. Вычислите: 1) $2 \cdot 2^{-3}$; 2) $\frac{(3^{-2})^3 \cdot 27^2}{3}$. №2. Упростите: $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}}$.	2 вариант №1. Вычислите: 1) $5^{-2} \cdot 5$; 2) $\frac{(2^{-2})^4 \cdot 16^2}{2^3}$. №2. Упростите: $a^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{4}}$.	3 вариант №1. Вычислите: 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 2) $3\sqrt[3]{-27} + 0,1\sqrt[4]{81} - \sqrt{1}$. №2. Упростите: $x^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{2}}$.

4 вариант №1. Вычислите: 1) $(\sqrt{5})^{-8}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. №2. Упростите: $\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^4 y^{\frac{5}{2}}$.	5 вариант №1. Вычислите: 1) $5 \cdot 8^{\frac{1}{3}}$; 2) $(\sqrt[3]{5})^{-12}$. №2. Упростите: $\frac{c^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{6}}}$.	6 вариант №1. Вычислите: 1) $36^{\frac{1}{2}} \cdot 2$; 2) $\frac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}$. №2. Упростите: $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} x^{\frac{2}{3}}$.
7 вариант №1. Вычислите: 1) $16^{-\frac{1}{2}}$; 2) $5\sqrt[4]{16} - 0,2\sqrt[3]{-0,027} + \sqrt[5]{1}$. №2. Упростите: $a^{\frac{7}{2}} \sqrt{a}$.	8 вариант №1. Вычислите: 1) $27^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[5]{32 \cdot 0,00001}$. №2. Упростите: $y^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{y}$.	9 вариант №1. Вычислите: 1) $\sqrt[4]{0,0001 \cdot 16}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$. №2. Упростите: $2\sqrt[3]{\sqrt{a}} - \sqrt[6]{ab} : \sqrt[6]{b}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные показательные тождества.
2. Перечислите свойства степеней с действительными показателями.

Домашнее задание: учебник с.36 №1, 2,3.

Практическое занятие № 5

Преобразования рациональных, иррациональных, степенных выражений.

Цель: Повторение, закрепление и систематизация знаний по теме.

Сведения из теории:

Выражениями в алгебре называют записи, состоящие из чисел и букв, соединенных знаками действий.

$\frac{3x}{4x+1}$; $a^2 - b^2 + c$; $\sqrt{x-2} + 9$; x^n – алгебраические выражения.

В зависимости от операций различают рациональные и иррациональные выражения.

Алгебраические выражения называют рациональными, если относительно входящих в него букв a , b , c , ... не выполняется никаких других операций, кроме операций сложения, умножения, вычитания, деления и возведения в целую степень.

Алгебраические выражения, содержащие операции извлечения корня из переменной или возведения переменной в рациональную степень, не являющуюся целым числом, называются иррациональными относительно этой переменной.

Тождественным преобразованием данного выражения называется замена одного выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве.

В основе тождественных преобразований рациональных и иррациональных выражений лежат следующие теоретические факты.

1. Свойства степеней с целым показателем:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ - множителей}}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad a^1 = a;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0; \quad a^0 = 1, \quad a \neq 0;$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a \neq 0;$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}, \quad a \neq 0;$$

$$(a^n)^m = a^{nm}, \quad a \neq 0;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0;$$

$$(ab)^m = a^m b^m, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

2. Формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3; \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

где a, b, c – любые действительные числа;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad \text{где } a \neq 0, \quad x_1 \text{ и } x_2 \text{ – корни уравнения } ax^2 + bx + c = 0.$$

3. Основное свойство дроби и действия над дробями:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \quad \text{где } b \neq 0, \quad c \neq 0;$$

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}; \quad \frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

4. Определение арифметического корня и его свойства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0; \quad (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \quad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a},$$

где a, b – неотрицательные числа, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.

Практические задания:

1.

$$8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} - 16 : 16^{\frac{3}{4}} + \left(9^{\frac{1}{7}}\right)^{\frac{7}{2}} = 8^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} - (2^4)^{\frac{1}{4}} + (3^2)^{\frac{1}{2}} = 2^2 - 2 + 3 = 4 - 2 + 3 = 5$$

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8;$$

$$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7 \sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{3^{-6}} = \sqrt[3]{(3^{-2})^3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

2

$$1) 7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 7;$$

$$2) 9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$$

$$3) \left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$$

$$4) 24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4 \sqrt[3]{3^2} = 4 \sqrt[3]{9};$$

$$5) \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}.$$

3

Упростить выражение $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}.$

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab. \triangleleft$$

4

Упростить выражение $\frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}}.$

Применяя свойства степени с действительным показателем, получаем

$$\frac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \frac{a^2}{a} = a. \triangleleft$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить: а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; в) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$; г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$
2. Представить в виде степени с рациональным показателем: а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; б) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$;
3. Вычислить: а) $3^{1+2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}}$; б) $(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$;
4. Сравнить числа: а) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}$; в) $0,88^{\frac{1}{6}}$ или $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$ г) $\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{4}}$ или $(0,41)^{-\frac{1}{4}}$
5. Упростить выражение: а) $\frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$; б) $\frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{4}{9}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$

Домашнее задание: учебник с. 36 №3 (5,6)

1) Простейшие уравнения, т.е. такие, левую и правую части которых можно привести к одному основанию решаются так:

2) Уравнения вида $2^x + 2^{x-1} - 2^{x-3} = 4$ решаются вынесением за скобки степени с наименьшим показателем.

3) Уравнения, вида $7^{2x} - 48 \cdot 7^x = 49$ решаются с помощью подстановки $a^x = y$, сводится к квадратному.

4) При решения уравнения вида $a^x = b^x$ обе части уравнения необходимо разделить на b^x , т.к. $b^x \neq 0$

$$\frac{a^x}{b^x} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Решение показательных неравенств сводится к решению простейших неравенств вида $a^x > a^b$

$$\text{или } a^x < a^b$$

Если $a > 1$ и $a^x > a^b$, то $x > b$

Если $0 < a < 1$ и $a^x > a^b$, то $x < b$

3. Практические задания:

1. Найти значения выражений: $7^9 \cdot 3^{11} : 21^8$, $24^7 : 3^6 : 16^5$, $30^6 : 6^5 : 25^2$.

Решение. Разложим все основания степеней на простые множители:
 $7^9 \cdot 3^{11} : 21^8 = 7^9 \cdot 3^{11} : (7 \cdot 3)^8 = 7^9 \cdot 3^{11} : (7^8 \cdot 3^8) = 7^9 \cdot 3^{11} : 7^8 \cdot 3^8 = 7 \cdot 3^3 = 189.$

$$24^7 : 3^6 : 16^5 = (3 \cdot 2^3)^7 : 3^6 : (2^4)^5 = 3^7 \cdot 2^{21} : 3^6 : 2^{20} = 3 \cdot 2 = 6.$$

$$30^6 : 6^5 : 25^2 = (5 \cdot 3 \cdot 2)^6 : (3 \cdot 2)^5 : (5^2)^2 = 5^6 \cdot 3^6 \cdot 2^6 : 3^5 : 2^5 : 5^4 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2 = 150.$$

Ответ: 189; 6; 150

2. $5^x = 625 \Rightarrow 5^x = 5^4 \Rightarrow x = 4$. Ответ: $x = 4$

3. Решить уравнение: $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$

Решение:

$$5^x = y,$$

$$5y^2 - 26y + 5 = 0,$$

$$D = 169 - 25 = 144,$$

$$y_1 = 5 \quad y_2 = 1/5$$

$$5^x = 5$$

$$x = 1,$$

$$5^x = 1/5$$

$$x = -1$$

Ответ: $x = 1$ и $x = -1$

4. Решить неравенство: $(\sqrt{5})^{4-x} \geq \frac{1}{125}$

Решение:

$$5^{(4-x)/2} \geq 5^{-3}, \quad a = 5, \text{ сравним показатели } (4-x)/2 \geq -3, \quad 4-x \geq -6, \quad -x \geq -10, \quad x \leq 10$$

Ответ: $x \leq 10$

5. Упростите: $\frac{2a^3b^8c^4}{6a^4b^{-3}c^5}$.

Решение:

используя свойства степеней, имеем:

$$\frac{2a^3b^8c^4}{6a^4b^{-3}c^5} = \frac{a^{3-4}b^{8-(-3)}c^{4-5}}{3} = \frac{a^{-1}b^{11}c^{-1}}{3} = \frac{b^{11}}{3ac}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25$; б) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$; в) $0,2^{x^2+4x-5} = 1$

г) $4^x + 2^x - 20 = 0$; д) $(\sqrt{10})^x = 10^{x^2-x}$

2. Решить неравенство:

а) $7^{x-2} > 49$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^x > 1\frac{1}{3}$; в) $9^x - 3^x - 6 > 0$; г) $(\sqrt{5})^{x-6} < \frac{1}{5}$;

д) $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geq 1$.

3. Вычислите:

$$\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} + \sqrt[4]{\frac{16}{625}} - \sqrt[4]{5\frac{1}{16}}.$$

4 . Упростите:

$$\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{b}} + 2\sqrt{\sqrt{a}}.$$

Домашнее задание: учебник с.33 №5 (1,3)

Практическое занятие № 6

Нахождение логарифма по заданному основанию. Вычисление логарифмов с использованием основных свойств логарифмирования.

Цель: Знать определение логарифма числа, основное логарифмическое тождество, свойства логарифмов.

Сведения из теории

Логарифмом числа b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить число b .

Определение логарифма можно записать так $a^{\log_a b} = b$. Его называют основным логарифмическим тождеством.

При преобразовании и вычислении значений логарифмических выражений применяют свойства логарифмов.

Свойства

$$1. \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$2. \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$3. \log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

$$4. \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \cdot \log_a b$$

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $lg b$ вместо $\log_{10} b$

$$\log_{10} b = lg b$$

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e , где e - иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут $ln b$ вместо $\log_e b$, т.е. $\log_e b = ln b$

Практические задания:

1.

- 1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2$;
- 2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1$;
- 3) $\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \log_3 3 = \frac{1}{7}$.

2.

Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50$.

Применяя формулы (1) — (3), находим

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3} \cdot 50}{\sqrt{12}} = \log_5 25 = 2. \quad \triangleleft$$

3. Найти значения выражений:

$$\log_6 270 - \log_6 7,5$$

$$\log_9 \log_2 \sqrt[27]{2}$$

Решение. Первое выражение преобразуется как разность логарифмов:

$\log_6 270 - \log_6 7,5 = \log_6 (270 : 7,5) = \log_6 36 = 2$; Для вычисления второго выражения придется выделять степени — как в основании, так и в аргументе. Для начала найдем внутренний логарифм:

$$\log_2 \sqrt[27]{2} = \log_2 \left(2^{\frac{1}{27}} \right) = \frac{1}{27} \log_2 2 = \frac{1}{27}$$

Затем — внешний:

$$\log_9 \frac{1}{27} = \log_{3^2} 3^{-3} = \frac{-3}{2} \log_2 2 = -1,5$$

Ответ: 2; 3; -1,5

Конструкции вида $\log_a \log_b x$ многим кажутся сложными и непонятными. А между тем, это всего лишь логарифм от логарифма, т.е. $\log_a (\log_b x)$. Сначала вычисляется внутренний логарифм (положим $\log_b x = c$), а затем внешний: $\log_a c$.

4. Найти значения выражений:

$$5 \cdot 49^{\log_7 3}; 3^{\log_3 11} + 2^{\log_2 125}; \frac{33}{5^{\log_5 121}}$$

Решение. Будем действовать по схеме. Для первого выражения все очевидно:

$$5 \cdot 49^{\log_7 3} = 5 \cdot 7^{2 \log_7 3} = 5 \cdot 7^{\log_7 (3^2)} = 5 \cdot 3^2 = 45$$

Для второго выражения заметим, что

$$2^{\log_2 125} = 2^{\log_{(2^3)} (5^3)} = 2^{\log_2 5} = 5$$

Поэтому имеем:

$$2^{\log_2 11} + 2^{\log_2 125} = 11 + 2^{\log_2 5^3} = 11 + 2^{\frac{1}{3} \log_2 5^3} = 11 + 5 = 16$$

Аналогично поступим с третьим выражением:

$$5^{\log_5 121} = 5^{\log_{(5^2)} (11^2)} = 5^{\log_5 11} = 11$$

В результате получим:

$$\frac{33}{5^{\log_2 121}} = \frac{33}{11} = 3$$

Ответ: 45; 16; 3

Задания для самостоятельного решения:

1. **Вычислить:** а) $9^{2\log_3 5}$; б) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$; в)

$$\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$$

Домашнее задание: учебник с 39 № 1(2,3)

Преобразование логарифмических выражений

Цель:

выучить определение логарифма числа, формулы основного логарифмического тождества, логарифма произведения, частного, степени, перехода от одной системы логарифмов к другой; научиться вычислять значения несложных логарифмических выражений.

Сведения из теории:

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени (x), в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b , т.е. $\log_a b = x \rightarrow a^x = b$.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1. $a^{\log_a b} = b$ (где $b > 0$, $a > 0$ и $a \neq 0$) называют *основным логарифмическим тождеством*.

При любом $a > 0$ ($a \neq 0$) и любых положительных x и y выполняются равенства:

2. $\log_a 1 = 0$.

3. $\log_a a = 1$.

4. Логарифм произведения равен сумме логарифмов:
 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

5. Логарифм частного равен разности логарифмов: $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$.

6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $\log_a x^k = k \log_a x$.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула

перехода к новому основанию: $\log_a x = \log_b x / \log_b a$. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при $x > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, $b > 0$ и $b \neq 1$).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x})$, откуда $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

Пример 1.

Вычислите, используя определение логарифма числа $\log_{13} \sqrt[5]{169} + \log_{11} \sqrt[3]{121}$.

Решение:

вычислим отдельно каждый логарифм:

$$\begin{aligned} \log_{13} \sqrt[5]{169} &= x, & \log_{11} \sqrt[3]{121} &= x, \\ 13^x &= \sqrt[5]{169}, & 11^x &= \sqrt[3]{121}, \\ 13^x &= \sqrt[5]{13^2}, & 11^x &= \sqrt[3]{11^2}, \\ 13^x &= 13^{\frac{2}{5}}, & 11^x &= 11^{\frac{2}{3}}, \\ x &= \frac{2}{5}. & x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Вернемся в пример: } \log_{13} \sqrt[5]{169} + \log_{11} \sqrt[3]{121} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{6+10}{15} = \frac{16}{15} = 1 \frac{1}{15}.$$

Пример 2.

Вычислите, используя основное логарифмическое тождество: $10^{3\lg 2 - 1}$.

Решение:

используя свойство степени, разложим данное выражение на множители:

$$10^{3\lg 2 - 1} = 10^{3\lg 2} \cdot 10^{-1}.$$

Используя 6 свойство логарифма степени, имеем:

$$10^{3\lg 2 - 1} = 10^{3\lg 2} \cdot 10^{-1} = 10^{\lg 2^3} \cdot \frac{1}{10}.$$

Используя основное логарифмическое тождество, имеем:

$$10^{3\lg 2 - 1} = 10^{3\lg 2} \cdot 10^{-1} = 10^{\lg 2^3} \cdot \frac{1}{10} = 2^3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1) $\log_{16} 0,5$;	1) $\log_{64} (1/16)$;	1) $\log_4 8^7$;
2) $100^{\lg \sqrt{5}}$;	2) $5^{-6 \log_5 2}$;	2) $36^{0,5 - \log_6 \sqrt{5}}$;

3) $\frac{\lg 4}{\lg 64 - \lg 8}$.	3) $\frac{\lg 4}{\lg 16 - \lg 8}$.	3) $\frac{\lg 3 + \lg 27}{\lg 9}$.
4 вариант 1) $\log_{0,2} 0,08$; 2) $49^{\frac{1}{2} + \log_7 2}$; 3) $\frac{\lg^2 7 - 1}{\lg 70}$.	5 вариант 1) $\lg 0,01$; 2) $4^{\log_2 3 + 2 \log_4 \sqrt{3}}$; 3) $\frac{1 - \lg^2 3}{\lg 30}$.	6 вариант 1) $\log_5 0,04$; 2) $0,01^{\lg \sqrt{5}}$; 3) $\frac{\log_2 64}{\log_2 \sqrt{16}}$.
7 вариант 1) $\log_{\sqrt{2}} 8$; 2) $25^{\log_5 3 - \log_{25} 27}$; 3) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3}$.	8 вариант 1) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27$; 2) $100^{\lg \sqrt{5} + \lg 10}$; 3) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$.	9 вариант 1) $\log_3 \frac{1}{243}$; 2) $1000^{\lg 10 - \lg \sqrt{5}}$; 3) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16} + \frac{\log_5 27}{\log_5 9}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение логарифма числа.
2. Перечислите свойства логарифмов.

Домашнее задание: учебник с 39 №2 (4,6)

Практическое занятие № 7

Решение логарифмических уравнений. Выполнение преобразований выражений, применений формул, связанных со свойствами степеней и логарифмов

Цель: Знать методы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, уметь применять их при решении соответствующих заданий.

Сведения из теории:

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, называются логарифмическими.

Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то и равны их логарифмы при данном основании и обратно, если логарифмы чисел равны, то равны и соответствующие им числа. Во всех случаях полученные решения необходимо проверить подстановкой их в данное уравнение и исключить посторонний корень. Часто используется формула перехода от одного основания к другому $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

При решении простейших логарифмических неравенств типа $\log_a x > \log_a b$ необходимо использовать следующее правило:

Если $a > 1$, то знак неравенства не меняется, т.е. $x > b$

Если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется на противоположный, т.е. $x < b$.

При решении логарифмических неравенств необходимо проверить, входит ли полученное решение в область определения неравенства.

Практические задания:

1. Решить уравнение $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$

Решение

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3 \quad 3 = \log_2 8$$

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = \log_2 8$$

$$(x+1) \cdot (x+3) = 8$$

$$x^2 + 4x + 3 = 8$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -5$$

Проверка

$$x = 1 \quad \log_2(1+1) + \log_2(1+3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3 \quad - \text{ левая часть}$$

$$3 = 3 \Rightarrow x = 1 - \text{ корень уравнения}$$

$$x = -5 \quad \log_2(-5+1) + \log_2(-5+3) = \log_2(-4) + \log_2(-2) \quad - \text{ левая часть не имеет}$$

смысла $\Rightarrow$

$x = -5$ не является корнем

Ответ: $x = 1$

2. Решить неравенство $\lg(x+1) \leq 2$

Решение

$$\lg(x+1) \leq 2 \quad 2 = \lg 100$$

$$\lg(x+1) \leq \lg 100$$

$$a = 10, \quad a > 1 \Rightarrow x+1 \leq 100$$

$$x \leq 99$$

Область определения: $x+1 > 0$

$$x > -1$$

$$\text{Общее решение: } \begin{cases} x \leq 99, \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-1 < x \leq 99$$

Ответ: $-1 < x \leq 99$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение:

$$a) \quad \log_5(2x-1) = 2 \quad ; \quad б) \quad \lg(x-1) + \lg x = 0; \quad в) \quad \log_5 \frac{1-2x}{x+3} = 1 \quad ; \quad г)$$

$$\log_8 x + \log_{\sqrt{2}} x = 14$$

2. Решить неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(x-5) > 1$ в) $\log_{\frac{1}{6}}(10-x) + \log_{\frac{1}{6}}(x-3) \geq -1$;
 з) $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$

Домашнее задание: учебник с.48 №1(1-6), с 49№3 (1-6)

Практическое занятие № 8

Преобразование алгебраических выражений Приближенные вычисления и решения прикладных задач.

Цель: Закрепить и систематизировать знания по теме.

Сведения из теории:

Свойства

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$ $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \cdot \log_a b$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $a^n / a^m = a^{n-m}$; $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $(a : b)^n = a^n : b^n$.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула перехода к новому основанию: $\log_a x = \log_b x / \log_b a$. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при $x > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, $b > 0$ и $b \neq 1$).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$\log_b x = \log_b(a^{\log_a x})$, откуда $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

Практические задания:

1. Вычислить $\log_{64} 128$.

Обозначим $\log_{64} 128 = x$. По определению логарифма $64^x = 128$. Так

как $64 = 2^6, 128 = 2^7$, то $2^{6x} = 2^7$, откуда $6x = 7, x = \frac{7}{6}$.

2. Вычислить $3^{-2 \log_3 5}$.

Используя свойства степени и основное логарифмическое тождество,

находим $3^{-2 \log_3 5} = (3^{\log_3 5})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.

3. Решить уравнение $\log_3(1-x) = 2$.

По определению логарифма $3^2 = 1-x$, откуда $x = -8$.

4. При каких значениях x существует $\log_5 \frac{x-1}{2-x}$?

Так как основание логарифма $5 > 0$, и $5 \neq 1$, то данный логарифм существует

только тогда, когда $\frac{x-1}{2-x} > 0$. Решая это неравенство, находим $1 < x < 2$.

5. Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50$.

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3} \cdot 50}{\sqrt{12}} = \log_5 25 = 2$$

6. Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

$\log_7 25$; 2) $\log_9 0,75$.

7. Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

$\log_7 5$; 2) $\log_{1,1} 0,23$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить:

а) $(\log_7 15 + \log_7 4 - \log_7 6) \cdot \lg 7$;

б) $\frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21}$

2. Решить уравнение.

$$\log_3 x + 2 \log_9 x + 3 \log_{27} x + 4 \log_{81} x = 8$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется показательным уравнением?
 2. Запишите свойство, которое используют при решении показательных уравнений.
3. Что называется логарифмическим уравнением?
4. Перечислите способы решения уравнений, содержащих переменную под знаком логарифма или в основании логарифма

Домашнее задание: учебник с.39 №3 (8-12)

Практическое занятие № 9

Изображение углов вращения на окружности, соотнесение величины углов с его расположением.

Цель:

повторить единицы измерения угловых величин, геометрический смысл числа π и его значение: рассмотреть понятие «числовая окружность», закрепить изученное в ходе выполнения упражнений.

Сведения из теории:

Радианная мера

Угол в 1 радиан – это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности.

Рadianная и градусная меры связаны между собой зависимостью $180^0 = \pi$ радиан; угол в $n^0 = \frac{\pi n}{180^0}$ радиан.

Значения тригонометрических функций могут быть найдены так, как это делалось в курсе геометрии, из прямоугольного треугольника с гипотенузой равной 1 и по очереди задаваемых углов: 30^0 , 45^0 , 60^0 .

Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям:

Номер координатной четверти	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	–	–
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	–	+	–
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	–	+	–

Единственная четная функция – косинус

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Все остальные основные тригонометрические функции нечетные:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Таблица 2. Значения основных тригонометрических функций

Рadianная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Градусная мера угла	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Радианная мера угла	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Градусная мера угла	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Пример 1.

Вычислите: $\sin 405^0$.

Решение:

полный круг – 360^0 можно «отбросить»:

$$\sin 405^0 = \sin(405^0 - 360^0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2.

Выразите в радианной мере значение угла 36^0 .

Решение:

чтобы «перевести» градусную меру угла в радианную, необходимо

заданное значение умножить на $\frac{\pi}{180^0}$, т.о. получим

$$36^0 = \frac{36^0 \pi}{180^0} = \frac{\pi}{5}.$$

Пример 3.

Выразите в градусной мере значение угла $\frac{2\pi}{5}$.

Решение:

чтобы «перевести» радианную меру угла в градусную, необходимо

заданное значение умножить на $\frac{180^0}{\pi}$, т. о. получим

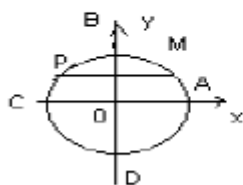
$$\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{360^0}{5} = 72^0.$$

Практические задания:

1.

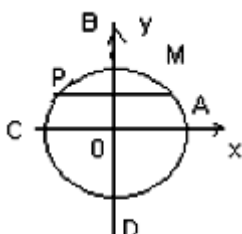
$$P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right); \frac{45\pi}{4} = 10\pi + \frac{5\pi}{4} = 2\pi \cdot 5 + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

1. **Пример 2.** Точка $M\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$



Точка $P\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$. Две серии значений.

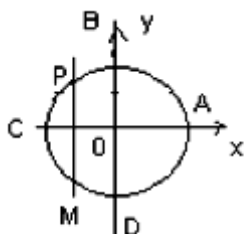
3.



$$y > \frac{1}{2}; \frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}, y < \frac{1}{2}.$$

4.



$$t > -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$t < -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

Задания для самостоятельного решения:

- 1) Чему равна точная радианная мера дуг: 1) 240° ; 2) 300° ?
- 2) Чему равна точная градусная мера дуг: 1) $7\pi/6$; 2) $5\pi/4$?
- 3) Колесо $R = 0,65$, повернулось на угол $1,4$ рад.. Найти длину пути, пройденного точкой обода колеса.
- 4). Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 60° ; $\frac{\pi}{6}$.
- 5). Вычислите:

$$\sin 2010^\circ + 4\operatorname{tg}(-855^\circ) + \sqrt{3}\cos(-1590^\circ).$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется углом в 1 радиан?

2. В каких единицах измеряются углы?
3. Перечислите значения некоторых тригонометрических функций.
4. Определение синуса угла;
5. Определение косинуса угла;
6. Определение тангенса (котангенса) угла;
7. Таблица значений тригонометрических функций;
8. Знаки синуса и косинуса, тангенса.

5. Домашнее задание: учебник с. 98 №2-4

Практическое занятие № 10

Применение основных тригонометрических тождеств для вычисления значений функций. Применение формул приведения. Применение формул сложения.

Цель:

Выработать навыки применения основных тригонометрических тождеств и формул приведения для преобразования тригонометрических выражений.

Сведения из теории:

Основные формулы тригонометрии

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса следуют **основные тригонометрические тождества:**

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; \\ \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.\end{aligned}$$

Основой для остальных формул являются **формулы сложения:**

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Из формул сложения, полагая $\beta = \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbf{Z}$, получаем *формулы приведения* преобразования выражений вида:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \cos\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), n \in \mathbf{Z}.$$

Для запоминания этих формул удобно пользоваться мнемоническим правилом:

1. Перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в соответствующей координатной четверти:

2. Функция меняется на «кофункцию», если n нечетно; функция не меняется, если n четно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс, тангенс).

Пример 1.

Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,4 и 0,7.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, имеем:

$$0,4^2 + 0,7^2 = 0,16 + 0,49 = 0,65.$$

Т.к. $0,65 \neq 1$ значения синуса и косинуса одного и того же числа не могут быть равными соответственно: 0,4 и 0,7.

Пример 2.

Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin \alpha = -0,8$ и $\pi < \alpha < 1,5\pi$.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, имеем:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha, \text{ тогда } \cos^2 \alpha = 1 - (-0,8)^2 = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Т. к. $\pi < \alpha < 1,5\pi$ (III координатная четверть), то $\cos \alpha = -0,6$.

По формуле $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ вычисляем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

По формуле $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ вычисляем $\operatorname{ctg} \alpha = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$.

3. Доказать тождество: $\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)$

Доказательство: $(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$ - правая часть
 $\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

4. Доказать тождество: $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$

Доказательство: $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = 0$

5. Найти значение выражения, если $\operatorname{ctg} \alpha = 8$:

$$\frac{\sin\left(\frac{13}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(6\pi + \alpha)}{1 + \sin(2\pi - \alpha)}$$

Решение: Применив формулы приведения, получим:

$$\sin\left(\frac{13}{2}\pi - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(6\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

С учетом этих упрощений имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(\frac{13}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(6\pi + \alpha)}{1 + \sin(2\pi - \alpha)} &= \frac{\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{1 - \sin \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 - \sin \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 - \sin \alpha} = \frac{-\cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha = -8 \end{aligned}$$

Ответ: - 8.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,5 и 0,5. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$	2 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,2 и - 0,8. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$	3 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,6 и - 0,8. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos \alpha = \frac{15}{17} \text{ и } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$
4 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{7}{25}$ и $\frac{24}{25}$. 2) Найдите значения	5 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 2) Найдите значения	6 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. 2) Найдите значения

других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin \alpha = 0,5$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos \alpha = 0,4$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.	других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
7 вариант 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{5}{3}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.	8 вариант 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: 2,4 и $-\frac{5}{12}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin \alpha = 0,7$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	9 вариант 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos \alpha = 0,9$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные тригонометрические тождества.
2. Сформулируйте мнемоническое правило.

Домашнее задание: учебник с. 103-108.

**Применение формулы удвоения и формулы половинного угла.
Преобразование простейших тригонометрических выражений.**

Цель:

Использование тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений.

Сведения из теории:

Формулы двойного угла тригонометрических функций:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Подставляя в формулы $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ и $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ значение $t = \frac{\alpha}{2}$, получаем формулы *половинного аргумента*:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2},$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

Разделив $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ на $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ получаем формулу

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Пример 1.

Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла, $\sin 42^\circ$.

Решение:

используя формулу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, имеем
 $\sin 42^\circ = \sin(2 \cdot 21^\circ) = 2 \sin 21^\circ \cos 21^\circ$.

Пример 2.

Вычислите $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

Решение:

используя формулу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, имеем
 $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin(2 \cdot 15^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$.

Пример 3.

Вычислите $\sin(\pi/12)$.

Решение:

по формуле $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$, имеем

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \approx 0,068.$$

4. Вычислить: $\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) \cos^2(45^\circ - \alpha)}$

Решение: В числителе – формула двойного угла, в знаменателе после сокращения на косинус – тоже формула двойного угла.

5. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

По формуле $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ находим $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot (-0,6) \cos \alpha = -1,2 \cos \alpha$.

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8$.

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1,2 \cdot (-0,8) = 0,96$.

6. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,3$.

Используя формулу $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ и основное тригонометрическое тождество, получаем

Задания для самостоятельного решения:

1. Упростить выражение: $3\cos^2 \alpha - 6 + 3\sin^2 \alpha$
2. Найти значение выражения: $4\cos^2 x + 2$, если $\sin^2 x = 0,6$
3. Упростить выражение: $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$
4. Найти значение выражения: $\sin \frac{7\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$
5. Найти значение выражения: $2\sqrt{2} \cdot \frac{\sin 10^\circ \sin 50^\circ - \sin 100^\circ \cos 50^\circ}{\sin 25^\circ \cos 20^\circ + \sin 115^\circ \sin 20^\circ}$
6. Доказать, что верно равенство: $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \cos 10^\circ = 0$
7. Найти значение выражения $169\sin 2x$, если $\cos x = -\frac{5}{13}$, $-\pi < x < 0$

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы двойного угла тригонометрических функций.
2. Запишите формулы половинного аргумента тригонометрических функций.

Домашнее задание: учебник с. 109 № 2 (1-3)

Практическое занятие № 11

Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму и применение при вычислении значения тригонометрического выражения и упрощения его.

Цель: Выработать навыки применения тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений.

Сведения из теории:

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму применяются формулы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Пример 1.

Преобразуйте в алгебраическую сумму $\sin 5x \sin 3x$.

Решение:

по формуле $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ имеем

$$\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(5x - 3x) - \cos(5x + 3x)) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 8x.$$

Пример 2.

Вычислите: $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$.

Решение:

по формуле $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ имеем

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,98 \approx 0,98.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Упростите: $\frac{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha + \cos^2 \alpha}.$ 2) Вычислите: $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ.$ 3) Вычислите: $\sin 52^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'.$	2 вариант 1) Упростите: $\frac{1 - \sin\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - 3\alpha) - \sin(-\alpha)}.$ 2) Вычислите: $\sin 75^\circ + \sin 105^\circ.$ 3) Вычислите: $\sin 37^\circ 30' \cdot \sin 7^\circ 30'.$	3 вариант 1) Упростите: $\frac{\cos(2\pi - 2\alpha)}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} - \sin^2 \alpha.$ 2) Вычислите: $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ.$ 3) Вычислите: $8 \cos 7\alpha \cdot \cos 3\alpha.$
4 вариант 1) Упростите: $\frac{2 \sin^2 \alpha}{1 + \cos(\pi - 2\alpha)} - \sin^2 \alpha.$ 2) Вычислите:	5 вариант 1) Упростите: $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{\cos \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}.$ 2) Вычислите: $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12}.$	6 вариант 1) Упростите: $\frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \sin(1,5\pi + 2\alpha)} - \cos^2 \alpha.$ 2) Вычислите:

$\cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$. 3) Вычислите: $\cos 75^\circ \cdot \cos 105^\circ$.	3) Вычислите: $2 \sin(x+\alpha) \cdot \cos(x-\alpha)$.	$\sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}$. 3) Вычислите: $12 \sin(-9\alpha) \cdot \sin 4\alpha$.
7 вариант 1) Упростите: $\frac{\sin \alpha - 0,5 \sin(\pi + 2\alpha)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$. 2) Вычислите: $\operatorname{tg} 22^\circ 30' \cdot \operatorname{tg} 67^\circ 30'$. 3) Вычислите: $4 \sin 16\alpha \cdot \sin 4\alpha$.	8 вариант 1) Упростите: $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$. 2) Вычислите: $\operatorname{tg} 13^\circ 30' + \operatorname{tg} 76^\circ 30'$. 3) Вычислите: $4 \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$.	9 вариант 1) Упростите: $\frac{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha + \cos^2 \alpha}$. 2) Вычислите: $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$. 3) Вычислите: $4 \cos 15^\circ \sin 20^\circ \sin 40^\circ$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные тригонометрические тождества.
2. Перечислите формулы двойного угла тригонометрических функций.
3. Какие есть формулы для преобразования суммы тригонометрических функций?

Домашнее задание: учебник с 108 №1 (6,7), с. 109 №2 (4,5)

Практическое занятие № 12

Решение тригонометрических уравнений

Цель: Знать формулы для решения тригонометрических уравнений в общем виде и частные случаи решения;

Уметь решать простейшие тригонометрические уравнения.

Сведения из теории:

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение $\cos t = a$

Очевидно, что если $|a| > 1$, то уравнение $\cos t = a$ не имеет решений, т.к. $|\cos t| \leq 1$ для любого t .

Пусть $|a| \leq 1$. Надо найти все такие числа t , что $\cos t = a$. На отрезке $[0; \pi]$ существует только одно решение уравнения $\cos t = a$ – это число $\arccos a$.

Косинус – четная функция, и, значит на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение также имеет единственное решение – это число $-\arccos a$.

Итак, уравнение $\cos t = a$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π имеет два решения $t = \pm \arccos a$ (совпадающие при $a = 1$).

Вследствие периодичности функции косинус все остальные решения отличаются от найденных на $2\pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$), т.е. формула корней уравнения $\cos t = a$ имеет вид:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, (n \in \mathbb{Z}).$$

Пример 1.

Решите уравнение: $\cos t = 1/2$.

Решение:

по формуле $t = \pm \arccos (1/2) + 2\pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$).

Поскольку $\arccos (1/2) = \pi/3$ приходим к ответу $t = \pm \pi/3 + 2\pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$).

Пример 2.

Решите уравнение: $\cos t = -0,2756$.

Решение:

по формуле $t = \pm \arccos (-0,2756) + 2\pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$).

Значение $\arccos (-0,2756)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,85.

Итак, приходим к ответу $t = \pm 1,85 + 2\pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$).

Пример 3.

Решите уравнение: $\cos (2x - \pi/4) = 1/2$.

Решение:

по формуле

$$2x - \pi/4 = \pm \arccos (1/2) + 2\pi n, (n \in \mathbb{Z}).$$

Поскольку $\arccos (1/2) = \pi/3$ получаем

$$2x - \pi/4 = \pm \pi/3 + 2\pi n, (n \in \mathbb{Z})$$

$$2x = \pi/4 \pm \pi/3 + 2\pi n, (n \in \mathbb{Z}).$$

Разделив обе части уравнения на 2 получим ответ: $x = \pi/8 \pm \pi/6 + \pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$).

Уравнение $\sin t = a$

Очевидно, что если $|a| > 1$, то уравнение $\sin t = a$ не имеет решений, т.к. $|\sin t| \leq 1$ для любого t .

При $|a| \leq 1$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ уравнение $\sin t = a$ имеет одно решение $t_1 = \arcsin a$. На отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ функция синус убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение и на этом отрезке имеет одно решение.

Это решение есть число $t_2 = \pi - \arcsin a$, т.к. $\sin t_2 = \sin (\pi - t_1) = \sin t_1 = a$.

Кроме того, поскольку $-\pi/2 \leq t_1 \leq \pi/2$,

$$\text{имеем } -\pi/2 \leq -t_1 \leq \pi/2$$

$$\text{и } \pi - \pi/2 \leq \pi - t_1 \leq \pi + \pi/2,$$

$$\text{т.е. } \pi/2 \leq t_2 \leq 3\pi/2, \quad t_2 \in [\pi/2; 3\pi/2].$$

Итак, уравнение $\sin t = a$ на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ имеет два решения $t_1 = \arcsin a$ и $t_2 = \pi - \arcsin a$ (совпадающие при $a = 1$). Учитывая, что период синуса равен 2π , получаем формулу для решения уравнения $\sin t = a$:

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4.

Решите уравнение: $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

по формуле $t = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, (k \in \mathbf{Z})$.

Поскольку $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$ приходим к ответу $t = (-1)^k \pi/4 + \pi k, (k \in \mathbf{Z})$.

Пример 5.

Решите уравнение: $\sin t = 0,3714$.

Решение:

по формуле $t = (-1)^k \arcsin(0,3714) + \pi k, (k \in \mathbf{Z})$.

Значение $\arcsin(0,3714)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 0,3805.

Итак, приходим $t = (-1)^k 0,3805 + \pi k, (k \in \mathbf{Z})$.

Пример 6.

Решите уравнение: $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

функция синус нечетная, поэтому $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда по формуле: $\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, (k \in \mathbf{Z})$.

Т.к. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, имеем

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k, (k \in \mathbf{Z})$$

или

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{10} + (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k, (k \in \mathbf{Z}).$$

Умножив обе части уравнения на 2, получим ответ:

$$x = \frac{\pi}{5} + (-1)^{k+1} \left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi k, (k \in \mathbf{Z}).$$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

При любом a на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ существует одно число t , что $\operatorname{tg} t = a$, – это $\operatorname{arctg} a$. Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ длиной π единственный корень.

Функция тангенс имеет период π . Следовательно, остальные корни уравнения $\operatorname{tg} t = a$ отличаются от найденного на $\pi n, (n \in \mathbf{Z})$, т.е.

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi n, (n \in \mathbf{Z}).$$

Пример 7.

Решите уравнение: $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$.

Решение:

по формуле $t = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Поскольку $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ приходим к ответу $t = \frac{\pi}{3} + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Пример 8.

Решите уравнение: $\operatorname{tg} t = 5,177$.

Решение:

по формуле $t = \operatorname{arctg}(5,177) + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Значение $\operatorname{arctg}(5,177)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,38.

Итак, приходим $t = 1,38 + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Сводная таблица решения простейших тригонометрических уравнений

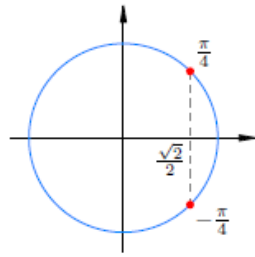
Уравнение	Решение
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Частные случаи		
	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

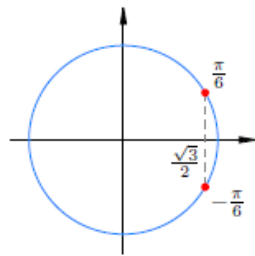
Решение по тригонометрическому кругу

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



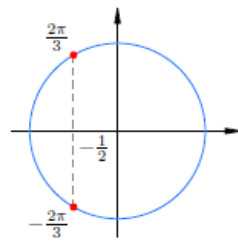
$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



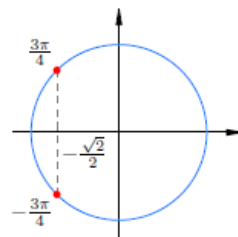
$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$



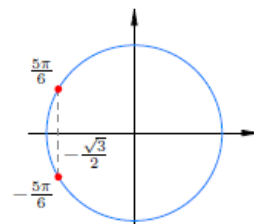
$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



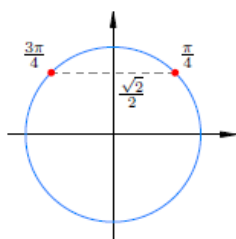
$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

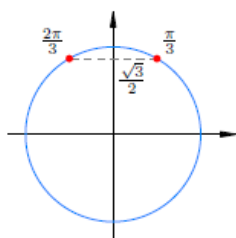
$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

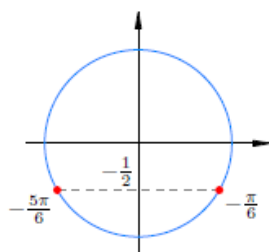
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

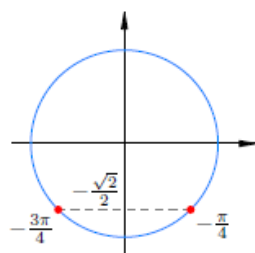
$$\sin x = -\frac{1}{2}.$$



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

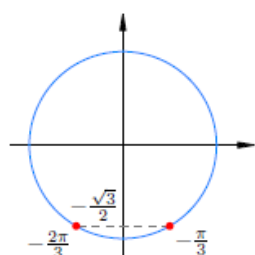
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите уравнения:

1 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 3) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$.	2 вариант 1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$.	3 вариант 1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; 2) $2 \cos x = \sqrt{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{4} = \frac{4}{5}$; 3) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{10}\right) = 0$.	5 вариант 1) $\sin x = \frac{3}{5}$; 2) $\cos(1 - x) = \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3$.	6 вариант 1) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$.
7 вариант 1) $2 \sin x = -\sqrt{2}$; 2) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $3 \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.	8 вариант 1) $2 \sin 2x = -1$; 2) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$.	9 вариант 1) $2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{ctg}(2x + 45^\circ) = -1$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.

2. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.

Домашнее задание: учебник с.114-119 № 1-7

Практическое занятие № 13

Решение тригонометрических уравнений, применяя общие методы в решения уравнений.

Цель: Знать методы решения тригонометрических уравнений, формулы для нахождения корней, уметь использовать полученные знания при решении уравнений повышенной сложности.

Сведения из теории

I. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи

$\sin x = a$	при $ a \leq 1$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ при $ a > 1$ - решений нет	$\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	при $ a \leq 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ при $ a > 1$ - решений нет	$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	a - любое число $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	-
$\operatorname{ctg} x = a$	a - любое число $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	-

II. Тригонометрические уравнения.

Уравнение	Способ решения	Формулы
. Уравнение содержит только синусы или косинусы (синусы и косинусы) вида $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) + c = 0$ $a \cos^2 f(x) + b \cos f(x) + c = 0$ и т.д.	Уравнение сводится к квадратному (биквадратному) относительно синуса (косинуса)	$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
. Однородное уравнение I степени вида $a \sin x + b \cos x = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)	Деление обеих частей на $\cos x \neq 0$. Получаем: $a \operatorname{tg} x + b = 0$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$
. Однородное уравнение II степени вида $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) \cdot \cos f(x) + k \cos^2 f(x) = 0$	Деление обеих частей на $\cos^2 x \neq 0$. Получаем: $a \operatorname{tg}^2 f(x) + b \operatorname{tg} f(x) + k = 0$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
. Уравнение вида $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$	Уравнение сводится к квадратному относительно тангенса заменой $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$ $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Практические задания:

1.

Решить уравнение $2 \cos^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$.

Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем

$$\begin{aligned} 2(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x + 1 &= 0, \text{ или} \\ 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Обозначая $\sin x = y$, получаем $2y^2 + 5y - 3 = 0$,
откуда $y_1 = -3$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

1) $\sin x = -3$ — уравнение не имеет корней, так как $|-3| > 1$;

2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$,

$n \in \mathbf{Z}$.

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad \triangleleft$$

2.

Решить уравнение $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$,

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}, \quad x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad \triangleleft$$

3.

Решить уравнение $2 \sin x + \cos x = 2$.

Используя формулы $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x =$

$= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравне-

ния в виде $2 = 2 \cdot 1 = 2 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right)$, получаем

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Поделив это уравнение на $\cos^2 \frac{x}{2}$, получим равно-

сильное уравнение $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$. Обозна-

чая $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, получаем уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$,

откуда $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$,

$n \in \mathbf{Z}$.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad \triangleleft$$

4. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители

Пример

$$\sin 2x - \sin x = 0$$

$$2 \sin x \cdot \cos x - \sin x = 0 \quad \text{Общий множитель } \sin x \text{ выносится за скобки.}$$

$$\sin x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \cos x - 1 = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pi n, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

5.

Решить уравнение $\sin 7x + \sin 3x = 3 \cos 2x$.

Применяя формулу для суммы синусов, запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} 2 \sin 5x \cos 2x &= 3 \cos 2x, \\ 2 \sin 5x \cos 2x - 3 \cos 2x &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{откуда } \cos 2x \left(\sin 5x - \frac{3}{2} \right) = 0.$$

Уравнение $\cos 2x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$,

$n \in \mathbb{Z}$, а уравнение $\sin 5x = \frac{3}{2}$ не имеет корней.

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \triangleleft$$

Задания для самостоятельного решения:

1. $\sin 6x + \cos 6x = 1 - 2 \sin 3x$;
2. $29 - 36 \sin^2(x - 2) - 36 \cos(x - 2) = 0$;
3. $2 \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} - 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$;
4. $\sin 4x = 2 \cos^2 x - 1$;
5. $\sin x(\sin x + \cos x) = 1$;
6. $\frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sin^2 x} = \frac{16}{11}$.

Домашнее задание: учебник с. 120 №10 (1-4)

Практическое занятие № 14

Решение тригонометрических неравенств

Цель: Знать формулы для решения простейших тригонометрических неравенств;

Уметь решать простейшие тригонометрические неравенства.

Сведения из теории:

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства

$\sin x < m$, $\sin x > m$, $\cos x < m$, $\cos x > m$, $\operatorname{tg} x < m$, $\operatorname{tg} x > m$, $\operatorname{ctg} x < m$, $\operatorname{ctg} x > m$, где m – данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Если точка P_α единичной окружности (рис.1) получена при повороте точки $P_0(1; 0)$ на угол α , то ордината точки P_α – *синус* угла α (обозначается $\sin \alpha$), а абсцисса – *косинус* угла α (обозначается $\cos \alpha$). *Тангенсом* угла α называется отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. *Котангенсом* угла α называется отношение $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

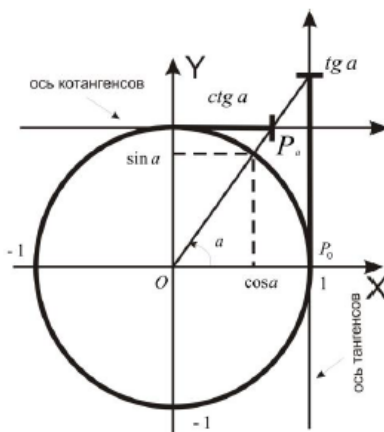


Рис.1

Величина, обратная $\cos \alpha$, называется *секансом*, а обратная $\sin \alpha$ – *косекансом* угла α ; они обозначаются $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$.

Отрезок $[-1; 1]$ оси ординат называют *линией синусов*; отрезок $[-1; 1]$ оси абсцисс – *линией косинусов*; прямую $x = 1$ – *осью (линией) тангенсов*; прямую $y = 1$ – *осью (линией) котангенсов*.

Пример 1, 2

Решить неравенство: 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\cos x > -\frac{1}{2}$.

Решение:

2) решение иллюстрируется рисунком 1 слева: здесь точке M_1 соответствует угол $\frac{\pi}{6}$, M_2 – угол $\frac{5\pi}{6}$, M_3 – угол $\frac{\pi}{6} + \pi$, M_4 – угол $\frac{5\pi}{6} + \pi$.

Неравенство выполняется для $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6} + \pi < x < \frac{5\pi}{6} + \pi$. Общим решением служит неравенство:

$$\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Данное неравенство иллюстрируется рисунком 1 справа: здесь точке M_1 соответствует угол $\frac{2\pi}{3}$, M_2 – угол $-\frac{2\pi}{3}$. Общим решением неравенства является

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

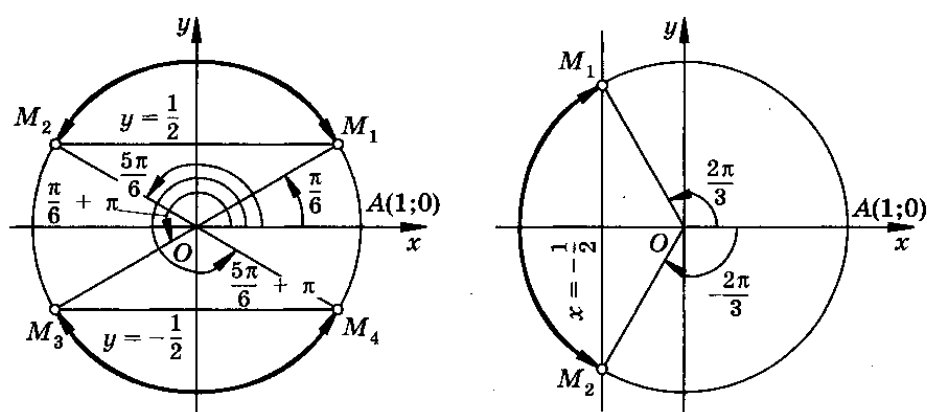
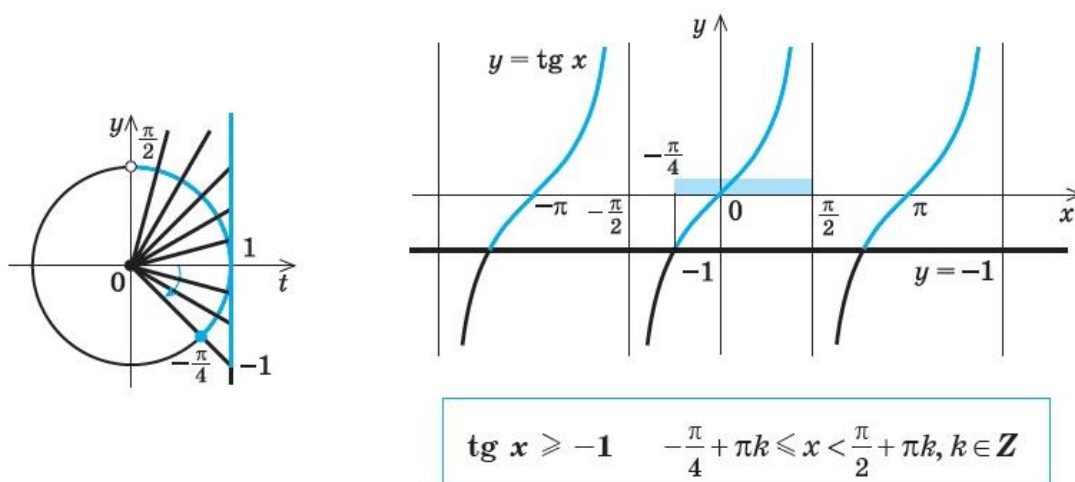


Рисунок 1. Решение тригонометрического неравенства.

Пример 3



Пример 4. $\sin x \leq \frac{1}{3}$.

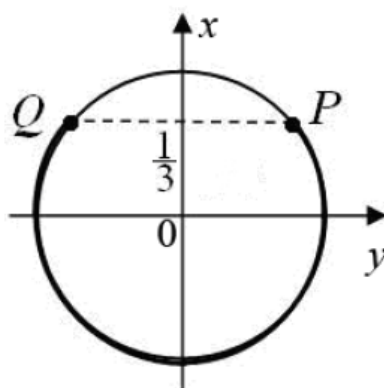


Рис.22

Решение: На тригонометрической окружности множество решений неравенства изобразится дугой PQ , отмеченной на рис.22. Нам нужно выбрать на числовой оси какой-нибудь отрезок, соответствующий этой дуге, и тогда останется только прибавить к его границам $2\pi n$. Выберем какое-нибудь число, соответствующее одному из концов дуги. Очевидно, точке P соответствует $\arcsin \frac{1}{3}$. Раз это число выбрано, выбор числа, соответствующего другому концу, уже предопределен. Чтобы найти это число, надо сдвинуться из точки $\arcsin \frac{1}{3}$ на числовой оси в отрицательном направлении на расстояние, равное длине дуги PQ . Точке O на окружности соответствует ноль, точке B – число $-\pi$, а точке Q – число, расположенное еще на $\arcsin \frac{1}{3}$ левее, то есть $-\pi - \arcsin \frac{1}{3}$. Стало быть, один из отрезков, соответствующих дуге PQ , будет $\left[-\pi - \arcsin \frac{1}{3}; \arcsin \frac{1}{3}\right]$, а ответом к неравенству $\sin x \leq \frac{1}{3}$ будет объединение отрезков $\left[-\pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k; \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k\right] (k \in \mathbb{Z})$.

Задания для самостоятельного решения:

Решить неравенство:

1 вариант 1) $\sin(2x) < 1$;	2 вариант 1) $2\sin 2x > -1$;	3 вариант 1) $2\sin x < -\sqrt{2}$;

2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -1$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \leq -\sqrt{3}$.	2) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) < -\frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geq \sqrt{3}$.	2) $\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $3\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \geq -\sqrt{3}$.
4 вариант 1) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) > \sqrt{3}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{ctg}(2x + 45^\circ) \leq -1$.	5 вариант 1) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos 3x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} 2x > -\sqrt{3}$.	6 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) > 0$; 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < 1$; 3) $\operatorname{tg} 2x \geq \sqrt{3}$.
7 вариант 1) $\sin 2x > \frac{1}{2}$; 2) $2\cos x < \sqrt{2}$; 3) $\operatorname{tg}(3x) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.	8 вариант 1) $\sin x \leq \frac{3}{5}$; 2) $\cos(1-x) > \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < 3$.	9 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{4} < \frac{4}{5}$; 3) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{10}\right) \geq 0$.

Контрольные вопросы:

Что называется простейшими тригонометрическими неравенствами?
Проиллюстрируйте решение неравенства $\sin x > m$ на окружности.

Домашнее задание: учебник с.120 №10(5-7).

Практическое занятие № 15

Построение графиков элементарных функций. Промежутки возрастания, убывания, наибольшее, наименьшее значения функции. Точки экстремума

Цель: Знать элементарные функции, что является их графиками; определения возрастающей (убывающей) функции; определения точки максимума (минимума) функции

Уметь строить графики элементарных функций. находить промежутки монотонности функции; вычислять точки экстремума функции.

Сведения из теории:

Числовая функция

Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y , зависящее от x .

Функции обычно обозначают латинскими буквами. Рассмотрим произвольную функцию f . Независимую переменную x называют аргументом функции. Число y , соответствующее числу x , называют значением функции f в точке x и обозначают $f(x)$. Область определения функции f обозначают $D(f)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, таких, что x принадлежит области определения функции f , называют областью значений функции и обозначают $E(f)$.

Графиком функции f называют множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости, где $y=f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции f .

График линейной функции

Линейная функция задается уравнением $y=ax+b$. Графиком линейной функций является прямая. Чтобы построить прямую достаточно две точки.

График квадратичной, кубической функции

Парабола. График квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим канонический случай: $y=x^2$. Область определения – любое действительное число. Функция $y=x^2$ является чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси Oy .

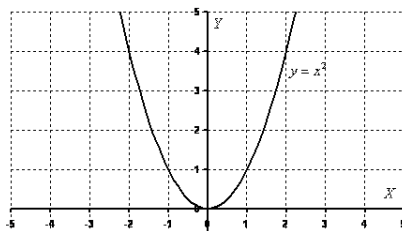


Рисунок 4. График функции $y=x^2$

Пример 2.

Построить график функции $y=-x^2+2x$.

Решение:

сначала находим вершину параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = -\frac{2}{-2} = 1$. Рассчитываем соответствующее значение «игрек»: $y = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$. Таким образом, вершина находится в точке $(1; 1)$.

Теперь находим другие точки, при этом пользуемся симметричностью параболы.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-3	0	1	0	-3	-8

Выполним чертеж:

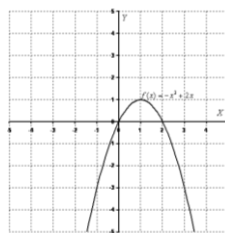


Рисунок 5. График функции $y = -x^2 + 2x$

Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) справедливо следующее: Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Кубическая парабола

Кубическая парабола задается функцией $y = x^3$. Область определения, область значений – любое действительное число. Функция является нечётной. График строим по точкам:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

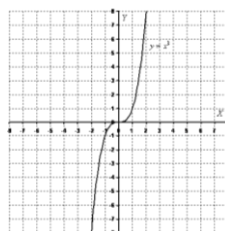


Рисунок 6. График функции $y = x^3$

График функции $y = \sqrt{x}$.

Область определения: $D(y): [0; +\infty)$. Область значений: $E(y): [0; +\infty)$. То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти. При построении подбираем такие значения «икс», чтобы корень извлекался нацело:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Строим график:

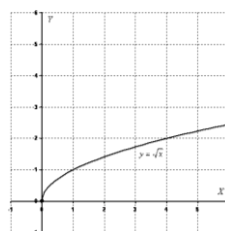


Рисунок 7. График функции $y = \sqrt{x}$

Гипербола

Общий вид $y = \frac{1}{x}$. Область определения: $D(y)$: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Область значений: $E(y)$: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Функция является нечётной, гипербола симметрична относительно начала координат.

Выполним чертёж:

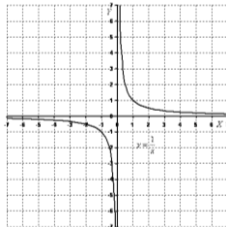


Рисунок 8. График функции $y = \frac{1}{x}$

График функции вида $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) представляют собой две ветви гиперболы.

Если $a > 0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях. Если $a < 0$, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях.

Пример 3.

Построить правую ветвь гиперболы $y = \frac{6}{x}$.

Решение:

значения x выгодно подбираем так, чтобы делилось нацело:

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Выполним чертёж:

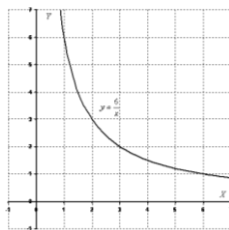


Рисунок 9. График функции $y = \frac{6}{x}$

Задания для самостоятельного решения:

Построить графики функций:

1) $y = x^2 + 2x + 3$;

2) $y = 2\sqrt{x}$;

3) $y = -\frac{6}{x}$.

Возрастание и убывание функций

Функция f возрастает на множестве P , если для любых x_1 и x_2 из множества P , таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция f убывает на множестве P , если для любых x_1 и x_2 из множества P , таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Иными словами, функция f называется возрастающей на множестве P , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция f называется убывающей на множестве P , если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.

Пример 1.

Докажите, что функция $f(x) = 1/x$ является убывающей.

Решение:

область определения функции: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Рассмотрим поведение функции на каждом интервале:

$(-\infty; 0)$: $x_1 = -8$, $x_2 = -4$, т.е. $x_2 > x_1$, тогда $f(-8) = -0,125$, $f(-4) = -0,25$, т.е. $f(x_2) < f(x_1)$, а значит функция $f(x) = 1/x$ является убывающей на интервале $(-\infty; 0)$.

$(0; +\infty)$: $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, т.е. $x_2 > x_1$, тогда $f(4) = 0,25$, $f(8) = 0,125$, т.е. $f(x_2) < f(x_1)$, а значит функция $f(x) = 1/x$ является убывающей на интервале $(0; +\infty)$.

Однако эта функция не является убывающей на объединении этих промежутков. Например, $1 > -1$, но $f(1) < f(-1)$.

При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и убывания максимальной длины, включая концы (если, конечно, они входят в эти промежутки). Так, можно было сказать, что функция $f(x) = 1/x$ является убывающей на отрезке $[2; 500]$. Это верно, но такой ответ неполон.

При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки удобно пользоваться понятием окрестности.

Окрестностью точки a называется любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервал $(2; 6)$ – одна из окрестностей точки 3, интервал $(-3,3; -2,7)$ – окрестность точки -3.

Экстремумы

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции f , если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f , если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

По определениям значение функции f в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности x_0 , как правило, имеет вид гладкого «холма» или заостренного «пика». В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой или заостренной.

Для точек максимума и минимума функции принято общее название – их называют *точками экстремума*.

Значение функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции (общее название – экстремум функции). Точки максимума обозначают $x_{\max}$, а точки минимума $x_{\min}$. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно $y_{\max}$, $y_{\min}$.

Пример 2.

Начертите эскиз графика функции f , если известно, что f возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$. Какой будет точка $x=2$?

Решение:

схематично график можно изобразить в виде:

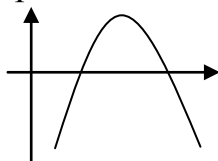


Рисунок 10. Эскиз графика

График имеет вид гладкого «холма», а значит точка $x=2$ – точка максимума.

Задания для самостоятельного решения:

Начертите эскиз графика функции f , определите вид точек, если:

f возрастает на промежутках $(-\infty; -5]$ и $[1; 5]$, убывает на промежутках $[-5; 1]$ $[5; +\infty)$.

Контрольные вопросы:

Что называется функцией?

Что является графиком линейной, квадратичной функций?

Какая функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке?

Дайте определение точке максимума (минимума) функции.

Домашнее задание: выполнить с.р. №7 задание 2,3

Практическое занятие № 16

Построение графика обратной функции. Исследование функций по схеме. Арифметические операции над функциями.

Цель: Знать графики элементарных функций; свойства функций; схему исследования функции; уметь строить график функции как композицию двух функций, строить графики функций

Сведения из теории:

Четные и нечетные функции

Рассмотрим функции области определения которых симметричны относительно начала координат, т.е. для любого x из области определения функции число $(-x)$ также принадлежит области определения. Среди таких функций выделяют четные и нечетные.

Функция f называется четной, если для любого x из области определения $f(-x)=f(x)$.

Функция f называется нечетной, если для любого x из области определения $f(-x)=-f(x)$.

Свойства графиков:

1. График четной функции симметричен относительно оси ординат.
2. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Из этих двух правил вытекает следующее: при построении графика четной или нечетной функции достаточно построить его часть для неотрицательных x , а затем отразить полученный график относительно оси ординат (в случае четной функции) или начала координат (в случае нечетной).

Ранее мы строили графики функций «по точкам». Во многих случаях этот метод дает хорошие результаты, если, конечно, отметить достаточно большое число точек. Однако при этом приходится составлять большие таблицы значений функции, а главное, можно не заметить существенных особенностей функции и в итоге ошибиться при построении графика.

Для того чтобы избежать ошибок, надо научиться выявлять характерные особенности функции, т.е. предварительно провести ее исследование.

Схема исследования функций:

Найти область определения и область значений данной функции.

Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование, т.е. является ли функция четной (нечетной), периодической.

Вычислить координаты графика функции с осями координат.

Найти промежутки знакопостоянства функции.

Выяснить, на каких промежутках функция убывает, а на каких возрастает.

Найти точки экстремума, вид экстремума (минимум или максимум) и вычислить значения функции в этих точках.

Исследовать поведение функции в окрестности характерных точек, не входящих в область определения (например, точка $x=0$ для функции $f(x)=1/x$), и при больших (по модулю) значениях, аргумента.

Необходимо заметить, что этот план имеет примерный характер.

Построение графика суммы (произведения) двух функций производится сложением (умножением) ординат точек графиков с одинаковыми абсциссами.

Пример 1.

Определите какая из функций является четной (нечетной): $y=x^4$, $y=x^3$.

Решение:

функция $y=x^4$ четная, т.к. $x^4=(-x)^4$, т.е. $y(-x)=y(x)$, а функция $y=x^3$ является нечетной, т.к. $x^3=(-x)^3=-x^3$, т.е. $y(-x)=-y(x)$.

Пример 2.

Докажите, что функция $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$ четная.

Решение:

вычислим $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^3 - x}{-x^3 + x} = \frac{-(x^3 + x)}{-(x^3 - x)} = -\frac{x^3 + x}{x^3 - x} = f(x),$$

т.е. $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$ – четная по определению.

Пример 3.

Пусть даны графики функций $y=x$ и $y=\sin x$. Построить $y=x+\sin x$ и $y=x\sin x$, являющихся соответственно суммой и произведением заданных графиков.

Решение:

графики функций $y=x+\sin x$ и $y=x\sin x$:

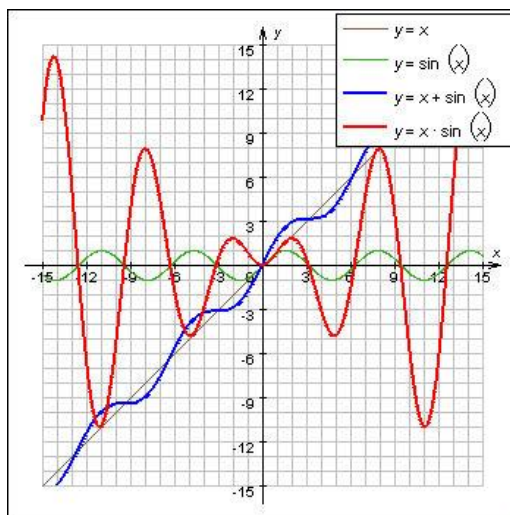


Рисунок 11. Графики функций $y=x$, $y=\sin x$, $y=x+\sin x$, $y=x\sin x$

Пусть известен график $y=f(x)$ и нужно построить график функции $y=|f(x)|$.

По определению,
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$$

Значит, часть графика, лежащую в верхней координатной полуплоскости, изменять не надо, а часть графика, лежащую в нижней координатной полуплоскости, нужно отобразить симметрично относительно оси Ox .

Пусть известен график $y=f(x)$ и нужно построить график функции $y=f(|x|)$. Заметим, что при $x \geq 0$ $f(|x|)=f(x)$, а функция $y=f(|x|)$ четная. Поэтому, чтобы построить график функции $y=f(|x|)$, нужно часть графика функции $y=f(x)$, лежащую в левой координатной полуплоскости, отбросить, а часть графика, лежащую в правой координатной полуплоскости, отобразить симметрично относительно оси Oy .

Задания для самостоятельного решения:

1. Построить графики функций:

- 1) $y=x+\cos x$;
- 2) $y=|x^2+2x+3|$.

2. Построить график функции f , если известны ее свойства:

1.	Свойство функции	
	Область определения	$[-6; 6]$
	Область значений	$[-2; 5]$
2		
	а) с осью Ox	$(-4; 0)$, $(-2; 0)$
	б) с осью Oy	$(0; 2,5)$
3		
	а) $f(x)>0$	$[-6; -4)$,

		$(-2; 6]$
	б) $f(x) < 0$	$(-4; -2)$
4		
	а) возрастания	$[-3; 1],$ $[4; 6]$
	б) убывания	$[-6; -3],$ $[1; 4]$
5.1	Точки максимума, максимум функции	$x_{\max}=1$ $y_{\max}=3$
5.2	Точки минимума, минимум функции	$x_{\min1}=-3,$ $y_{\min1}=-2;$ $x_{\min2}=4$ $y_{\min2}=1$
6	Дополнительные точки графика	$(-6; 3),$ $(6; 5)$

Контрольные вопросы:

Как построить сумму (произведение) двух функций?

Как построить модуль функции, модуль аргумента?

Перечислите свойства функций.

Перечислите основные этапы исследования функции.

Домашнее задание: выполнить с.р. №7 задание 4

Практическое занятие № 17

Применение свойств функций для решения тригонометрических уравнений. Обратные тригонометрические функции

Цель: Знать определение и свойства тригонометрических функций;

Уметь строить графики тригонометрических функций;

Сведения из теории:

Функции синус и косинус

Числовые функции, заданные формулами $y=\sin x$ и $y=\cos x$, называют соответственно синусом и косинусом (и обозначают $\sin$ и $\cos$).

Область определения этих функций – множество всех действительных чисел. Областью значений функций синус и косинус является отрезок $[-1; 1]$. Т.е. $D(\sin)=D(\cos)=R$; $E(\sin)=E(\cos)=[-1; 1]$.

Свойства функций синус и косинус:

для любого x справедливы равенства:

1) $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$;

2) $\sin(x+2\pi n)=\sin x$, $\cos(x+2\pi n)=\cos x$, где n – произвольное целое число.

Синусоида

Построим график функции синус на отрезке $[0; 2\pi]$. Для этого отметим на оси ординат точки $(0; -1)$ и $(0; 1)$, а на оси абсцисс точку с абсциссой 2π (длина отрезка $[0; 2\pi]$ шесть клеток $\sim 6,28$). Далее пользуясь вычисленными значениями синуса построим график функции на отрезке $[0; 2\pi]$. Вне этого отрезка заметим, что $\sin(x+2\pi n)=\sin x$ и с помощью параллельных переносов вдоль оси Ox влево и вправо достроим график функции на отрезках $[-4\pi; -2\pi]$, $[-2\pi; 0]$, $[2\pi; 4\pi]$. График синуса называется синусоидой.

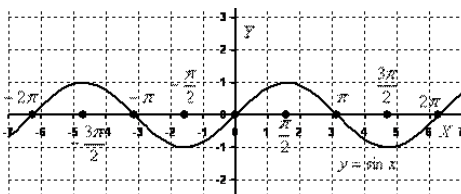


Рисунок 19. График функции $y=\sin x$

Для построения графика косинуса необходимо воспользоваться формулой $\cos x=\sin(x+\pi/2)$. Это означает, что график косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на расстояние $\pi/2$ влево вдоль оси Ox . Поэтому график функции $y=\cos x$ также является синусоидой.

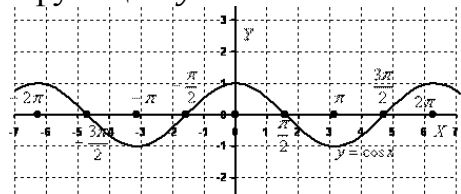


Рисунок 20. График функции $y=\cos x$

Сведем известные свойства функций в таблицу (всюду полагая, что n – произвольное целое число).

	Функция	
	$y=\sin x$	$y=\cos x$
1.1 Область определения	R	R
1.2 Область значений	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
2.1 Четность (нечетность)	Нечетная	Четная
2.2 Наименьший положительный период	2π	2π
3.1 Координаты точек пересечения графика с осью Ox	$(\pi n; 0)$	$(\pi/2+\pi n; 0)$
3.2 Координаты точек пересечения графика с осью Oy	$(0; 0)$	$(0; 1)$
4.1 Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	$(2\pi n; \pi+2\pi n)$	$(-\pi/2+2\pi n; \pi/2+2\pi n)$

4.2 Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	$(-\pi+2\pi n; 2\pi n)$	$(\pi/2+2\pi n; 3\pi/2+2\pi n)$
5.1 Промежутки возрастания	$[-\pi/2+2\pi n; \pi/2+2\pi n]$	$[-\pi+2\pi n; 2\pi n]$
5.2 Промежутки убывания	$[\pi/2+2\pi n; 3\pi/2+2\pi n]$	$[2\pi n; \pi+2\pi n]$
6.1 Точки минимума	$-\pi/2+2\pi n$	$\pi+2\pi n$
6.2 Минимумы функции	-1	-1
6.3 Точки максимума	$\pi/2+2\pi n$	$2\pi n$
6.4 Максимумы функции	1	1

Числовые функции, заданные формулами $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$, называют соответственно тангенсом и котангенсом (и обозначают tg и ctg).

Областью определения функции тангенс является множество всех чисел x , для которых $\cos x \neq 0$, т.е. все числа $x \neq \pi/2 + \pi n$, где n - произвольное целое число. Областью определения функции котангенс является множество всех чисел x , для которых $\sin x \neq 0$, т.е. все числа $x \neq \pi n$, где n - произвольное целое число.

Область значений тангенса (котангенса) – вся числовая прямая.

Свойства функций тангенс и котангенс:

для любого x справедливы равенства:

1) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;

2) $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x$, где n – произвольное целое число.

Построение графика тангенса на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ аналогично построению синуса. Вследствие тождества $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$ график тангенса на всей области определения получается из графика на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ параллельным переносом вдоль оси Ox влево и вправо на π , 2π и т.д. График функции тангенс называют тангенсоидой.

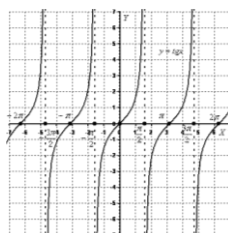


Рисунок 21. График функции $y=\operatorname{tg} x$

Для построения графика $y=\operatorname{ctg} x$ воспользуемся тождеством $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x + \pi/2)$. Из этого тождества следует, что для построения графика котангенса необходимо сдвинуть график тангенса на $\pi/2$ влево вдоль оси Ox и отразить полученную кривую относительно оси Ox .

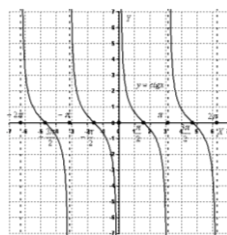


Рисунок 22. График функции $y = \text{ctg } x$

Сведем известные свойства функций в таблицу (всюду полагая, что n – произвольное целое число).

	Функция	
	$y = \text{tg } x$	$y = \text{ctg } x$
1.1 Область определения	$(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$	$(\pi n; \pi + \pi n)$
1.2 Область значений	R	R
2.1 Четность (нечетность)	Нечетная	Нечетная
2.2 Наименьший положительный период	π	π
3.1 Координаты точек пересечения графика с осью Ox	$(\pi n; 0)$	$(\pi/2 + \pi n; 0)$
3.2 Координаты точек пересечения графика с осью Oy	$(0; 0)$	Нет
4.1 Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	$(\pi n; \pi/2 + \pi n)$	$(\pi n; \pi/2 + \pi n)$
4.2 Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	$(-\pi/2 + \pi n; \pi n)$	$(-\pi/2 + \pi n; \pi n)$
5.1 Промежутки возрастания	$(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$	Нет
5.2 Промежутки убывания	Нет	$(\pi n; \pi + \pi n)$
6.1 Точки минимума	Нет	Нет
6.2 Точки максимума	Нет	Нет

Задания для самостоятельного решения:

№1. Построить схематически косинусоиду на интервале $[-3\pi; 3\pi]$ и выполнить следующие упражнения:

1) Проиллюстрировать по графику, что:

а) функция $\cos x$ не может принимать значений, превосходящих по абсолютной величине единицу, т. е. $-1 \leq \cos x \leq 1$;

б) каждому действительному значению x соответствует только одно значение $\cos x$ (свойство однозначности косинуса);

в) при замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$ значение функции не изменяется, т. е. $\cos(-x) = \cos x$ (свойство четности косинуса). Как можно использовать свойство четности косинуса при построении его графика;

г) при изменении произвольного значения аргумента на число, кратное числу 2π , значение функции $\cos x$ не изменяется, т. е. $\cos(x+2\pi k)=\cos x$ (свойство периодичности косинуса). Как можно использовать периодичность косинуса при построении его графика;

д) при изменении произвольного значения аргумента на число π значение функции y заменяется противоположным ему значением $-y$, т. е. $\cos(x\pm\pi)=-\cos x$;

е) уравнение $\cos x=0,5$ имеет бесчисленное множество решений. Назвать несколько частных решений этого уравнения.

2) Указать интервалы, в которых функция $y=\cos x$ принимает:

а) положительные значения;

б) отрицательные значения.

Какие четверти единичной окружности соответствуют этим интервалам.

3) Выделить на оси абсцисс и на единичной окружности интервалы, в которых функция $y=\cos x$:

а) возрастает;

б) убывает.

Проиллюстрировать на графике, что в любом интервале монотонности косинус последовательно принимает все свои возможные значения, каждому из которых соответствует только одно значение аргумента в рассматриваемом интервале.

№2. Пользуясь схематическим графиком функции $y=\operatorname{tg} x$ выполнить следующие упражнения:

1) Указать интервалы, в которых функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения.

2) Определить, при каких значениях x на интервале $(-3\pi/2; 3\pi/2)$ функция $y=\operatorname{tg} x$: а) убывает; б) возрастает; в) принимает значение, равное нулю; г) теряет смысл.

Выразить формулой множество таких значений x , при которых $y=\operatorname{tg} x$ теряет смысл.

3) Убедиться, что каждому допустимому значению аргумента x соответствует только одно значение функции.

4) Проиллюстрировать на графике, что функция $y=\operatorname{tg} x$ есть периодическая функция с периодом π , т. е. $\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x$.

5) Показать, что каждому значению функции y соответствует бесчисленное множество определенных значений аргумента x .

6) Решить неравенства: а) $\operatorname{tg} x > -1$; б) $|\operatorname{tg} x| < 1$.

Контрольные вопросы:

Какие функции называют синусом и косинусом?

Что является графиком функций синус и косинус?

Перечислите свойства функций синус и косинус.

Какие функции называют тангенсом и котангенсом?

Что является графиком функций тангенс и котангенс?

Перечислите свойства функций тангенс и котангенс

Домашнее задание: выполнить задание 2.

Практическое занятие № 18,19

Применение свойств функций к решению показательных и логарифмических уравнений.

Цель: Знать свойства степенной функции с различными показателями степени; уметь строить график степенной функции с различными показателями степени.

Сведения из теории:

Степенная функция с натуральным показателем

Функция $y=x^n$, где n – натуральное число, называется степенной функцией с натуральным показателем. При $n=1$ получаем функцию $y=x$.

Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y=kx^n$, где число k называется коэффициентом пропорциональности.

Перечислим свойства функции $y=kx$:

1. Область определения функции – множество всех действительных чисел.
2. $y=kx$ – нечетная функция, т.к. $f(-x)=k(-x)=-kx=-k(x)=-f(x)$.
3. При $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ убывает на всей числовой прямой.

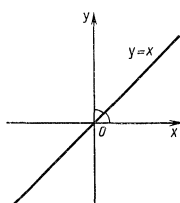


Рисунок 12. График функции $y=kx$

При $n=2$ получаем функцию $y=x^2$. Перечислим свойства функции $y=x^2$:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. $y=x^2$ – четная функция, т.к. $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.
3. На промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает.
4. Графиком функции $y=x^2$ является парабола.

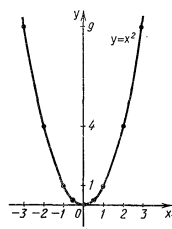


Рисунок 13. График функции $y=x^2$

При $n = 3$ получаем функцию $y=x^3$, ее свойства:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. $y=x^3$ – нечетная функция, т.к. $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.
3. Функция $y=x^3$ возрастает на всей числовой прямой.
4. График функции $y=x^3$ называется кубической параболой.

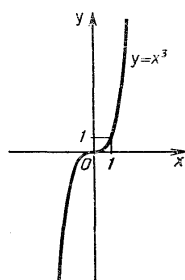


Рисунок 14. График функции $y=x^3$

Пусть n – произвольное четное натуральное число, большее двух: $n=4, 6, 8, \dots$

В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^2$. График такой функции напоминает параболу $y=x^2$, только ветви графика при $|n|>1$ круче идут вверх, чем больше n , а при $|n|<1$ «теснее прижимаются» к оси x , чем больше n .

Пусть n – произвольное нечетное число, большее трех: $n=5, 7, 9, \dots$

В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу (только ветви графика тем круче идут вверх, вниз, чем больше n). Отметим также, что на промежутке $(0; 1)$ график степенной функции $y=x^n$ тем медленнее отдаляется от оси Ox с ростом x , чем больше n .

Степенная функция с целым отрицательным показателем.

Рассмотрим функцию $y=x^{-n}$, где n – натуральное число. При $n=2$ получаем

$y=x^{-2}$ или $y=\frac{1}{x^2}$. Свойства этой функции:

1. Функция определена при всех $x \neq 0$.
2. $y=\frac{1}{x^2}$ – четная функция.

3. $y = \frac{1}{x^2}$ – убывает на $(0; +\infty)$ и возрастает на $(-\infty; 0)$.

Теми же свойствами обладают любые функции вида $y = x^{-n}$ при четном n , большем двух.

Функции вида $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[n]{x}$ обладают теми же свойствами, как и функция $y = x^n$.

Степенная функция с положительным дробным показателем

Рассмотрим функцию $y = x^r$, где r – положительная несократимая дробь. Перечислим некоторые свойства этой функции:

1. Область определения – луч $[0; +\infty)$.
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Функция $y = x^r$ возрастает на $[0; +\infty)$.

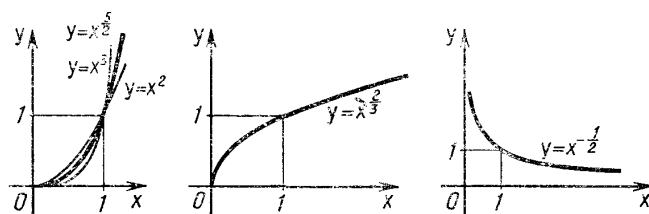


Рисунок 15. Графики степенных функций

На рисунке слева изображен график функции $y = x^{\frac{5}{2}}$. Он заключен между графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$, заданных на промежутке $[0; +\infty)$. Подобный вид имеет график любой функции вида $y = x^r$, где $r > 1$.

На том же рисунке посередине изображен график функции $y = x^{\frac{2}{3}}$. Подобный вид имеет график любой степенной функции $y = x^r$, где $0 < r < 1$.

Степенная функция с отрицательным дробным показателем

Рассмотрим функцию $y = x^{-r}$, где r – положительная несократимая дробь. Перечислим свойства этой функции:

1. Область определения – промежуток $(0; +\infty)$.
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Функция $y = x^{-r}$ убывает на $(0; +\infty)$.

Пример

Построить график функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

Решение:

построим таблицу значений данной функции:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9

y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой:

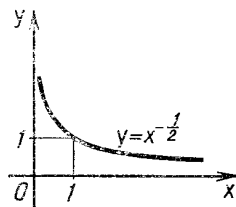


Рисунок 16. График функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$

Подобный вид имеет график любой функции $y = x^{-r}$, где r – отрицательная дробь.

Задания для самостоятельного решения:

Постройте график функции и опишите ее свойства:

1 вариант $y = 2\sqrt{x+1}$.	2 вариант $y = 2 - \sqrt[4]{x}$.	3 вариант $y = 1 + \sqrt[3]{x}$.
4 вариант $y = 3x^{-2}$.	5 вариант $y = \sqrt{x} - 4$.	6 вариант $y = 1 - \sqrt[3]{x}$.
7 вариант $y = \sqrt{x} + 3$.	8 вариант $y = \sqrt[5]{x^4} + 1$.	9 вариант $y = \sqrt{x-2} + 1$.

Контрольные вопросы:

Что называется степенной функцией?

Перечислите виды степенных функций.

Перечислите свойства функции для различных показателей степени.

Домашнее задание: учебник с.44-45 №1,4

Логарифмическая функция, ее график и свойства. Решение логарифмических уравнений графически.

Цель:

Знать основные свойства логарифмов;

Уметь строить график логарифмической функции с разными основаниями.

Сведения из теории:

Пусть a – положительное число, $a \neq 1$.

Функцию, заданную формулой $y=\log_a x$ называют *логарифмической функцией с основанием a* .

Перечислим основные свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел $\mathbf{R}_+$, т.е. $D(\log_a)=(0; +\infty)$.
2. Область значений – множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$, т.е. $E(\log_a)=(-\infty; +\infty)$.
3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при $a>1$ или убывает при $0<a<1$.

Для построения графика заметим, что значение 0 логарифмическая функция принимает в точке 1; $\log_a 1=0$ при любом $a>1$, т.к. $a^0=1$.

Вследствие возрастания функции при $a>1$ получаем, что при $x>1$ логарифмическая функция принимает положительные значения, а при $0<x<1$ – отрицательные.

Если $0<a<1$, то логарифмическая функция убывает на $\mathbf{R}_+$, поэтому функция принимает положительные значения при $0<x<1$, а при $x>1$ – отрицательные.

Опираясь на все вышесказанное строим графики логарифмической функции $y=\log_a x$ при $a>1$ и при $0<a<1$.

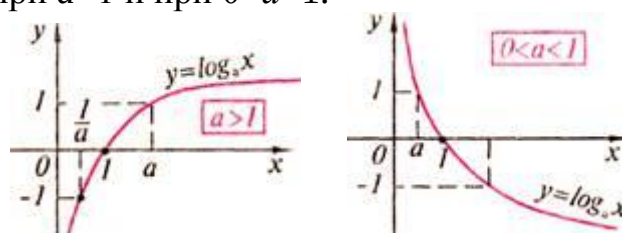


Рисунок 17. График логарифмической функции

Справедливо следующее утверждение: графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y=x$.

Пример

Решить графически уравнение $\log_2 x = -x + 1$.

Решение:

построим графики функций $y=\log_2 x$ и $y=-x+1$ в одной координатной плоскости:

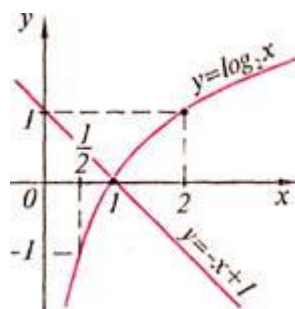


Рисунок 18. Графики функций $y=\log_2 x$ и $y=-x+1$

Графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x=1$.
Проверка показывает, что $x=1$ – корень данного уравнения.

Задания для самостоятельного решения:

Решите графически уравнение:

1 вариант $\log_4(x+3) = x-1.$	2 вариант $\lg(1-x) = x^2 - 1.$	3 вариант $\frac{1}{2} \log_2(x+1) = x.$
4 вариант $1 + \log_2(x+2) = 2-x.$	5 вариант $\log_{\frac{1}{2}} x = x-3.$	6 вариант $\log_2 x = 2^{5-x}.$
7 вариант $\left \log_{\frac{1}{2}} x \right = 1-x.$	8 вариант $\log_{\frac{1}{3}} x = 2x-7.$	9 вариант $\lg(1-x) = 5-x.$

Контрольные вопросы:

Что называется логарифмической функцией?

Перечислите свойства логарифмической функции.

Домашнее задание: с.р. №7 задание 5,6

Практическое занятие № 20, 21

**Решение задач на вычисление членов числовой последовательности.
Вычисление суммы числового ряда**

Цель: Знать способы задания последовательностей; свойства числовых последовательностей;

Уметь вычислять члены последовательностей по общему члену; задавать формулой общий член последовательности, находить сумму числового ряда.

Сведения из теории:

Числовая последовательность – функция вида $y=f(x)$, $x \in N$, где N – множество натуральных чисел (или функция натурального аргумента), обозначается $y=f(n)$ или $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$

Значения $y_1, y_2, y_3, \dots$ называют соответственно первым, вторым, третьим, ... членами последовательности.

Пример

Вычислить первые три значения для функции $y=n^2$.

Решение:

подставляя в $y=n^2$ значения $n=1, n=2, n=3$ получим первые три значения функции:

$$\begin{aligned}y_1 &= 1^2 = 1; \\ y_2 &= 2^2 = 4; \\ y_3 &= 3^2 = 9.\end{aligned}$$

Способы задания последовательностей

Последовательности можно задавать различными способами, среди которых особенно важны три: аналитический, описательный и рекуррентный.

1. Последовательность задана аналитически, если задана формула ее n -го члена: $y_n=f(n)$.

Например, $y_n=2n-1$ – последовательность нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, ...

2. Описательный способ задания числовой последовательности состоит в том, что объясняется, из каких элементов строится последовательность.

Например, «Все члены последовательности равны 1». Это значит, речь идет о стационарной последовательности 1, 1, 1, ..., 1, ...

Или, например, «Последовательность состоит из всех простых чисел в порядке возрастания». Таким образом, задана последовательность 2, 3, 5, 7, 11, ... При таком способе задания последовательности в данном примере трудно ответить, чему равен, скажем, 1000-й элемент последовательности.

3. Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывается правило, позволяющее вычислить n -й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.

Например, $y_1=3; y_n=y_{n-1}+4$, если $n=2, 3, 4, \dots$

Здесь $y_1=3; y_2=3+4=7; y_3=7+4=11; \dots$

Можно видеть, что полученная в этом примере последовательность, может быть задана и аналитически: $y_n=4n-1$.

Пример

Вычислить следующие четыре члена последовательности $y_1=1; y_2=1; y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$.

Решение:

из формулы $y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$ видно, что каждый следующий член последовательности равен сумме двух предыдущих, поэтому:

$$y_1=1; y_2=1; y_3=1+1=2; y_4=1+2=3; y_5=2+3=5; y_6=3+5=8.$$

Последовательность, составленную в этом примере, специально изучают в математике, поскольку она обладает рядом интересных свойств и приложений. Ее называют последовательностью Фибоначчи – по имени итальянского математика 13в. Задать формулой последовательность Фибоначчи рекуррентно очень легко, а аналитически – очень трудно. n -е число Фибоначчи выражается через его порядковый номер следующей формулой:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Свойства числовых последовательностей

Числовая последовательность – частный случай числовой функции, поэтому ряд свойств функций рассматриваются и для последовательностей.

Последовательность $\{y_n\}$ называют *возрастающей*, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$$

Последовательность $\{y_n\}$ называют *убывающей*, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – *монотонные последовательности*.

Например, $y_1=1; y_n=n^2$ – возрастающая последовательность, а $y_1=1; y_n=\frac{1}{n}$ – убывающая последовательность.

Последовательность называется *периодической*, если существует такое натуральное число T , что начиная с некоторого n , выполняется равенство $y_n=y_{n+T}$. Число T называется длиной периода.

Например, последовательность $y_n=(-1)^n$ периодична с длиной периода $T=2$.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{n}{n+1}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$	2 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots$	3 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{1}{(3n-1)(2n+1)}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{4} - \frac{4}{9} + \frac{6}{16} - \frac{8}{25} + \dots$
4 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и	5 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и	6 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и

определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{2n}{2n+1}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$	определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{(n+1)!}{2n}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$	определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{5} - \frac{3}{8} + \frac{4}{11} - \frac{5}{14} + \dots$
7 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{2^n + 3}{2^{n+1}}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{9} - \frac{1 \cdot 2}{25} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{49} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{81} + \dots$	8 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{8}{9} + \frac{16}{16} + \dots$	9 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{3^{-n}}{(2n+1)^2}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{4}{8} + \frac{5}{16} - \dots$

Контрольные вопросы:

Что называется числовой последовательностью?

Перечислите способы задания последовательностей.

Перечислите свойства числовых последовательностей.

Домашнее задание: учебник с. 165 – 171 №1-2.

Практическая работа №22

Уравнение касательной к графику

Цель: Отработка навыков нахождения уравнения касательной к графику функции.

Сведения из теории:

Уравнение касательной к графику функции имеет вид

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

причем угловой коэффициент этой касательной равен производной функции в этой точке: $k = f'(x_0)$.

Другими словами, производная функции в точке x_0 равняется тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке. Уравнение прямой, проходящей через точку $(a; b)$, задается формулой $y = k(x - a) + b$.

Пример 1.

Найти уравнение касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Найдём значение функции $y(x_0)$. Для этого вместо x подставим (x_0) .

$y(x_0) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдём $y'(x_0) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. Найдём уравнение касательной $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Пример 2. Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, если абсцисса точки касания $x_0 = -2$.

Решение. Найдём ординату точки касания:

$$y_0 = y(-2) = -8 + 2 \cdot 4 - 4 \cdot (-2) - 3 = 5.$$

Найдём производную функции:

$$f'(x) = y' = 3x^2 + 4x - 4.$$

Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной:

$$f'(x_0) = y'(-2) = 12 - 8 - 4 = 0.$$

Теперь у нас есть всё, что требуется подставить в приведённую в теоретической справке запись, чтобы получить уравнение касательной.

Получаем

$$y - 5 = 0(x + 2)$$

$$y - 5 = 0$$

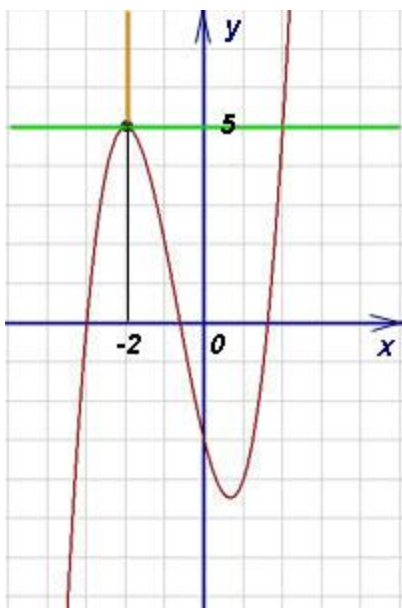
В этом примере нам повезло: угловой коэффициент оказался равным нулю, поэтому отдельно приводить уравнение к общему виду не понадобилось.

Теперь можем составить и уравнение нормали:

$$x + 2 + 0(y - 5) = 0$$

$$x + 2 = 0.$$

На рисунке ниже: график функции бордового цвета, касательная зелёного цвета, нормаль оранжевого цвета.



Пример 3.

Найдите угловой коэффициент наклона касательной, проведённой к графику функции $y = e^x - 5x - 10$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$

Ответ: -4

Задания для самостоятельного решения:

1. Найдите угловой коэффициент наклона касательной, проведённой к графику функции $y = e^x - x - 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$

2. Найдите угловой коэффициент наклона касательной, проведённой к графику функции $y = \sin x + \cos x$ в его точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$

3. Найдите угловой коэффициент наклона касательной,

з

проведённой к графику функции $y = \ln x + \frac{x}{3}$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$

4. Найдите угловой коэффициент наклона касательной, проведённой к графику функции $y = 3x^2 - 5x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$
абсциссой $x_0 = 3$

5. Укажите абсциссу точки графика функции $y = -2x^2 - x + 4$, в которой угловой коэффициент равен нулю.

6. Написать уравнение касательной, проведённой к графику функции $f(x) = (2x + 1)^3$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$

Домашнее задание: учебник с.174-176 № 1-4.

Применение правил дифференцирования. Вычисление производных основных элементарных функций

Цель: Знать систему и определение производной, табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций; правила дифференцирования функций; Уметь находить производную функции; находить дифференциал функции, дифференцировать элементарные функции.

Сведения из теории:

Правила вычисления производных:

1. $(x \pm y)' = x' \pm y'$,
2. $(xy)' = x'y + xy'$,
3. $\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy'}{y^2}$.

Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$c' = 0$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(kx + b)' = k$ $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Пример 1.

Вычислите производную функции $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 1 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x\right)' = -2 \cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} + 5 \cdot 1x^{1-1} = -4x - x^2 + 5.$$

Пример 2.

Вычислите производную функции $f(x) = \sqrt{x}(x-3)$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 2 вычисления производных:

$$f'(x) = (\sqrt{x}(x-3))' = (\sqrt{x})'(x-3) + \sqrt{x}(x-3)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} \cdot 1.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} = \frac{x-3+2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите производную функции:

1 вариант 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; 2) $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$; 4) $f(x) = \frac{(x^2-1)(x+3)}{15}$.	2 вариант 1) $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x$; 2) $f(x) = (x-2)\sqrt{3x}$; 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2}$; 4) $f(x) = (x^2+3)(x-4)$.
3 вариант 1) $f(x) = 2x^2\sqrt{x} - 4x + 11 + \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$; 4) $f(x) = \ln x(x+3)$.	4 вариант 1) $f(x) = 3x^3\sqrt{x} - 2x + 5 + \frac{2}{\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = \sqrt{x+1}(x^3-5)$; 3) $f(x) = \frac{9x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x+3}$.
5 вариант 1) $f(x) = 3x^3\sqrt{x} - 2x + 2 + \frac{2}{x^2\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = 0,5(x+1)^2$; 3) $f(x) = \frac{6x}{x^2+1}$; 4) $f(x) = \frac{(x+2)(x-5)}{12}$.	6 вариант 1) $f(x) = \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2x^2}{\sqrt{x}} + 5$; 2) $f(x) = (x^3+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \frac{x^3-3x}{x+2}$; 4) $f(x) = (x^2-1)(x+3)$.
7 вариант 1) $f(x) = \frac{-2x^3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3x^2}{\sqrt{x}} + 5x - 1$; 2) $f(x) = (x^3-2)\sqrt{x+1}$; 3) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3-2}{4x}$; 4) $f(x) = \ln x(e^x-1)$.	8 вариант 1) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4}x^4 - 0,5x^2 - 5$; 2) $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-x)$; 3) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x) = \frac{\ln x}{1+\ln x}$.
9 вариант	3) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$;

$$1) f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 3;$$

$$4) f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 1).$$

$$2) f(x) = (x-1)\sqrt{x+1};$$

Контрольные вопросы:

Перечислите значения производных некоторых табличных функций.

Сформулируйте правила вычисления производных.

Домашнее задание: выучить таблицу производных, учебник с.182 №1-5

Практическое занятие № 23

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Цель: освоить навыки нахождения наименьшего и наибольшего значения функции с помощью производной

Сведения из теории

Схема нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции

Найти область определения функции.

Найти производную функции.

Найти критические точки.

В каждом из интервалов, а которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции.

Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Найти производную функции.

Найти критические точки функции и выбрать те, которые принадлежат данному отрезку.

Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.

Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

Пример 1. Найти точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17$.

Решение.

$$1. D(y) = R$$

$$2. \text{ Найдем производную функции: } y' = (x^3 - 48x + 17)' = 3x^2 - 48.$$

3. Критические точки:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Производная существует во всех точках области определения функции.

4. Отметим найденные точки на числовой оси и определим знак производной справа и слева от этих точек:



При переходе через точку $x = -4$ знак производной меняет свой знак с плюса на минус, следовательно, в силу теоремы 10.4, $x = -4$ - точка максимума.

Ответ: -4 .

Пример 2. Найти наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0, 4]$.

Решение. Воспользуемся схемой нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке, представленной выше.

1. Найдем производную функции: $y' = 3x^2 - 27 = 3(x-3)(x+3)$.

2. Критические точки:

$$3(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = -3.$$

Отрезку $[0, 4]$ принадлежит только точка $x = 3$.

3. Вычислим значения функции в критической точке и на концах отрезка:

$$y(0) = 0, \quad y(4) = -44, \quad y(3) = -54.$$

4. Наименьшее значение $y_{\text{наим}} = y(3) = -54$.

Ответ: -54 .

Задания для самостоятельного решения:

- 1) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1; 4]$
- 2) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 48x + 48$ на отрезке $[-1; 4]$
- 3) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 21x + 21$ на отрезке $[-3; 4]$
- 4) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 - 26x + 26$ на отрезке $[-2; 4]$
- 5) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 2x^2 - 30x + 30$ на отрезке $[-1; 4]$
- 6) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 15x + 15$ на отрезке $[-1; 4]$
- 7) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 16x + 16$ на отрезке $[0; 15]$

8) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 24x + 24$ на отрезке $[-1; 7]$

9) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 - 12x + 12$ на отрезке $[-1; 5]$

Контрольные вопросы:

Сформулируйте правила вычисления наименьшего и наибольшего значения функции на промежутке.

Домашнее задание: учебник с 187 №1,2

Практическое занятие № 32

Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком

Цель: Уметь применять определение производной и ее механический смысл к решению прикладных задач.

Сведения из теории

Физический смысл первой производной.

Физический смысл производной заключается в том, что мгновенная скорость движения $g(t)$ в момент времени t есть производная пути по времени, т.е.

$$g(t) = \frac{dS(t)}{dt} = S'(t)$$

Физический смысл второй производной.

Ускорение прямолинейного движения в данный момент времени есть первая производная скорости по времени или вторая производная пути по времени.

$$a(t) = g'(t) = S''(t)$$

Пример.

1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением

$$S = t^3 - 6t^2 - 12t + 3.$$

В какой момент времени ускорение движения точки будет равно 24 м/с^2 ?

Решение.

а) Найдем скорость движения точки по формуле: $g(t) = S'(t)$

$$g(t) = (t^3 - 6t^2 - 12t + 3)' = 3t^2 - 12t - 12$$

б) Найти ускорение движения точки по формуле: $a(t) = g'(t)$

$$a(t) = (3t^2 - 12t - 12)' = 6t - 12$$

в) Из условия $a = 24 \text{ м/с}^2$, найти момент времени:

$$6t - 12 = 24$$

$$6t = 36$$

$$t = 6 \text{ с}$$

Ответ: 6 с.

Правила дифференцирования и таблица производных основных функций.

Правила.

1. $C' = 0$

2. $x' = 0$

3. $(U \pm g)' = U' \pm g'$

4. $(U \cdot g)' = U' \cdot g + U \cdot g'$

5. $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$

6. $\left(\frac{U}{g}\right)' = \frac{U' \cdot g - U \cdot g'}{g^2}$

Производные основных элементарных функций.

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \neq 0$

2. $(e^x)' = e^x$

3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

6. $(\sin x)' = \cos x$

7. $(\cos x)' = -\sin x$

8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Задания для самостоятельного решения

1. Тело движется вверх по закону $S(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ с начальной скоростью

$v_0 = 30 \text{ м/с}$, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. Через сколько секунд скорость станет равной 10 м/с ?

2. Найдите силу, действующую на тело массой 5 кг , движущееся по закону $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + 1$ в момент времени $t = 3 \text{ с}$.

3. Определить кинетическую энергию точки, массой $m = 2 \text{ кг}$, движущейся по закону $S(t) = 3t^2 + 4$ в момент времени $t = 2 \text{ с}$.

4. Точка движется по прямой по закону $S(t) = 2t^2 - 3t - 1$. Найти ускорение точки в момент времени $t = 2 \text{ с}$.

Домашнее задание: выполнить с.р. № 8 вариант 2.

Практическое занятие № 24

Решение практических задач с использованием понятия второй производной.

Цель: Знать систему и определение производной, второй производной и производных высших порядков, табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций, правила вычисления производной сложной функции; Уметь находить производную сложной функции, находить вторую производную и производную высших порядков.

Сведения из теории:

Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $z = f(x)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0 , которая вычисляется по формуле:

$$z'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Пример 1.

Вычислите производную функции $y = (x^2 + 3x + 10)^2$.

Решение:

представим заданную функцию как композицию квадратичной функции и степенной

$$y = (x^2 + 3x + 10)^2;$$

$$g(x) = x^2 + 3x + 10;$$

$$f(x) = (g(x))^2;$$

$$f'(x) = ((g(x))^2)' = 2g(x) \cdot (g(x))';$$

$$y' = 2(x^2 + 3x + 10) \cdot (x^2 + 3x + 10)' = 2(x^2 + 3x + 10)(2x + 3).$$

Производные высших порядков

Вторая производная это производная от первой производной, т.е. $y'' = (y')'$, и т.д.

Производные высших порядков обозначаются римскими цифрами.

Вторая производная, ее механический смысл.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всей области ее определения. Производная $y' = f'(x)$ называется производной первого порядка. Пусть первая производная $y' = f'(x)$ так же является дифференцируемой функцией от x . Производная от первой производной называется второй производной или производной второго порядка.

Обозначение: y'' , f'' , $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Механический смысл второй производной. Пусть материальная точка движется по закону $s = f(t)$. Скорость движения материальной точки определяется по формуле: $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$.

Скорость $v(t)$ так же функция времени t . Тогда производная

$$v'(t) = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

если она существует, определяет скорость изменения скорости материальной точки, движущейся по закону $s = f(t)$.

Скорость изменения скорости называется ускорением и обозначается $a(t)$. Ускорение $a(t)$ прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени.

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Пример 2. Тело движется прямолинейно по закону $s = 1 - 2t + t^3$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.

$$\begin{aligned} v(t) = s'(t) &= -2 + 3t^2 & v(3) &= -2 + 3 \cdot 3^2 = 25 \text{ м/с.} \\ a(t) = v'(t) &= 6t & a(3) &= 6 \cdot 3 = 18 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

Пример 3.

Найти четвертую производную $y = x^6 + 4x + 12$.

Решение:

вычисляем последовательно производные:

$$y' = 6x^5 + 4;$$

$$y'' = 30x^4;$$

$$y''' = 120x^3;$$

$$y^{IV} = 360x^2.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите значение «сложной» производной в указанной точке:

1 вариант 1) $f(x) = \sin^2 x$; $f'(\pi/4)$; 2) $f(x) = \ln \cos x$; $f'(-\pi/3)$; 3) $f(x) = \sin 2x - \cos^2 x$; $f'(0)$; 4) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$; $f'(\pi/4)$; 5) $f(x) = e^{\sin x}$; $f'(0)$.	2 вариант 1) $f(x) = \cos^2 x$; $f'(-\pi/4)$; 2) $f(x) = \ln \sin x$; $f'(\pi/6)$; 3) $f(x) = \sin^2 x + \cos 2x$; $f'(0)$; 4) $f(x) = \ln \operatorname{ctg} x$; $f'(-\pi/4)$; 5) $f(x) = e^{\cos 2x}$; $f'(\pi/4)$.
3 вариант 1) $f(x) = \ln \sin^2 x$; $f'(\pi/4)$; 2) $f(x) = \cos^2 x^2$; $f'(\sqrt{\pi}/2)$;	4 вариант 1) $f(x) = -2\sin^2 x$; $f'(-\pi/4)$; 2) $f(x) = \ln \cos x$; $f'(\pi/3)$; 3) $f(x) = 2\sin 2x + 3\cos 3x$; $f'(0)$;

3) $f(x) = 2\sin^2 x \cos x; f'(\pi/2);$ 4) $f(x) = \operatorname{tg}^2 3x; f'(0);$ 5) $f(x) = e^{\sin 2x} - 3e^{\cos 2x}; f'(0).$	4) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x; f'(\pi/4);$ 5) $f(x) = e^{-2\sin x}; f'(0).$
5 вариант 1) $f(x) = \ln \cos^2 2x; f'(\pi/8);$ 2) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x; f'(\pi/4);$ 3) $f(x) = \ln \sqrt{\cos 2x}; f'(\pi/8);$ 4) $f(x) = \ln \operatorname{tg} 2x; f'(\pi/8);$ 5) $f(x) = e^{\cos 2x} - 2e^{\sin 2x}; f'(\pi/4).$	6 вариант 1) $f(x) = \ln \operatorname{tg}^2 2x; f'(\pi/24);$ 2) $f(x) = \cos^3 x; f'(\pi/4);$ 3) $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x; f'(\pi/4);$ 4) $f(x) = e^{-\sin x} - e^{-\cos x}; f'(\pi/2);$ 5) $f(x) = \ln \sqrt{\sin x}; f'(\pi/4).$
7 вариант 1) $f(x) = \ln \cos^2 4x; f'(\pi/16);$ 2) $f(x) = 4\cos^2 x; f'(\pi/4);$ 3) $f(x) = 4\sin^5 2x; f'(\pi/8);$ 4) $f(x) = \ln \operatorname{tg} 3x; f'(\pi/12);$ 5) $f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}; f'(\pi/2).$	8 вариант 1) $f(x) = \ln \sqrt{\sin x}; f'(\pi/8);$ 2) $f(x) = \cos^4 3x; f'(\pi/6);$ 3) $f(x) = \ln \sqrt{\operatorname{tg} 3x}; f'(\pi/12);$ 4) $f(x) = \arcsin 4x + e^{3x}; f'(0);$ 5) $f(x) = 5\arccos \sqrt{x}; f'(1/2).$
9 вариант 1) $f(x) = \ln \sqrt{\cos 2x}; f'(-\pi/8);$ 3) $f(x) = \ln \sqrt{\operatorname{ctg} 3x}; f'(-\pi/12);$ 5) $f(x) = 5\arccos \sqrt{1-x}; f'(1/2).$	

Контрольные вопросы:

Сформулируйте правила вычисления производных сложной функции.

Что называется второй производной данной функции?

Домашнее задание:

Практическое занятие № 25

Установление связи свойств функции и производной по их графикам. Проведение с помощью производной исследования функции, заданной формулой.

Цель: Знать общую схему построения графиков функций;

Уметь исследовать функцию с помощью первой, второй производной, строить графики функций.

Сведения из теории:

Общая схема построения графиков функций:

найти область определения функции;

найти точки пересечения графика функции с осями координат;

найти промежутки монотонности функции и экстремумы функции;

найти промежутки выпуклости и точки перегиба;

построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример 1.

Исследовать функцию $y = (x+1) \cdot (x-2)^2$ и построить ее график.

Решение:

1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых x . Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.

2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат: график функции $y = (x+1) \cdot (x-2)^2$ пересекает ось Ox при $y=0$, т. е.

$$\begin{aligned}(x+1) \cdot (x-2)^2 &= 0; \\ x+1 &= 0 \text{ или } (x-2)^2 = 0; \\ x &= -1 \text{ или } x = 2.\end{aligned}$$

График функции $y = (x+1) \cdot (x-2)^2$ пересекает ось Oy при $x=0$, т. е.

$$y = (0+1) \cdot (0-2)^2 = 1 \cdot 4 = 4.$$

Т.о. мы получили три точки: $(-1; 0)$, $(2; 0)$, $(0; 4)$.

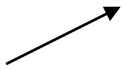
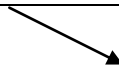
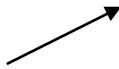
3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой производной:

$$y' = ((x+1) \cdot (x-2)^2)' = 3x \cdot (x-2).$$

Из уравнения $y' = 0$ найдем критические точки:

$$\begin{aligned}3x \cdot (x-2) &= 0; \\ x_1 &= 0, x_2 = 2.\end{aligned}$$

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y		4		0	
	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$, убывает на интервале $(0; 2)$, имеет максимум при $x=0$ и минимум при $x=2$: $y_{\max} = y(0) = 4$; $y_{\min} = y(2) = 0$.

4) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной:

$$y'' = (3x \cdot (x-2))' = 6 \cdot (x-1).$$

Кривая выпукла там, где $y'' < 0$, т. е.

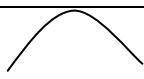
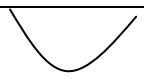
$$\begin{aligned}6 \cdot (x-1) &< 0, \\ x &< 1.\end{aligned}$$

Кривая вогнута там, где $y'' > 0$, т. е. $x > 1$.

На интервале $(-\infty, 1)$ кривая выпукла; на интервале $(1, +\infty)$ – вогнута.

Точку перегиба найдем из уравнения $y''=0$. Т. о., $x=1$ – абсцисса точки перегиба, т.к. эта точка разделяет интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Ордината точки перегиба: $y(1)=2$.

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+
y		2	
	выпукла	перегиб	вогнута

5) По полученным точкам строим график:

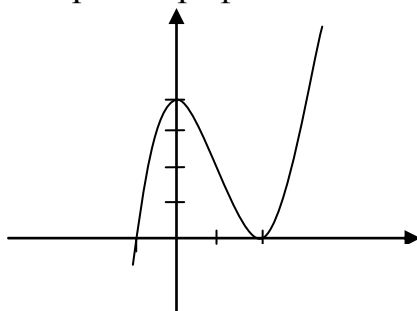


Рисунок 23. График функции $y=(x+1) \cdot (x-2)^2$

Задания для самостоятельного решения:

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

1 вариант $y = -x^4 + 8x^2 + 9.$	2 вариант $y = x^3 - 3x.$	3 вариант $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8.$
4 вариант $y = x^4 - 5x^2 + 4.$	5 вариант $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$	6 вариант $y = x^3 - 12x + 4.$
7 вариант $y = -x^3 + x.$	8 вариант $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2.$	9 вариант $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2.$

Контрольные вопросы:

Что называется областью определения и областью значений функции?

Приведите примеры применения первой производной к исследованию функции.

Приведите примеры применения второй производной к исследованию функции.

Расскажите общую схему исследования и построения графика функции.

Домашнее задание: выполнить с.р №9

Практическое занятие № 26

Решение задач на связь первообразной и ее производной. Правила нахождения первообразных

Цель: закрепить знания, умения и навыки интегрирования функций

Теоретический материал:

Определение: **Неопределенным интегралом** функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$F(x) + C$. Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ - есть некоторая первообразная функции $f(x)$ на этом промежутке, $C - \text{const}$. При этом знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ - подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменная интегрирования, C - постоянная интегрирования.

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется интегрированием данной функции.

Интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования. У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределенный интеграл.

Таблица неопределенных интегралов

$\int dx = x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \tg x dx = -\ln \cos x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\ctg x + C$	$\int \ctg x dx = \ln x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$

Свойства неопределенного интеграла:

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx;$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C;$$

Пример 1

Вычислить

определенный

интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \stackrel{(1)}{=} 2 \int_1^2 x^2 dx = \frac{2}{3} (x^3) \Big|_1^2 \stackrel{(2)}{=} \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}$$

Непосредственное интегрирование

Найти интегралы и проверить правильность интегрирования дифференцированием.

$$1) \int x^3 dx, 2) \int \sqrt[5]{x^4} dx, 3) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2}}, 4) \int 10x dx, 8) \int -\frac{dx}{3}.$$

Решение.

$$1) \int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c, \quad \left(\frac{x^4}{4} + c\right)' = x^3 - \text{интеграл вычислен, верно.}$$

$$2) \int \sqrt[5]{x^4} dx = \int x^{\frac{4}{5}} dx = \frac{x^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1} + c = \frac{5x^{\frac{9}{5}}}{9} + c,$$

$$\left(\frac{5x^{\frac{9}{5}}}{9} + c\right)' = \frac{5}{9} \left(x^{\frac{9}{5}} + c\right)' = \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{5} x^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{x^4}$$

$$3) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2}} = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + c = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} + c,$$

$$\left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} + c\right)' = -\frac{2}{3} \left(x^{-\frac{3}{2}} + c\right)' = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2}}$$

$$4) \int 10x dx = 10 \int x dx = 10 \frac{x^2}{2} + c = 5x^2 + c,$$

$$(5x^2 + c)' = 5 \cdot 2 \cdot x = 10x,$$

$$5) \int -\frac{dx}{3} = -\frac{1}{3} \int dx = -\frac{x}{3} + c, \quad \left(-\frac{x}{3} + c\right)' = -\frac{1}{3}.$$

№ 285 Найти интегралы.

$$1) \int (2x^2 - 3x - 7) dx, \quad 2) \int \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right) dx, \quad 3) \int \frac{3x^2(2+x^2)}{2} dx,$$

$$4) \int \frac{3+2t-t^2}{t^4} dt, \quad 5) \int \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Решение.

$$1) \int (2x^2 - 3x - 7) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 7x + c,$$

$$2) \int \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right) dx = 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x} + c.$$

$$3) \int \frac{3x^2(2+x^2)}{2} dx = \frac{1}{2} \int (6x^2 + 3x^4) dx = \frac{1}{2} \left(2x^3 + \frac{3x^5}{5}\right) + c.$$

$$4) \int \frac{3+2t-t^2}{t^4} dt = \int (3t^{-4} + 2t^{-3} - t^{-2}) dt = -t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} + c = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2} + c.$$

При вычислении интеграла предварительно числитель подынтегральной функции почленно разделили на знаменатель.

$$5) \int \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int (2x^{-\frac{1}{2}} + 1) dx = 4\sqrt{x} + x + c.$$

№288(1,2) Найти интегралы.

$$1) \int (2^x - \frac{1}{1+x^2}) dx, \quad 2) \int (\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 7 \cos x) dx.$$

Решение:

$$1) \int (2^x - \frac{1}{1+x^2}) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \operatorname{arctg} x + c,$$

$$2) \int (\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 7 \cos x) dx = 3 \arcsin x - 7 \sin x + c.$$

Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки)

Во многих случаях, удаётся введением вместо переменной интегрирования x новой переменной t свести данный интеграл $\int f(x) dx$ к новому интегралу, который или содержится в таблице основных интегралов, или легко вычисляется другим способом. Этот метод интегрирования получил название метода замены переменной или метода интегрирования подстановкой.

В основе метода подстановки вычисления неопределённых интегралов лежит следующее утверждение, являющееся следствием правила дифференцирования сложной функции:

Пусть даны функции $f(x)$, $x \in (a; b)$, и $\varphi(t)$, $t \in (c; d)$, и пусть существует сложная функция $f(\varphi(t))$, $t \in (c; d)$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, а функция $\varphi(t)$ дифференцируема, то функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in (c; d)$, и поэтому

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c.$$

№292 Найти интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{\sin^2 6x}, \quad 2) \int \frac{dx}{1+25x^2}, \quad 3) \int \cos \frac{x}{2} dx, \quad 5) \int 3^{-x} dx.$$

Решение:

1) *1 способ*

$$\int \frac{dx}{\sin^2 6x} = \left| \begin{array}{l} t = 6x \\ dt = 6dx \\ \frac{1}{6} dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{6} \operatorname{ctgt} + c = -\frac{1}{6} \operatorname{ctg} 6x + c,$$

2 способ

$$\int \frac{dx}{\sin^2 6x} = \frac{1}{6} \int \frac{d(6x)}{\sin^2 6x} = -\frac{1}{6} \operatorname{ctg} 6x + c,$$

$$2) \int \frac{dx}{1+25x^2} = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} 5x + c, \quad 3) \int \cos \frac{x}{2} dx = 2 \sin \frac{x}{2} + c, \quad 4) \int 3^{-x} dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + c.$$

№294(1,2,4,6) Найти интегралы.

$$1) \int \frac{dx}{(x-8)^9}, \quad 2) \int \frac{dx}{9-x}, \quad 4) \int (4x+3)^{17} dx, \quad 6) \int \sin(3x-1).$$

Решение:

$$1) \int \frac{dx}{(x-8)^9} = -\frac{1}{8(x-8)^8} + c, \quad 2) \int \frac{dx}{9-x} = -\ln(9-x) + c,$$

$$4) \int (4x+3)^{17} dx = \frac{(4x+3)^{18}}{72} + c, \quad 6) \int \sin(3x-1) = -\frac{1}{3} \cos(3x-1) + c.$$

№296 Найти интегралы.

$$1) \int 2x \cos x^2 dx, \quad 2) \int (3x^2 - x + 2)(6x-1) dx, \quad 3) \int e^{x^2+5x-1} (2x+5) dx,$$

$$4) \int x \sqrt[3]{5x^2+1} dx, \quad 5) \int \frac{7x}{1-x^2} dx, \quad 6) \int \frac{2x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}, \quad 7) \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^6}}.$$

Решение:

$$1) \int 2x \cos x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \int \cos t dt = \sin t + c = \sin x^2 + c,$$

$$2) \int (3x^2 - x + 2)(6x-1) dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x^2 - x + 2 \\ dt = (6x-1) dx \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(3x^2 - x + 2)^2}{2} + c,$$

$$3) \int e^{x^2+5x-1} (2x+5) dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 5x - 1 \\ dt = (2x+5) dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2+5x-1} + c,$$

4)

$$\int x \sqrt[3]{5x^2 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} t^3 = 5x^2 + 1 \\ 3t^2 dt = 10x dx \\ \frac{3}{10} t^2 dt = x dx \end{array} \right| = \frac{3}{10} \int t \cdot t^2 dt = \frac{3}{10} \int t^3 dt = \frac{3}{10} \frac{t^4}{4} + c = \frac{3}{40} (5x^2 + 1)^4 + c,$$

$$5) \int \frac{7x}{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ -\frac{1}{2} dt = x dx \end{array} \right| = -7 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{7}{2} \ln|t| + c = -\frac{7}{2} \ln(1-x^2) + c,$$

$$6) \int \frac{2x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 1}} = \left| \begin{array}{l} t^2 = x^3 + 1 \\ 2t dt = 3x^2 dx \\ \frac{2}{3} t dt = x^2 dx \end{array} \right| = 2 \cdot \frac{2}{3} \int \frac{t dt}{t} = \frac{4}{3} t + c = \frac{4}{3} \sqrt{x^3 + 1} + c,$$

$$7) \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \left| \begin{array}{l} t^2 = 1 - x^6 \\ 2t dt = -6x^5 dx \\ -\frac{1}{3} t dt = x^5 dx \end{array} \right| = -\frac{1}{3} \int \frac{t dt}{t} = -\frac{1}{3} t + c = -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^6} + c.$$

Задания для самостоятельного решения

1.

$$\text{B-1. } 1) \int \frac{3x^2 - x + 4}{\sqrt{x}} dx, \quad 2) \int \frac{dx}{4x+7}, \quad 3) \int e^{\cos x} \sin x dx.$$

$$\text{B-2. } 1) \int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad 2) \int e^{3x-6} dx, \quad 3) \int \frac{x dx}{2-3x^2}.$$

$$\text{B-3. } 1) \int \frac{5x^4 + \sqrt{x} - x\sqrt{x}}{4x} dx, \quad 2) \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}}, \quad 3) \int \frac{x dx}{\sqrt{3+x^2}}.$$

$$\text{B-4. } 1) \int \frac{7-x^3 + \sqrt[3]{x}}{x} dx, \quad 2) \int \frac{dx}{1+4x^2}, \quad 3) \int x^2 \sqrt[3]{x^3-8} dx.$$

$$\text{B-5. } 1) \int \frac{1-4x^4+x}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad 2) \int 5^{2-6x} dx, \quad 3) \int \frac{e^{\ln x}}{x} dx.$$

$$\text{B-6. } 1) \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} dx, \quad 2) \int (7-5x)^4 dx, \quad 3) \int 6x \cdot \sin(3x^2) dx.$$

В-7 1) $\int \frac{7x - 8\sqrt{x} + x^3}{x} dx$, 2) $\int \frac{4dx}{7-3x}$, 3) $\int e^{x^2+5x} (2x+5) dx$.

В-8 1) $\int \frac{9+x^2-\sqrt[3]{x^2}}{x^2} dx$, 2) $\int e^{8-5x} dx$, 3) $\int x\sqrt{3-x^2} dx$.

В-9 1) $\int \frac{x+\sqrt{x}-2x^3}{x^4} dx$, 2) $\int 7^{5-4x} dx$, 3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-3}}$.

В-10 1) $\int \frac{6x-x^4+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$, 2) $\int (3x-5)^5 dx$, 3) $\int 6^{x^2+3} \cdot x dx$.

2.

Уровень	1 - Вариант	2 - Вариант
1 - 2	1. Что такое интеграл ? 2. Верно ли, что $\int_1^6 dx = 5$	1. Напишите формулу Ньютона – Лейбница. 2. Верно ли, что $\int_1^4 dx = 3$
3 - 6	Вычислите интегралы $\int_{-1}^2 x dx, \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx, \int_1^2 x^{-4} dx, \int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{x}{3} dx$	Вычислите интегралы $\int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{x}{6} dx, \int_1^4 5dx, \int_1^2 x^{-3} dx, \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$
7 - 10	Вычислите интегралы $\int_0^1 (3-4x)^4 dx$ $\int_1^4 (x^2 - 6x + 9) dx,$ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2(x + \frac{\pi}{3}) - \sin^2(x + \frac{\pi}{3})) dx$	Вычислите интегралы $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ $\int_{-5}^1 (x^2 + 8x + 16) dx$ $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} 12 \sin(\frac{\pi}{8} - x) \cos(\frac{\pi}{8} - x) dx$

Контрольные вопросы

Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$, при $x \in (a; b)$?

Что называется неопределенным интегралом?

Перечислите основные формулы интегрирования.

Сформулируйте суть метода непосредственного интегрирования.

Сформулируйте суть метода замены переменной.

Домашнее задание: Выучить таблицу интегралов, учебник с. 194

Практическое занятие № 27

Вычисление площади криволинейной трапеции

Цель: закрепить знания, умения и навыки нахождения площади криволинейной трапеции с помощью интеграла.

Сведения из теории

-вычисление площадей плоских фигур.

Как, известно, определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции. На этом основано его применение к вычислению площадей плоских фигур.

Рассмотрим криволинейную трапецию $aABb$, ограниченную графиком неотрицательной непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, отрезком $[a, b]$ оси Ox , отрезками прямых: $x = a$, $x = b$ ($a < b$) (рис.1). В этом случае площадь криволинейной трапеции, как известно, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (2.8)$$

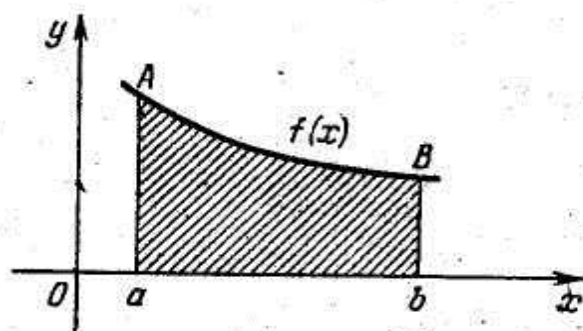


Рис. 1

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = f(x) = (x-1)^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ и отрезком $[-1; 2]$ оси Ox .

Решение: данная плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (2.8):

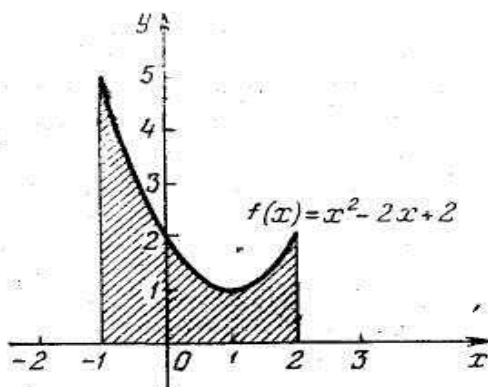


Рис.2

$$S = \int_{-1}^2 ((x-1)^2 - 1) dx = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = 6 \text{ кв.ед.}$$

Пусть теперь функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ - неположительная непрерывная функция (т.е. $f(x) \leq 0$, $x \in [a, b]$). Криволинейная трапеция с основанием $[a, b]$, ограниченная снизу кривой $y = f(x)$, лежит ниже оси Ox . Из соображений симметрии заключаем, что её площадь S равна площади другой криволинейной трапеции, имеющей то же основание, но ограниченной сверху кривой $y = -f(x)$. Так как по условию $f(x) < 0$, $-f(x) > 0$ и, применяя формулу (2.8), найдём

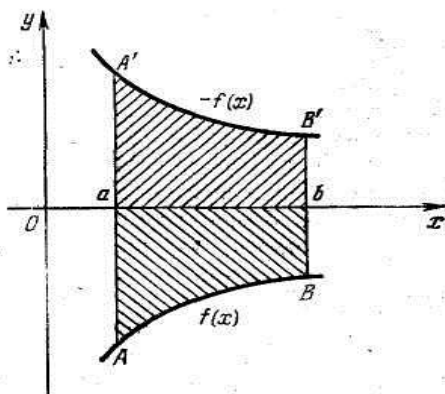


Рис.3

$$S = \int_a^b (-f(x)) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (2.9)$$

Так выражается площадь криволинейной трапеции в случае отрицательной подынтегральной функции.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x = -1 \text{ и осью } Ox.$$

Решение: График $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [-1; 0]$, расположен под осью Ox , поэтому для вычисления площади плоской фигуры применим формулу (2.9)

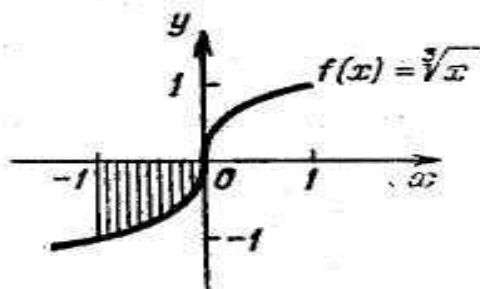


Рис.4

$$S = -\int_{-1}^0 \sqrt[3]{x} dx = -\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_{-1}^0 = \frac{3}{4} \text{ кв.ед.}$$

Формулы (2.8) и (2.9) можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx \quad (2.10)$$

Эта формула остаётся справедливой также и в том случае, когда функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ меняет знак, т.е. принимает на этом отрезке как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \cos x$, осями координат и прямой $x = \pi$.

Решение: Так как функция $y = \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ положительна, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ отрицательна, то

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

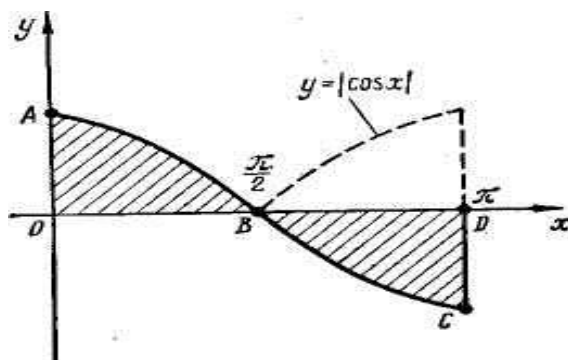


Рис.5

Поэтому по формуле (2.10)

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 \text{ кв.ед.}$$

Вычислим теперь площадь фигуры, ограниченной сверху кривой $y = f_1(x)$, снизу кривой $y = f_2(x)$ [$f_1(x) \geq f_2(x)$] и двумя прямыми $x = a, x = b$ ($a < b$). Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций $aABb$ и $aMNb$, то с учётом формулы (2.8) получим

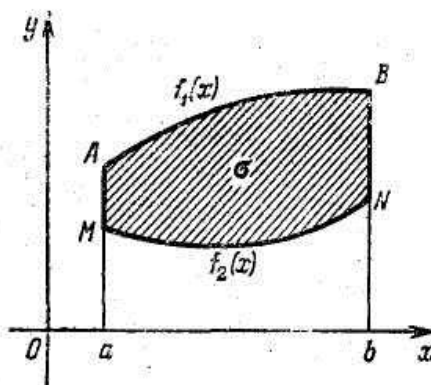


Рис.6

$$S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \quad (2.11)$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $y = f_1(x) = x + 3$ и $y = f_2(x) = x^2 + 1$.

Решение: Решая уравнение

$$x + 3 = x^2 + 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2.$$

Используя формулу (2.11), вычислим площадь фигуры:

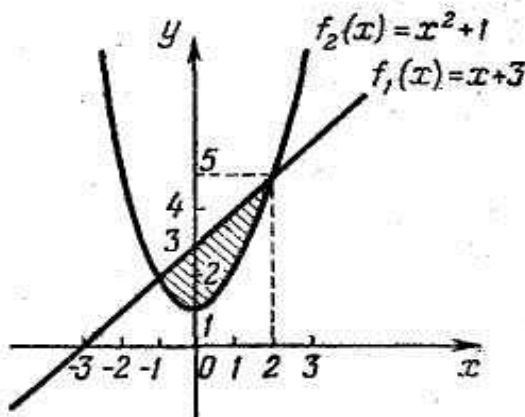


Рис.7

$$S = \int_{-1}^2 (x + 3 - x^2 - 1) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} \text{ кв.ед.}$$

Задания для самостоятельного решения

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1.1 $f(x) = 16 - x^2$, $f(x) = 0$.

1.2. $f(x) = 1 + x^2$, $y = 2$.

1.3. $f(x) = (x - 1)^2$, $y = 0$, $x = 3$.

1.4. $f(x) = 5\cos x$, $f(x) = 3\cos x$.

1.5. $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = 3x + 2$.

Домашнее задание: с.р.№11 вариант 2

Практическое занятие № 28, 29

Решение с помощью интеграла задач практического геометрического и физического содержания. Примеры применения интеграла в физике и геометрии

Цель: Знать таблицу значений неопределенных интегралов, способы вычисления определенных интегралов;

Уметь решать прикладные задачи с помощью определенного интеграла.

Сведения из теории:

Физические приложения определенных интегралов

Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $V=f(t)>0$ за промежуток времени от t_1 до t_2 ,

вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Пример 1.

Скорость движения точки изменяется по закону $V=(3t^2+2t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10с от начала движения.

Решение:

согласно условию, $f(t) = 3t^2+2t+1$, $t_1=0$, $t_2=10$. По формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

находим

$$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)dt = \left(\frac{3t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} + t \right) \Big|_0^{10} = (t^3 + t^2 + t) \Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110 \text{ (м)}.$$

Вычисление работы силы

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от $x=a$ до $x=b$, находится по формуле:

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука: $F=kx$, где F -сила, H ; x – абсолютное удлинение пружины, m , вызванное силой F , а k – коэффициент пропорциональности, H/m .

Пример 2.

Сжатие x винтовой пружины, пропорционально приложенной силе F . Вычислить работу силы F при сжатии пружины на $0,04$ м, если для сжатия ее на $0,01$ м нужна сила 10 Н.

Решение:

т.к. $x=0,01m$ при $F=10H$, то, подставляя эти значения в равенство $F=kx$, получим $10=0,01k$, откуда $k=1000$ H/m .

Подставив теперь в это же равенство значение k , находим $F=1000x$, т.е.

$f(x)=1000x$. Искомую работу найдем по формуле $A = \int_a^b f(x) dx$, полагая $a=0$,

$b=0,04$:

$$A = \int_0^{0,04} 1000x dx = \left(\frac{1000x^2}{2} \right) \Big|_0^{0,04} = 500x^2 \Big|_0^{0,04} = 500 \cdot 0,04^2 = 0,8 \text{ (Дж)}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант Скорость движения точки изменяется по закону $V=(-3t^2+12t)$ $м/с$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.	2 вариант Под действием силы $80H$ пружина растягивается на $0,02m$. Первоначальная длина пружины равна $0,15m$. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её до $0,2m$?	3 вариант Пружина в спокойном состоянии имеет длину $0,2m$. Сила в $50H$ растягивает пружину на $0,01m$. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от $0,22$ до $0,32$ m ?
4 вариант При сжатии пружины на $0,05m$ затрачивается работа $25Дж$. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на $0,1m$?	5 вариант Скорость движения точки $V=(6t^2+4)$ $м/с$. Найти путь, пройденный точкой за 5 $с$ от начала движения.	6 вариант Скорость движения точки $V=(-3t^2+18t)$ $м/с$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.
7 вариант Скорость движения	8 вариант Пружина растягивается	9 вариант Скорость движения

точки $V=(8t^2+2t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.	на 0,02м под действием силы 60Н. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12м?	точки изменяется по закону $V=(9t^2-8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

Контрольные вопросы:

Приведите примеры приложения определенных интегралов.

Домашнее задание: учебник с.199-201

Практическое занятие № 30, 31

Основные приемы решения уравнений и систем.

Цель: Знать способы решения уравнений;

Уметь решать уравнения различными способами.

Сведения из теории:

Метод разложения на множители

Суть данного метода в том, чтобы путем равносильных преобразований представить левую часть исходного уравнения, содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух выражений, содержащих неизвестную величину в меньшей степени. При этом справа от знака равенства должен оказаться ноль. Проще всего уяснить эту идею на конкретном примере.

Пример.

Решите уравнение методом разложения на множители: $2,5x^2 + 4x = 0$.

Решение:

осуществим разложение на множители (представим исходное выражение в виде произведения). Для этого вынесем переменную x за скобки:

$$x(2,5x + 4) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Следовательно,

$$x = 0 \text{ или } 2,5x + 4 = 0.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$2,5x = -4 \text{ или } x = -1,6.$$

Ответ: $x = 0$ и $x = -1,6$.

Задача для самостоятельного решения №1. Решите уравнение методом разложения на множители: $3x^2 + 1,5x = 0$.

Метод замены переменной

Суть данного метода в том, чтобы удачным образом заменить сложное выражение, содержащее неизвестную величину, новой переменной, в результате чего уравнение принимает более простой вид. Далее полученное уравнение решается относительно новой переменной, после чего происходит возврат к исходной переменной. Все эти идеи проще осознать на конкретном примере.

Пример .

Решите уравнение методом замены переменной: $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.

Решение:

такие уравнения называются биквадратными. Перепишем его в виде:

$$(x^2)^2 + 4x^2 - 5 = 0.$$

Введем новую переменную $t = x^2$. Тогда исходное уравнение примет следующий простой вид:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Решая полученное квадратичное уравнение, получаем, что:

$$t = -5 \text{ или } t = 1.$$

Возвращаемся теперь к старой переменной (обратная замена):

$$x^2 = -5 \text{ или } x^2 = 1.$$

Решений у первого уравнения нет, поскольку не существует такого действительного числа, квадрат которого был бы отрицателен. Второе уравнение имеет два корня ± 1 .

Ответ: ± 1 .

Задача для самостоятельного решения №2. Решите уравнение методом замены переменной: $9x^4 - 24x^2 + 7 = 0$.

Пример 85.

Решите уравнение методом замены переменной:

$$\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1.$$

Решение:

обращаем внимание на то, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения. Следовательно, без потери или приобретения лишних корней можно разделить числитель и знаменатель обеих дробей на x . Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{4}{4x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \frac{7}{x}} = 1.$$

Введем новую переменную: $t = 4x + \frac{7}{x}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{4}{t - 8} + \frac{3}{t - 10} = 1.$$

Выполнив элементарные преобразования: приведем дроби к общему знаменателю, приведем подобные слагаемые, получим:

$$\frac{t^2 - 25t + 144}{(t-8)(t-10)} = 0.$$

Дробь равна нулю, если нулю равен ее числитель, а знаменатель при этом не равен нулю. То есть уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} t^2 - 25t + 144 = 0 \\ t \neq 8 \\ t \neq 10 \end{cases}.$$

Решив первое уравнение системы, имеем: $t=16$ или $t=9$.

Переходя к обратной подстановке, получаем:

1. $4x + \frac{7}{x} = 16$, что при $x \neq 0$ равносильно уравнению $4x^2 - 16x + 7 = 0$, решая

которое, получаем $x = \frac{1}{2}$ или $x = \frac{7}{2}$.

2. $4x + \frac{7}{x} = 9$ что при $x \neq 0$ равносильно уравнению $4x^2 - 9x + 7 = 0$, у которого решений нет, поскольку его дискриминант отрицателен.

Ответ: $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$.

Задача для самостоятельного решения №3. Решите уравнение методом разложения на множители: $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$.

Решение рациональных и иррациональных уравнений.

Опр.

Уравнения, в которых неизвестная содержится в знаменателе дроби, называются рациональными.

Рациональные уравнения решают следующим образом, надо:

найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

заменить данное уравнение целым, умножив обе части на общий знаменатель;

решить получившееся уравнение;

исключить из него те корни, которые обращают в нуль общий знаменатель

Пример

$$\frac{5+2x}{4x-3} = \frac{3 \cdot (x+1)}{7-x}$$

$$\frac{5+2x}{4x-3} = \frac{3 \cdot (x+1)}{7-x} \Big| \cdot (4x-3) \cdot (7-x)$$

$$\frac{5+2x}{4x-3} = \frac{3 \cdot (x+1)}{7-x} \Bigg| \cdot (4x-3) \cdot (7-x)$$

$$(5+2x) \cdot (7-x) = (3x+3) \cdot (4x-3)$$

$$-14x^2 + 6x + 44 = 0$$

$$14x^2 - 6x - 44 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -5,5$$

Проверка:

$$x = 2 \quad 4 \cdot 2 - 3 = 5 \neq 0 \quad 7 - 2 = 5 \neq 0$$

$$x = -5,5 \quad 4 \cdot (-5,5) - 3 = -25 \neq 0 \quad 7 - (-5,5) = 7 + 5,5 = 12,5$$

Ответ: $x_1 = 2 \quad x_2 = -5,5$

Опр.

Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются иррациональными.

Для решения иррационального уравнения надо левую и правую части уравнения возвести в n -ую степень, равную показателю корня

Пример

1. Решение уравнения $\sqrt{1+3x} = 1-x$ методом возведения в квадрат обеих частей уравнения.

$$(\sqrt{1+3x})^2 = (1-x)^2;$$

$$1+3x = x^2 - 2x + 1;$$

$$x^2 - 5x = 0.$$

Решив это уравнение, находим корни $x_1 = 0, x_2 = 5$.

Проверка: если $x = 0$, то $\sqrt{1+3 \cdot 0} = 1-0$, $1 = 1$ – верно;

если $x = 5$, то $\sqrt{1+3 \cdot 5} = 1-5$, $4 = 4$ – неверно.

Ответ: $x = 0$.

Задача для самостоятельного решения

Задание 1. Решить уравнение: а) $\frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5$; б)

$$\frac{2}{x^2+5x} + \frac{3}{2x-10} = \frac{15}{x^2-25}$$

Задание 2. Решить уравнение: а) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$; б)

$$\sqrt{x^2+2x+10} = 2x-1$$

Контрольные вопросы:

В чем суть решения уравнения методом разложения на множители?

В чем суть решения уравнения методом замены переменной?

Домашнее задание: учебник с. 233-237.

Практическое занятие № 32,33

Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств. Решение уравнений с применением всех приемов

Цель: Знать этапы решения уравнений графическим методом, правила решения простых, дробно-рациональных неравенств с одной переменной; Уметь строить графики элементарных функций, решать уравнения различными способами, решать неравенства методом интервалов.

Сведения из теории:

Метод оценки области значений

Суть данного метода в сравнении областей значений выражений, входящих в уравнение. Часто такой анализ позволяет легко решать сложные уравнения, содержащие различные выражения (рациональные, тригонометрические, логарифмические, показательные и др.). Разберем это на конкретном примере.

Пример 1.

Решите уравнение, используя метода оценки области значений:
 $\cos^2 x = x^2 + 1$.

Решение:

рассмотрим функцию $f(x) = \cos^2 x$. Известно, что $-1 \leq \cos x \leq 1$, поэтому $0 \leq \cos^2 x \leq 1$. Итак, функция $f(x) = \cos^2 x$ может принимать значения только из промежутка $[0; 1]$.

Рассмотрим теперь функцию $g(x) = x^2 + 1$. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина расположена в точке $(0; 1)$.

Т.е. область значений данной функции (те значения, которые может принимать переменная y) представляет собой промежуток $[1; +\infty)$.

Т.о. выражения, стоящие справа и слева от знака равенства в исходном уравнении, могут оказаться равными, только если их значения окажутся равными 1, причем при одном и том же значении x . Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это условие выполняется при $x = 0$.

Действительно, $f(0) = \cos^2 0 = 1$ и $g(0) = 0^2 + 1 = 1$. При всех остальных значениях x функция $g(x) = x^2 + 1$ больше 1. Значит $x = 0$ – единственный корень уравнения.

Ответ: 0.

Задача для самостоятельного решения №1. Решите уравнение с использованием метода оценки области значений: $\sin^2 x = \left|x - \frac{\pi}{2}\right| + 1$.

Пример 2.

Решите уравнение: $\sqrt{2x - x^2 + 8} + \sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{-x - 2} + 1$.

Решение:

определим область допустимых значений (те значения, которые может принимать переменная x в данном уравнении). Исходим из того, что подкоренное выражение не может быть отрицательным:

$$\begin{cases} 2x - x^2 + 8 \geq 0, \\ x^2 - 4x \geq 0, \\ -x - 2 \geq 0 \end{cases}.$$

Решая систему методом интервалов, получаем:

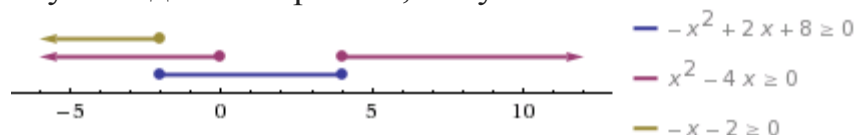


Рисунок 24. Изображение решений системы неравенств на числовой прямой

Т.о. область допустимых значений содержит одно единственное значение $x = -2$. Является ли это значение корнем уравнения, проще всего проверить прямой подстановкой:

$$\sqrt{2(-2) - (-2)^2 + 8} + \sqrt{(-2)^2 - 4(-2)} = \sqrt{-(-2) - 2} + 1, \\ \sqrt{12} \neq 1.$$

Т.е. $x = -2$ не является корнем уравнения.

Ответ: корней нет.

Задача для самостоятельного решения №2. Решите уравнение:

$$\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{x} - 1.$$

Пример 3.

Решите уравнение: $\sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 + 2x} = 2 - x$.

Решение:

пмножим уравнение на $\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x}$.

Вообще говоря, это преобразование не является равносильным, даже в области допустимых значений. Ведь могут найтись такие значения x при которых это выражение обратится в нуль. При таком преобразовании могут появиться посторонние корни, поэтому полученные ответы нужно будет проверить непосредственной подстановкой. Но главное, что в результате такого преобразования не произойдет потери корней.

Итак,

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 2 - x^2 - 2x &= (2 - x)(\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x}) \\ (x - 2) + (x - 2)(\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x}) &= 0, \\ (x - 2)(1 + \sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x}) &= 0. \end{aligned}$$

Выражение во вторых скобках не может быть равно нулю. Действительно, оба корня, по крайней мере, неотрицательны, поэтому если к их сумме прибавить 1, получится положительное выражение. То есть остается, что

$$x - 2 = 0 \text{ или } x = 2.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это корень данного уравнения:

$$\sqrt{2^2 + 3 \cdot 2 - 2} - \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2} = 2 - 2, 0 = 0.$$

Ответ: 2.

Задача для самостоятельного решения №3. Решите уравнение:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{x+10} - 4.$$

Метод интервалов

Пусть заданное неравенство имеет вид: $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$. Для решения этого неравенства используется так называемый *метод интервалов*, который состоит в следующем.

1. На числовую ось наносят точки $x_1, \dots, x_n$ разбивающие ее на промежутки, в которых выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено и сохраняет знак («плюс» или «минус»). Такими точками могут быть корни уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$. Соответствующие этим корням точки отмечают на числовой оси: закрашенными кружками – точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а светлыми кружками – не удовлетворяющие ему.

2. Определяют и отмечают на числовой оси знак выражения $\frac{f(x)}{g(x)}$ для значений, принадлежащих каждому из полученных промежутков. Достаточно определить знак функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ в любом таком промежутке, а в

остальных промежутках знаки «плюс» и «минус» будут чередоваться.

Изменение знаков удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (*кривой знаков*), проведенной через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ в

рассматриваемом промежутке. Промежутки, которые содержат точки, удовлетворяющие данному неравенству, иногда покрывают штрихами. Заштрихованная область в совокупности с полученными точками будет являться ответом к неравенству:

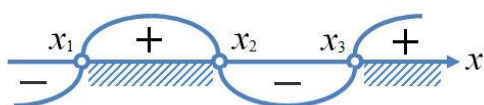


Рисунок 25. Кривая знаков

Пример 1.

Решите неравенство: $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} \leq \frac{1}{2}$.

Решение:

упрощаем неравенство путем равносильных преобразований: при умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1}{2} \leq 0.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{2 - (x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 5x + 6} &\leq 0, \\ \frac{-x^2 + 5x - 4}{x^2 - 5x + 6} &\leq 0, \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 6} &\geq 0. \end{aligned}$$

Выражения, стоящие в числителе и знаменателе, можно разложить на множители, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{(x - 4)(x - 1)}{(x - 2)(x - 3)} \geq 0.$$

Далее находим корни уравнений $(x - 4)(x - 1) = 0$ и $(x - 2)(x - 3) = 0$.

Из первого получаем $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. Из второго получаем $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Наносим на числовую прямую получившиеся точки, причем точки x_1 , x_2 обозначаем закрашенными кружочками (для них неравенство выполняется), а точки x_3 , x_4 светлыми (при этих значениях, выражение, стоящее слева от знака неравенства, не имеет смысла).

Определяем теперь знаки выражения $\frac{(x - 4)(x - 1)}{(x - 2)(x - 3)}$ на полученных промежутках (подставляем любое значение x из каждого полученного промежутка в данное выражение), изображаем кривую знаков, заштриховываем те промежутки, на которых исходное неравенство выполняется:

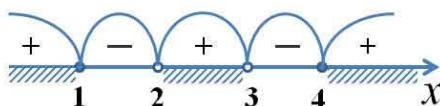


Рисунок 26. Кривая знаков выражения $\frac{(x - 4)(x - 1)}{(x - 2)(x - 3)}$

Итак, исходному неравенству удовлетворяют следующие значения: $x \in (-\infty; 1] \cup (2; 3) \cup [4; +\infty)$.

Задача для самостоятельного решения №1. Решите неравенство:

$$\frac{x+17}{x^2-x-6} \geq 0.$$

Пример 2.

Решите неравенство: $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2} > 0$.

Решение:

подкоренное выражение, как известно, не может принимать отрицательных значений, также не допускается нахождение в знаменателе дроби нуля. Следовательно, область допустимых значений данного неравенства определяется неравенством $x \geq 0$ и тем условием, что $x \neq 2$.

Решаем уравнения $\sqrt{x}-3=0$ и $x-2=0$.

Из первого уравнения получаем, что $x_1=9$.

Из второго уравнения получаем, что $x_2=2$.

Наносим область допустимых значений неравенства и полученные точки на числовую прямую, причем эти точки будут светлыми, поскольку ни одно из значений не удовлетворяет неравенству. Сразу определяем знаки

выражения $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2}$ в каждом из полученных промежутков и рисуем кривую знаков:

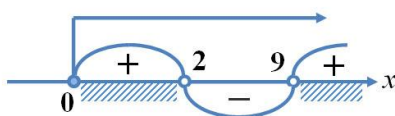


Рисунок 27. Кривая знаков выражения $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2}$

Верхней стрелкой на рисунке обозначена область допустимых значений неравенства. Ответом к неравенству будет являться промежуток, соответствующий на рисунке заштрихованной области.

Ответ: $x \in [0; 2) \cup (9; +\infty)$.

Задача для самостоятельного решения №2. Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0.$$

Пример 3.

Решите неравенство: $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{x} < 2$.

Решение:

подкоренное выражение не может принимать отрицательных значений, а в знаменателе дроби не должно быть нуля. Следовательно, область допустимых значений неравенства определяется следующей системой:

$$\begin{cases} 1-8x^2 \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{8}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{8}}, \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Решаем уравнение $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{x} - 2 = 0$.

Получаем, что $x_1=0$ и $x_2=\frac{1}{3}$. Наносим полученные точки на числовую прямую, не забывая о том, какие из них следует закрасить, а какие осветлить. Изображаем также на ней область допустимых значений и изображаем кривую знаков:

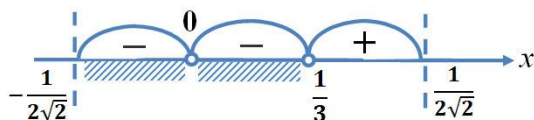


Рисунок 28. Кривая знаков выражения $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{x} - 2$

Пунктирные линии на рисунке ограничивают область допустимых значений неравенства. Заштрихованная область соответствует решению неравенства.

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Задача для самостоятельного решения №3. Решите неравенство:

$$\sqrt{2x+1} < \frac{2x+1}{2-x}.$$

Контрольные вопросы:

Дайте определение неравенства с одной переменной.

В чем суть метода интервалов?

Поясните суть метода оценки области значений при решении уравнений.

Какие нестандартные способы решения уравнений вы знаете?

Домашнее задание: учебник с. 242-246 № № 1-6

Практическая работа 34.

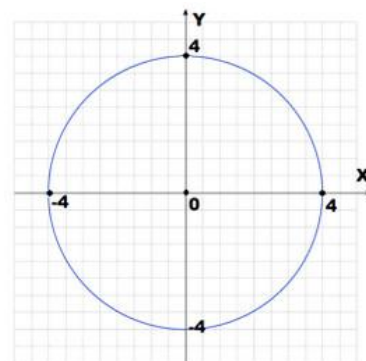
Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

Цель: научить изображать в декартовой системе координат все множество решений уравнений, неравенств и их систем.

Сведения из теории:

Уравнения.

Для уравнения $x^2 + y^2 = 16$ решением является всякая пара чисел, которые принадлежат окружности, радиус которой равен 4, а центром является точка с координатами (0;0). Изобразить графически решение данного уравнения просто. В данном примере мы получили бесконечное число решений, которые удовлетворяют условию выше.



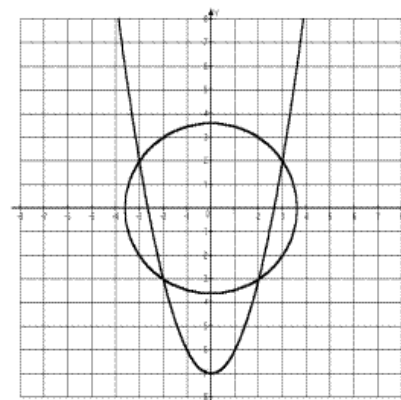
Системы уравнений.

Каждое из уравнений системы можно рассматривать как уравнение кривой. Поэтому решения системы двух уравнений с двумя неизвестными можно интерпретировать как координаты точек пересечения двух кривых.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ y = x^2 - 7. \end{cases}$$

Решение. Построим в одной координатной плоскости графики функций $x^2 + y^2 = 13$ и $y = x^2 - 7$. Эти графики пересекаются в четырех точках (2;-3), (-2;-3), (3;2), (-3;2).



Неравенства.

Неравенства вида $p(x;y) > 0$, $p(x;y) < 0$ называются неравенствами с двумя переменными, где $p(x;y)$ – алгебраическое выражение. Решением их называют всякую пару чисел, которые удовлетворяют данному неравенству (неравенство превращается в верное числовое неравенство). Решения неравенств с двумя переменными также проще изображать на графиках в декартовой системе координат.

Для изображения множества решений такого неравенства на координатной плоскости поступают следующим образом:

1. Строим график функции $y = f(x)$, который разбивает плоскость на две области.

2. Выбираем любую из полученных областей и рассматриваем в ней произвольную точку. Проверяем выполнимость исходного неравенства для этой точки. Если в результате проверки получается верное числовое неравенство, то заключаем, что исходное неравенство выполняется во всей области, которой принадлежит выбранная точка. Таким образом, множеством решений неравенства – область, которой принадлежит выбранная точка. Если в результате проверки получается неверное числовое неравенство, то множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.

3. Если неравенство строгое, то границы области, то есть точки графика функции $y = f(x)$, не включают в множество решений и границу изображают пунктиром. Если неравенство нестрогое, то границы области, то есть точки графика функции $y = f(x)$, включают в множество решений данного неравенства и границу в таком случае изображают сплошной линией.

Пример. Решить неравенство: $2x + 5y > 7$.

Решение. Для начала выразим y через x :
 $y > \frac{7-2x}{5}$. Построим прямую $y = \frac{7-2x}{5}$.

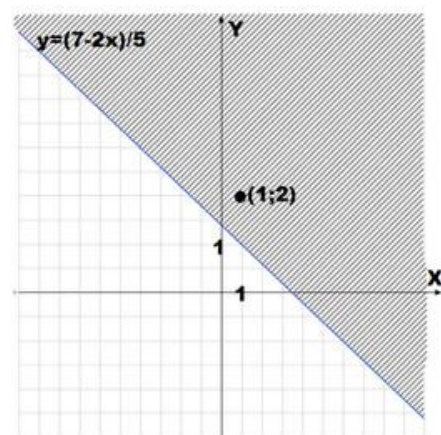
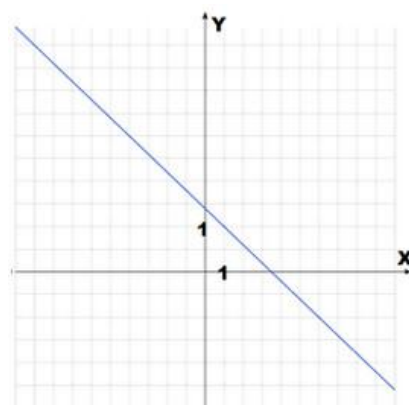
Множество всех решений неравенства расположено, либо выше, либо ниже данной прямой.

Можно подставить любую пару чисел и проверить: выполнилось неравенство или нет. Если неравенство выполнилось, то мы выбираем в качестве решения ту область, которой принадлежат эти пара чисел, если не выполнилось, то выбираем противоположную

область. Подставим пару (1;2): $2 > \frac{7-2}{5}$; $2 > 1$ –

верное неравенство. Значит, мы должны выбрать область выше нашей прямой, область в которой выполняется наше неравенство обычно принято изображать штриховкой.

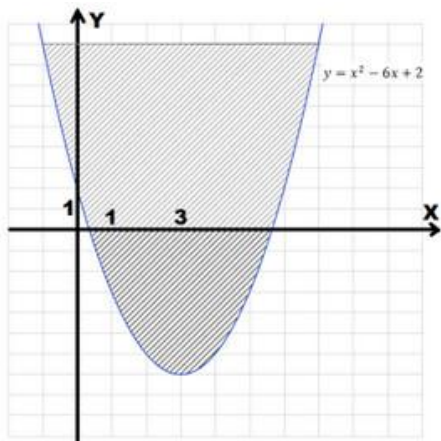
Системы неравенств.



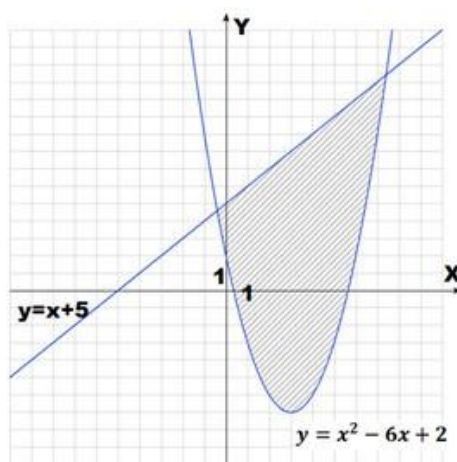
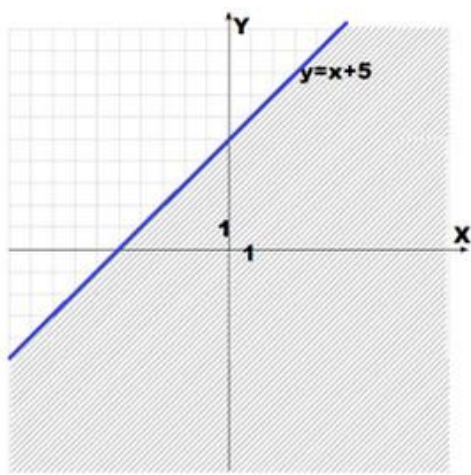
Нам осталось разобрать пример, решения системы неравенств с двумя переменными. Суть метода решений проста. Находим решение каждого неравенства в отдельности, изображаем решения на одной координатной плоскости и ищем пересечение этих решений.

Пример. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 6x + 2 \\ y \leq x + 5 \end{cases}$$

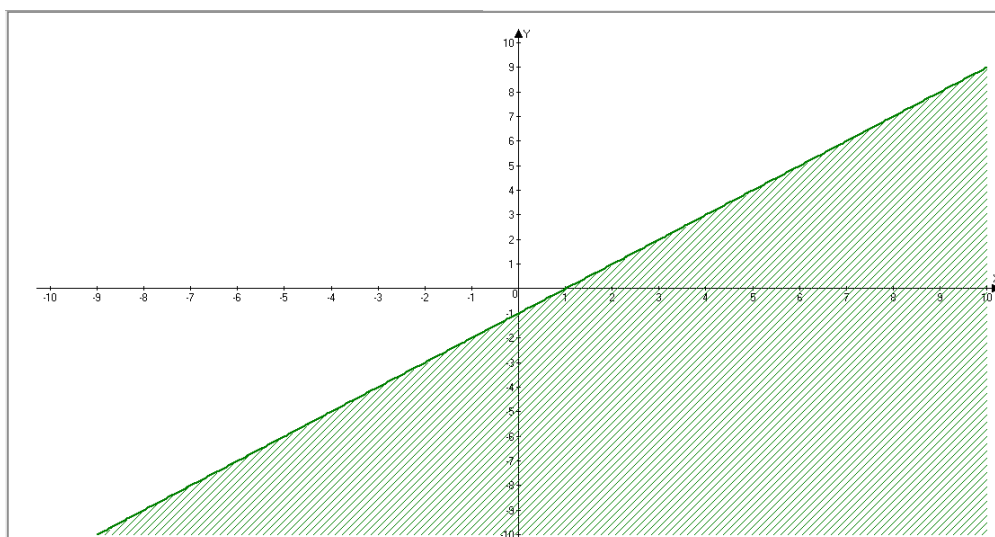


Решение. Найдем решение каждого неравенства в отдельности. Для неравенства $y \geq x^2 - 6x + 2$, множество всех точек расположено выше или "внутри" параболы. Решения неравенства $y \leq x + 5$ расположены ниже прямой $y = x + 5$. Изобразим оба графика на одной плоскости и найдем пересечение областей.



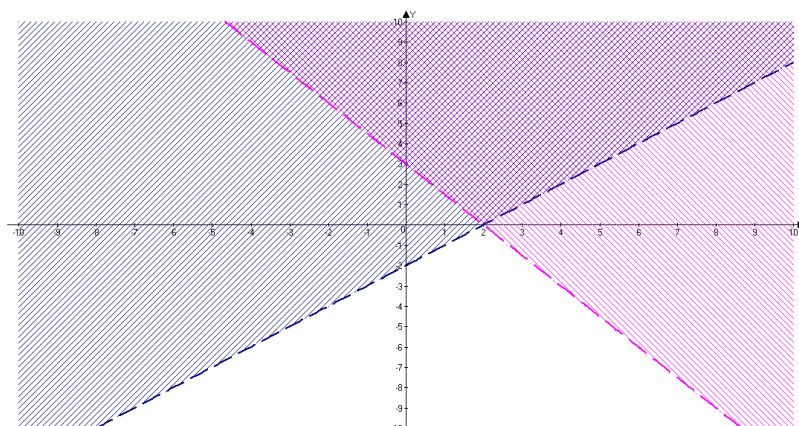
Для закрепления

Задание 1. Изобразите графически решение неравенства $y \leq x - 1$



Задание 2 Изобразите графически решение системы неравенств

$$\begin{cases} y > x - 2 \\ y > -1,5x + 3 \end{cases}$$



Для самостоятельного решения.

Пример 1.

$$\begin{cases} y < 2x + 1 \\ y > 2x - 2 \end{cases}$$

Пример 2

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ 1 - x \leq y \end{cases}$$

Пример 3.

$$\begin{cases} x^2 - 2y > 7 \\ 3x + y > 3 \end{cases}$$

Ответить на вопросы .

- Что является графическим решением уравнения с двумя переменными?
- Что является графическим решением неравенства с двумя переменными?
- Что является решением системы уравнений с двумя переменными?
- Что является решением системы неравенств с двумя переменными?
- Какая последовательность выполняется при решении системы линейных неравенств с двумя переменными?

Домашнее задание.

1. Решите графически системы неравенств

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x \geq -1, \\ y < 3; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x - 3 < 0, \\ 2 - y > 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} y \leq x + 3, \\ y \geq x - 1. \end{cases} \end{array}$$

2. Какое множество точек задается неравенством $x \cdot y \leq 4$? Изобразить.

Практическая работа № 35,36

Решение задач на перебор вариантов. Решение практических задач с использованием понятий и правил комбинаторики. Решение прикладных задач.

Цель: Знать определение соединений, их видов; формулу бинома Ньютона; свойства биномиальных коэффициентов;

Уметь по условию задачи различать виды соединений, вычислять разные виды соединений, раскладывать бином по степеням x ; возводить в различные степени трехчлены.

Сведения из теории:

Соединения, их виды

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями*.

Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n,$$

$n!$ -читается « n -факториал», причем $0!=1$ и $1!=1$.

Используя приведенные выше определения имеем формулы:

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

при решении задач часто используется равенство:

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m},$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

или

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{m!}.$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \leq m \leq n), \quad C_n^n = 1; \quad C_n^0 = 1; \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

П р и м е р 1. Каким числом способов можно обить 12 различных стульев, если есть 12 образцов обивочного материала, причем каждый материал имеется в любом количестве?

Р е ш е н и е. Поскольку имеется 12 различных образцов обивочного материала, то один стул можно обить двенадцатью различными способами. То же самое справедливо и для второго стула, так как каждый обивочный материал имеется в любом количестве. Но каждый способ обивки первого стула можно соединить с любым способом обивки второго, так что число различных способов обивки двух стульев равно $12^2 = 144$.

При этом важно, что имеющиеся стулья **р а з л и ч н ы**. Если бы они были одинаковыми, то число различных способов обивки было бы меньшим, так как способы, при которых первый стул обит материалом a , а второй – материалом b , или, наоборот, первый стул обит материалом b , а второй – материалом a , нельзя было бы считать различными способами.

Итак, для двух различных стульев мы получили 12^2 различных способов их обивки. Очевидно, что для каждого следующего стула остается в силе приведенное выше рассуждение: для каждого стула существует двенадцать возможных способов обивки, и каждый способ обивки данного стула можно соединить с любым способом обивки предыдущих. Отсюда следует, что для трех стульев число различных способов обивки составляет 12^3 , для четырех – 12^4 и так далее. Для двенадцати стульев это число составляет 12^{12} .

П р и м е р 2. Каким числом способов можно рассадить 12 гостей на имеющихся 12 различных стульях?

Р е ш е н и е. Представим себе, что гости входят в комнату по одному. Первому из входящих гостей предоставляется выбор из 12 различных стульев, то есть 12 возможностей, как и в предыдущем примере. Однако уже для следующего гостя остаются не те же двенадцать возможностей, что и для первого, а всего лишь одиннадцать, поскольку один из стульев оказывается уже занятым. По-прежнему каждое место, занятое первым гостем, может комбинироваться с любым другим местом, занятым вторым; поэтому общее число различных способов, с помощью которых можно рассадить двух гостей, равно $12 \cdot 11 = 132$.

Дальнейший ход решения теперь уже ясен. Для гостя, входящего третьим, останется только 10 различных возможностей, так как из 12 мест два места окажутся уже занятыми. Поэтому для трех гостей число различных способов рассадить их составляет $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$. Продолжая аналогичные рассуждения, найдем, что общее число различных способов рассадить 12 гостей на 12 стульях составляет $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 12! = 479001600$.

П р и м е р 3. В отделении 12 солдат. Каким числом способов можно

составить наряд из двух человек, если один из них должен быть назначен старшим?

Р е ш е н и е этой задачи очень похоже на решение предыдущей. Действительно, если назначить сначала старшего по наряду, то для его выбора у нас имеется 12 различных возможностей: каждый солдат отделения может быть назначен старшим наряда. После того как старший наряда назначен, вторым в наряд может быть назначен любой из оставшихся одиннадцати. Как и во всех предыдущих случаях, общее число различных нарядов составляет $12 \cdot 11 = 132$.

П р и м е р 4. Какое число различных парных нарядов можно назначить из 12 солдат отделения, если не требуется назначать старшего по наряду?

Р е ш е н и е. Легко понять, что число таких нарядов должно быть меньше, чем в предыдущем примере. Действительно, наряды – Иванов (старший) и Петров или Петров (старший) и Иванов – различны, тогда как, если не требуется назначать старшего, эти два солдата в обоих случаях составляют один и тот же наряд. Каждый парный наряд без старшего можно превратить в два различных наряда со старшим. Поэтому число различных парных нарядов со старшим в два раза больше, чем нарядов без старших. Отсюда следует, что интересующее нас в данном примере число различных парных нарядов из 12 солдат отделения в два раза меньше, чем получено в предыдущем примере, т. е. равно $\frac{132}{2} = 66$.

Пример 5

Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение:

по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]$.

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пример 6.

Решить уравнение: $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$.

Решение:

используя формулу для вычисления числа размещений имеем:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Разделим обе части на одинаковые выражения, получим:

$$n(n-1) = 30(n-5),$$

и решим получившееся квадратное уравнение: $n_1 = 6, n_2 = 25$.

Пример 7.

Решите систему:
$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}.$$

Решение:

решим второе уравнение:

$$C_x^2 = 66 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = 66;$$

$$x^2 - x - 132 = 0;$$

$$x_1 = -11, x_2 = 12.$$

Т. к. $x > 2$, то -11 не удовлетворяет условию задачи. Подставив $x=12$ в первое уравнение системы, получим

$$C_{12}^y = C_{12}^{y+2}.$$

Используя основное свойство сочетаний, имеем:

$$C_{12}^y = C_{12}^{12-y},$$

тогда

$$C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2} \Rightarrow 12 - y = y + 2 \Rightarrow y = 5.$$

Ответ: $x=12, y=5$.

Пример 8.

Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение:

условию задачи соответствуют размещения 3 из 8, имеем:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решить следующие задачи, используя определение сочетаний, их видов:

1 вариант	2 вариант
1) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?	1) Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?
2) Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать?	2) Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов?
3) Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$.	3) Решите уравнение: $30x = A_x^3$.

3 вариант 1) Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать? 2) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 3) Решите уравнение: $30A_{x-2}^4 = A_x^5$.	4 вариант 1) Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек? 2) На собрании должны выступить 5 человек (А, Б, В, Г, Д). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если А должен выступать первым? 3) Решите уравнение: $20A_{x-2}^3 = A_x^5$.
5 вариант 1) Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг? 2) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «журнал»? 3) Решите уравнение: $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$.	6 вариант 1) Сколькими способами можно составить список из 6 человек? 2) Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может из своего состава выбрать председателя собрания и секретаря? 3) Решите уравнение: $4C_{x+2}^{x-1} = A_x^3$.
7 вариант 1) Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрами 3 или 5? 2) Из города А в город В ведут 6 дорог, а из города В в город С – 3 дороги. Сколькими способами можно попасть из города А в город С? 3) Решите систему: $\begin{cases} A_x^y = 9A_x^{y-1} \\ 2C_x^y = 3C_x^{y-1} \end{cases}$.	8 вариант 1) В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий сыграно в этом турнире? 2) Имеется 8 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были разных размеров? 3) Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$.

9 вариант

1) Группа учащихся изучает семь учебных дисциплин. сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот учебный день должно быть четыре различных урока?

2) Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

3) Вычислить: $\frac{A_{19}^5 + A_{20}^6}{A_{18}^4}$.

Формула бинома Ньютона

Бином Ньютона – это формула разложения степени двучлена (бинома) $(a+b)^n$ в виде многочлена от a и b .

Запишем разложения бинома Ньютона для нескольких первых значений n :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Чтобы найти коэффициент при $a^k b^{n-k}$ в разложении бинома $(a+b)^n$ в общем случае, представим себе, что мы перемножаем n скобок и приводим подобные члены. Член $a^k b^{n-k}$ встретится столько раз, сколько можно указать k скобок (из n возможных), из которых мы возьмем множитель a (а из остальных автоматически возьмем b). Это число равно числу выборов k скобок из n возможных, которое носит название числа сочетаний из n по k и обозначается C_n^k .

В этих обозначениях формула имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Иными словами, число сочетаний из n по k равно коэффициенту при члене $a^{n-k}b^k$ в разложении n -ой степени двучлена $(a+b)$ поэтому числа сочетаний называют иначе *биномиальными коэффициентами*.

Эту связь можно использовать для вывода свойств сочетаний алгебраическими методами. Такой подход к выводу свойств комбинаторных объектов носит название *метода производящих функций*.

Свойства биномиальных коэффициентов

Биномиальные коэффициенты обладают большим количеством свойств.

Свойство 1. $C_n^1 = n$.

Свойство 2. $C_n^k = C_n^{n-k}$ – биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов, равны между собой

Свойство 3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ – сумма биномиальных коэффициентов при фиксированном n равна 2^n .

Свойство 4. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$ – суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных и на нечетных местах, равны между собой (и равны по половине от общей суммы).

Свойство 5. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ – рекуррентное соотношение, связывающее биномиальные коэффициенты для соседних степеней.

Пример 1.

Разложить бином $(1+x)^6$ по степеням x .

Решение:

применяем формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^6 = 1^6 + C_6^1 x + C_6^2 x^2 + C_6^3 x^3 + C_6^4 x^4 + C_6^5 x^5 + x^6.$$

Значения биномиальных коэффициентов находим последовательно по формуле $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$:

$$C_6^3 = C_5^2 + C_5^3 = (C_4^1 + C_4^2) + (C_4^2 + C_4^3) = 4 + 2(C_3^1 + C_3^2) + 4 = 4 + 12 + 4 = 20.$$

$$\text{Т.о. } (1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$$

Задача для самостоятельного решения №1. Разложить бином $(1+x)^5$ по степеням x .

Пример 2.

Возвести трехчлен $a+b+c$ в четвертую степень.

Решение:

применяем формулу бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 + \frac{4!}{3!} a^3 b + \frac{4!}{3!} a^3 c + \frac{4!}{3!} b^3 a + \frac{4!}{3!} b^3 c + \frac{4!}{3!} c^3 a + \frac{4!}{3!} c^3 b + \\ &+ \frac{4!}{2!2!} a^2 b^2 + \frac{4!}{2!2!} a^2 c^2 + \frac{4!}{2!2!} b^2 c^2 + \frac{4!}{2!} a^2 b c + \frac{4!}{2!} b^2 a c + \frac{4!}{2!} c^2 a b = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3 b + a^3 c + b^3 c) + 6(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) + 4(b^3 a + c^3 a + c^3 b) + \\ &+ 12(a^2 b c + b^2 a c + c^2 a b). \end{aligned}$$

Задача для самостоятельного решения №2. Возвести трехчлен $a+b+c$ в третью степень.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу бинома Ньютона.
2. Перечислите свойства биномиальных коэффициентов.
1. Дайте определение соединения, их виды?
2. Приведите формулы для вычисления разных видов соединений.

3. Дайте определение случайного события, их виды. Приведите примеры.

4. Дайте классическое определение вероятности.

Домашнее задание: с.р № 15 Вариант 1.

Практическая работа № 37

Вычисление вероятностей.

Цель: Знать определение вероятности, теоремы сложения, умножения вероятностей;

Уметь по условию задачи вычислять вероятность событий.

Сведения из теории:

К основным понятиям теории вероятности относятся: *испытание, событие, вероятность*. **Испытание** – реализация комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие. Например, бросание монеты – испытание; появление герба или цифры – события.

Случайным событием называется событие, которое при осуществлении испытания может произойти, а может и не произойти. Например, выстрел по цели — это опыт, случайные события в этом опыте – попадание в цель или промах.

Событие называется **достоверным**, если в результате опыта оно непременно должно произойти, и **невозможным**, если оно заведомо не произойдет. События называются **несовместными**, если ни какие два из них не могут появиться вместе. Например, попадание и промах при одном выстреле – это несовместные события.

Несколько событий образуют **полную систему событий**, если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. Например, при бросании игральной кости события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную систему событий.

События называются **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Например, при бросании монеты выпадение герба или числа - события равновозможные.

Каждое событие обладает какой-то степенью возможности. Числовая мера степени объективной возможности события - это **вероятность события**. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Пусть из системы n несовместных равновозможных исходов испытания m исходов благоприятствуют событию A . Тогда **вероятностью** события A называют отношение m числа исходов, благоприятствующих событию A , к числу n всех исходов данного испытания: $P(A)=m/n$.

Если B – достоверное событие, то $P(B)=1$; если C – невозможное событие, то $P(C)=0$, если A – случайное событие, то $0<P(A)<1$.

Пример.

Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятность появления четного числа очков.

Решение. Опыт имеет шесть равновозможных независимых исходов (появление одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков), образующих полную систему. Событию благоприятствуют три исхода (появление двух, четырех и шести очков), поэтому $P(A)=3/6=1/2$

Сложение вероятностей

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Пример 1

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

Решение:

очевидно, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B – одна деталь стандартная, две нестандартные; C – две детали стандартные, одна нестандартная; D – три детали стандартные.

Т.о., событие A можно представить в виде суммы этих трех событий: $A=B+C+D$.

Тогда $P(A)=P(B)+P(C)+P(D)$.

Вычислим вероятность каждого события:

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{35}{76}$$

$$P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{5}{38}$$

$$P(D) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{114}$$

Итак,

$$P(A) = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228} = 0,601$$

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Пример 1.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?

Решение:

пусть A – число кратно 3, B – число кратно 5. Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, ..., 98, 99. Из них 30 – кратные 3, 18 – кратные 5 и шесть чисел одновременно кратны и 3 и 5, поэтому:

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}, \quad P(B)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}, \quad P(AB)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}.$$

Т.к. A и B совместные события, то по формуле имеем:

$$P(A+B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}=0,467.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи, используя теоремы сложения, умножения вероятностей:

1) В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

2) Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими учащимися равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.

3) Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

4) Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Умножение вероятностей.

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A .

Событие B называют *независимым от события A* , если появление события A не изменяет вероятности события B , т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B).$$

Итак, если событие B не зависит от события A , то событие A не зависит от события B ; это означает, что *свойство независимости событий взаимно*.

Для независимых событий теорема умножения имеет вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Два события называют *независимыми*, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы. Например, события A , B , C попарно независимы, если независимы события A и B , A и C , B и C .

Пример.

Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один – в красный цвет (A), один – в синий цвет (B), один – в черный цвет (C) и один – во все эти три цвета (ABC). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?

Решение:

т.к. из четырех шаров два имеют красный цвет, то $P(A)=2/4=1/2$.

Рассуждая аналогично, найдем $P(B)=1/2$, $P(C)=1/2$.

Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие B уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события A ?

Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события A по-прежнему равна $1/2$. Другими словами, условная вероятность события A , вычисленная в предположении, что наступило событие B , равна его безусловной вероятности. Следовательно, события A и B независимы.

Аналогично придем к выводу, что события A и C , B и C независимы. Итак, события A , B и C попарно независимы.

Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет.

Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет.

Т.о., допустив, что события B и C произошли, приходим к выводу, что событие A обязательно наступит. Следовательно, это событие достоверное и вероятность его равна единице.

Другими словами, условная вероятность $P_{BC}(A)=1$ события A не равна его безусловной вероятности $P(A)=1/2$. Итак, попарно независимые события A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Пример 1

Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение:

вероятность появления герба первой монеты (событие A): $P(A)=1/2$.

Вероятность появления герба второй монеты (событие B): $P(B)=1/2$.

События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна:

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B)=1/2 \cdot 1/2=1/4.$$

Пример 2.

Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение:

вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A):

$$P(A)=8/10=0,8.$$

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B):

$$P(B)=7/10=0,7.$$

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C):

$$P(C)=9/10=0,9.$$

Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна:

$$P(ABC)=P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)=0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9=0,504.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Вероятность того, что в магазине будет продана пара мужской обуви 44-го размера, равна 0,12; 45-го – 0,04; 46-го и большего – 0,01.

Найти вероятность того, что будет продана пара мужской обуви не меньше 44-го размера.

2) При условиях задачи 1 найти вероятность того, что очередной будет продана пара обуви меньше 44-го размера.

3) В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении при условии, что извлеченный в первый раз резец в ящик не возвращается.

4) В урне находятся 5 белых шаров, 4 черных и 3 синих. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором - черный (событие B) и при третьем – синий (событие C).

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте теоремы сложения, умножения вероятностей.
2. Дайте определение независимых событий.
3. Какие события называются попарно независимыми?

Домашнее задание: выполнить задания для самостоятельного решения.

Практическое занятие №38

Дискретная случайная величина. Решение прикладных задач с применением вероятностных методов

Цель: знать формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины;

уметь вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины.

Сведения из теории:

Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно

знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.

Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.

Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Тогда ее *математическое ожидание* $M(X)$ определяется равенством

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.

Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, $P_i = 1/6$. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно

$$M(X) = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3,5.$$

Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.

Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.

Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D\{X\} = M[X - M(X)]^2.$$

Так же дисперсию можно вычислить и по формуле:

$$D\{X\} = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

т. е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата её математического ожидания.

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

<table><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,1</td></tr></table> 2) Монету подбрасывают 6 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения «решки».	p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1	<table><tr><td>p</td><td>0,15</td><td>0,17</td><td>0,35</td><td>0,21</td><td>0,12</td></tr></table> 2) Монету подбрасывают 5 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения герба.	p	0,15	0,17	0,35	0,21	0,12												
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1																				
p	0,15	0,17	0,35	0,21	0,12																				
5 вариант 1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения: <table><tr><td>X</td><td>10</td><td>30</td><td>40</td><td>60</td><td>70</td></tr><tr><td>p</td><td>0,3</td><td>0,13</td><td>0,45</td><td>0,1</td><td>0,02</td></tr></table> 3) Игральную кость подбросили 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.	X	10	30	40	60	70	p	0,3	0,13	0,45	0,1	0,02	6 вариант 1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения: <table><tr><td>X</td><td>1</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,11</td><td>0,2</td><td>0,22</td><td>0,37</td></tr></table> 3) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.	X	1	5	10	15	20	p	0,1	0,11	0,2	0,22	0,37
X	10	30	40	60	70																				
p	0,3	0,13	0,45	0,1	0,02																				
X	1	5	10	15	20																				
p	0,1	0,11	0,2	0,22	0,37																				
7 вариант 1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения: <table><tr><td>X</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr><tr><td>p</td><td>0,125</td><td>0,375</td><td>0,5</td></tr></table> 2) Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит пирамида.	X	10	20	30	p	0,125	0,375	0,5	8 вариант 1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения: <table><tr><td>X</td><td>10</td><td>30</td><td>50</td></tr><tr><td>p</td><td>0,175</td><td>0,35</td><td>0,475</td></tr></table> 2) Игральный кубик имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4, 5, 6. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит кубик.	X	10	30	50	p	0,175	0,35	0,475								
X	10	20	30																						
p	0,125	0,375	0,5																						
X	10	30	50																						
p	0,175	0,35	0,475																						

Контрольные вопросы:

1. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
2. Что называется дисперсией дискретной случайной величины?

Домашнее задание: учебник с.225-228 № 1,2.

Практическое занятие №39

Решение практических задач на обработку числовых данных, вычисление их характеристик

Цель: Закрепление полученных знаний.

Сведения из теории

Вариационным рядом называется ранжирование в порядке возрастания вариант с соответствующими им частотами (ранжир - в переводе с фр.- «ставить в ряд по росту»).

Численность отдельной группы сгруппированного ряда наблюдаемых данных называется **частотой** или **весом** соответствующего варианта и обозначается m_i , где i - индекс варианта.

Отношение частоты данного варианта к объему совокупности называется **относительной частотой** (w_i) или **частотью** этого

варианта.
$$w_i = \frac{m_i}{n}$$

Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами m_i или частотями (w_i).

В общем виде его можно записать так:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_n

Вариационный ряд часто дополнительно характеризуется накопленными частотами или накопленными частотями.

Накопленные частоты характеризуют число членов данной совокупности, у которых рассматриваемый признак принимает значения, не превышающие данного варианта.

Накопленные частоты — результаты последовательного суммирования частостей всех вариантов, включая частость данного варианта.

Кроме дискретных вариационных рядов широкое применение имеют **непрерывные (интервальные)** вариационные ряды.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частотями попаданий в каждый из них значений случайной величины.

Интервальный ряд целесообразно построить, если число возможных значений дискретной величины велико или признак является непрерывным, т.е. может принимать любые значения в пределах некоторого интервала.

Для построения интервального ряда необходимо определить величину частичных интервалов, на которые разбивается весь интервал варьирования наблюдаемых значений случайной величины. Считая, что все частичные интервалы имеют одну и ту же длину, для каждого интервала следует установить его верхнюю и нижнюю границы, а затем в

соответствии с полученной упорядоченной совокупностью частичных интервалов сгруппировать результаты наблюдений.

Для определения величины частичного интервала воспользуемся формулой Стерджесса:

$$h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3,322 \lg n}, \text{ где } 1 + 3,322 \lg n \text{ - число интервалов.}$$

За начало первого интервала рекомендуется брать величину:

$$X_{\text{нач.}} = X_{\min} - \frac{h}{2}$$

Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h .

Теперь, просматривая, результаты наблюдений, определяем, сколько значений признака попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включают значение случайной величины, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы.

Пример : Пусть дан ряд распределения хозяйств по количеству рабочих на 100 га с/х угодий ($n = 60$):

12 6 8 6 10 11 7 10 12 8 7 7 6 7 8 6 11 9 11 9 10
11 9 10 7 8 8 8 11 9 8 7 5 9 7 7 14 11 9 8 7 4
7 5 5 10 7 7 5 8 10 10 15 10 10 13 12 11 15 6

Построить интервальный вариационный ряд.

Решение. Для определения числа групп подставим значение $n = 60$ в формулу Стерджесса:

$$k = 1 + 3,322 \lg 60 \approx 6,907; \quad k = 7$$

Найдем длину частичного интервала: $h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k} = \frac{15 - 4}{7} = \frac{11}{7} \approx 1,6$

Построим интервальный вариационный ряд, для этого в качестве начального значения используем $X_{\min}$.

Группы хозяйств по численности работников на 100 га с/х угодий	Число хоз-в в группе m_i	Накопленное число хоз-в S_i	Относительная частота $\hat{p}_i$
4- 5,6	5	5	5/60
5,61- 7,2	17	22	17/60
7,21- 8,8	9	31	9/60
8,81- 10,4	15	46	15/60
10,41- 12,0	10	56	10/60

12,01- 13,6	1	57	1/60
13,61- 15,2	3	60	3/60
Итого	60	-	1

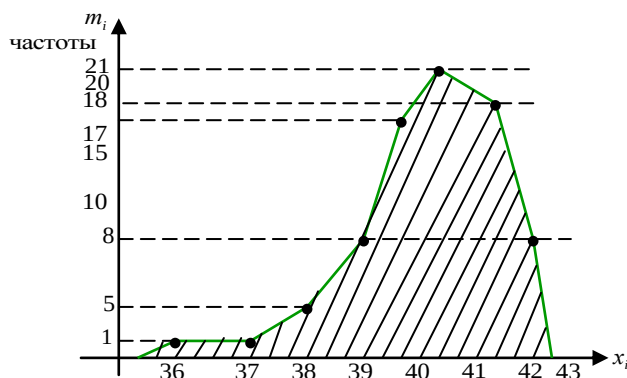
Иногда интервальный вариационный ряд для простоты исследований условно заменяют дискретным.

В этом случае срединное значение $i - go$ интервала принимают за вариант x_i , а соответствующую интервальную частоту m_i - за частоту этого интервала.

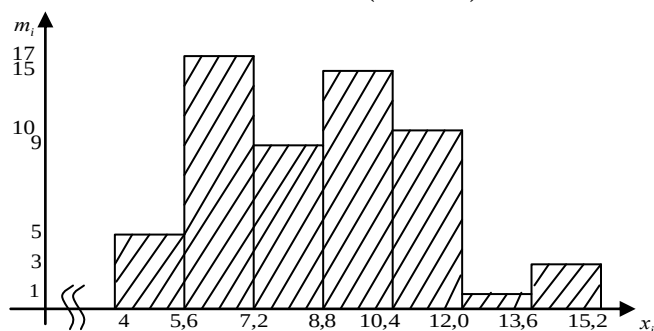
Графическое изображение вариационных рядов.

Графическое изображение позволяет представить в наглядной форме закономерности варьирования значений признаков с помощью полигона, гистограммы, кумуляты и огивы.

Полигоном (для дискретного вариационного ряда) называется ломаная, соединяющая на плоскости точки с координатами $(x_i; m_i)$.



Гистограммой (для интервального вариационного ряда) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы $(x_{i-1}; x_i)$, а высотами - частоты m_i .



Если в вариационном ряду вместо частот взяты соответственно накопленные частоты, то полученный ряд называется **кумулятивным рядом** (кумуляция – от латинского «скопление»).

Числовые характеристики вариационных рядов.

Средней арифметической $(\bar{X})$ дискретного вариационного ряда называется отношение суммы произведений вариантов на соответствующие частоты к объему совокупности: $\bar{X} = \frac{\sum x_i m_i}{n}$ (1)

Вычисленное по формуле (1) среднее арифметическое называется **взвешенным**, так как частоты m_i называются **весами**, а операция умножения x_i на m_i - **взвешиванием**.

Для интервального вариационного ряда за x_i принимают середину i -го интервала, а за m_i - соответствующую интервальную частоту.

Модой $(\hat{M}_0(x))$ дискретного вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Для интервальных вариационных рядов при нахождении $\hat{M}_0(x)$ используют формулу: $\hat{M}_0(x) = x_0 + h \cdot \frac{m_i - m_{i-1}}{(m_i - m_{i-1}) + (m_i - m_{i+1})}$, где

x_0 - начало модального интервала; h - длина частичного интервала;
 m_i - частота модального интервала; m_{i-1} - частота предмодального интервала; m_{i+1} - частота послемодального интервала.

Медианой $(\hat{M}_e(x))$ дискретного вариационного ряда называется вариант, делящий ряд на две равные части.

Если дискретный вариационный ряд имеет **четное** $(2n)$ число членов, то: $\hat{M}_e(x) = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$.

Если дискретный вариационный ряд имеет **нечетное** $(2n-1)$ число значений варьирующего признака, расположенных в порядке возрастания, то медианой этого распределения является вариант x_n : $\hat{M}_e(x) = x_n$

При нахождении $\hat{M}_e(x)$ для интервальных вариационных рядов используют формулу:

$$\hat{M}_e(x) = x_0 + h \cdot \frac{0,5n - m_{i-1}^{нак}}{m_i}, \text{ где } x_0 - \text{начало медианного интервала;}$$

h - длина частичного интервала; n - объем совокупности;
 $m_{i-1}^{нак}$ - накопленная частота интервала, предшествующего медианному; m_i - частота медианного интервала.

Пример: Найти $\hat{M}_e(x)$ по условию задачи

$$n = 60 \Rightarrow \frac{n}{2} = 30 \Rightarrow \text{медиана расположена в интервале } 7,21 - 8,8$$

$$\hat{M}_e(x) = 7,21 + 1,6 \frac{0,5 \cdot 60 - 22}{9} \approx 8,62$$

Опр.

Размах (обозначается R) - разница между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины.

Практическое занятие №40

Доказательство признаков взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

Цель: Знать признаки параллельности прямой и плоскости, признаки параллельности плоскостей, признаки параллельности прямых в пространстве;

Уметь строить параллельные прямые, плоскости в пространстве.

Сведения из теории:

Признаки параллельности прямой и плоскости

- 1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.
- 2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности плоскостей

- 1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
- 2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности прямых в пространстве

- 1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.
- 2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Параллельные прямые

Возьмём, например, две такие прямые AB и DE , из которых одна пересекает некоторую плоскость P , а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости P .

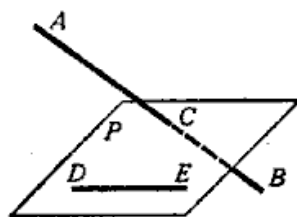


Рисунок 33. Непересекающиеся прямые

Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P , пересекающая прямую AB , и другая, содержащая её, а это невозможно.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрецивающими*.

Прямая и плоскость параллельные между собой

Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если прямая (AB) параллельна какой-нибудь прямой (CD), расположенной в плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.

Если плоскость (R) проходит через прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (CD) параллельна первой прямой (AB).

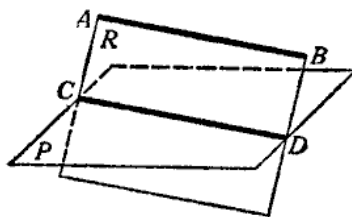


Рисунок 34. Прямая и плоскость параллельные между собой

Если прямая (AB) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (P и Q), то она параллельна линии их пересечения (CD).

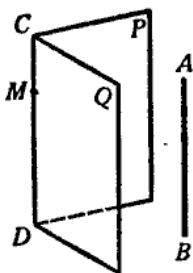


Рисунок 35. Параллельность прямой линии пересечения плоскостей

Если две прямые (AB и CD) параллельны третьей прямой (EF), то они параллельны между собой.

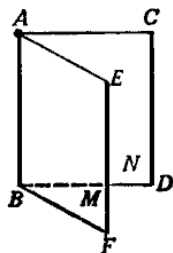


Рисунок 36. Параллельность трех прямых

Параллельные плоскости

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если две пересекающиеся прямые (AB и AC) одной плоскости (P) соответственно параллельны двум прямым (A_1B_1 и A_1C_1) другой плоскости (Q), то эти плоскости параллельны. Прямые AB и AC параллельны плоскости Q .

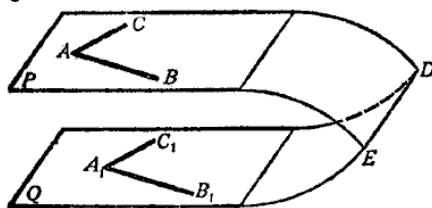


Рисунок 37. Параллельные плоскости

Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи (выполнить чертеж, дать подробные пояснения):

1) Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости a , а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N . Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

2) Сколько существует плоскостей, проходящих через данные прямую и точку в пространстве?

3) В пространстве даны прямая a и точка M . Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных прямой a ?

4) Даны плоскость и точка M вне плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных плоскости?

5) В пространстве даны две параллельные прямые a и b . Сколько существует плоскостей, проходящих через прямую a и параллельных прямой b ?

6) Даны две скрещивающиеся прямые a и b . Сколько существует пар параллельных плоскостей, одна из которых проходит через a , а другая – через b ?

7) В пространстве даны две пересекающиеся прямые a , b и не лежащая на них точка M . Сколько существует плоскостей, проходящих через M и параллельных прямой a и b ?

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте признаки параллельности плоскостей.
3. Сформулируйте признаки параллельности прямых в пространстве.

Домашнее задание: учебник с. 58 № 1-4

Практическое занятие №41

Построение углов. Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве

Цель: Закрепить знания по изучаемой теме.

Сведения из теории

Угол между двумя прямыми.

На плоскости две пересекающиеся прямые задают две пары равных между собой углов (вертикальные углы). Чтобы задать угол между двумя прямыми в пространстве, надо выбрать произвольную точку и провести через нее прямые, параллельные данным. Величины построенных плоских углов не будут зависеть от выбора начальной точки.

Две прямые в пространстве, которым соответствует прямой угол, называются *перпендикулярными*.

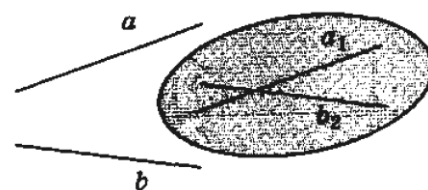
Прямая, перпендикулярная плоскости.

Так называются прямые, перпендикулярные всякой прямой в этой плоскости.

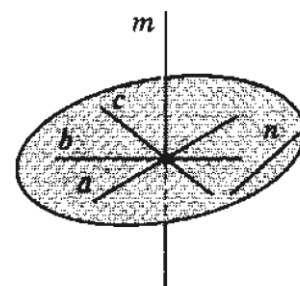
Т е о р е м а 1. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым некоторой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

С помощью этого понятия можно определить *ортогональную проекцию* точки на плоскость. Проекцией на плоскость α точки P , не лежащей в этой плоскости, называется такая точка P' , принадлежащая плоскости α , что прямая PP' перпендикулярна плоскости α .

Угол между прямыми



Прямая перпендикулярна плоскости

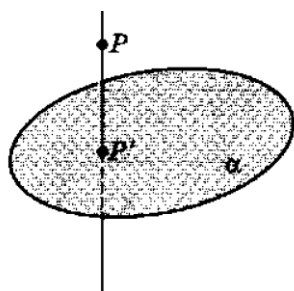


$$m \perp n, m \perp a, m \perp b, m \perp c$$

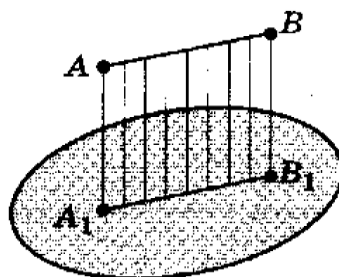
Проекцией точки, лежащей в плоскости α , считается сама эта точка.

Если требуется спроектировать некоторую фигуру на плоскость α , необходимо спроектировать на нее все точки этой фигуры.

Ортогональная проекция.



$P' \in \alpha, PP' \perp \alpha$



будет некоторая прямая. В этом случае говорят, что прямая является *наклонной* к плоскости.

Угол между прямой и плоскостью.

Углом между наклонной и плоскостью считается угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Теорема о трех перпендикулярах.

Т е о р е м а 2. Если наклонная к плоскости перпендикулярна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то и проекция наклонной перпендикулярна этой прямой. Обратное: если проекция наклонной перпендикулярна прямой в плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна этой прямой.

В учебной литературе можно встретить и другие формулировки теоремы. Приведем одну из них и докажем.

Двугранный угол.

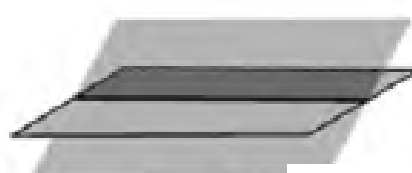
Две непараллельные плоскости пересекаются по прямой и делят все пространство на четыре части, называемые двугранными углами.

Двугранный угол – это фигура, ограниченная двумя полуплоскостями с общим ребром.

Четыре двугранных угла, образованных двумя пересекающимися плоскостями, распадаются на две пары равных между собой двугранных углов, что аналогично равенству вертикальных углов, образующихся при пересечении двух прямых.

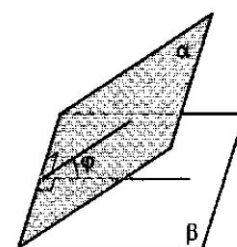


Угол между плоскостями.



Угол между плоскостями

Для измерения угла между пересекающимися плоскостями надо на линии пересечения этих плоскостей выбрать точку и провести через нее в каждой плоскости



$$(\widehat{\alpha; \beta}) = \varphi$$

прямую, перпендикулярную линии пересечения. Угол между этими прямыми и считается углом между плоскостями.

Перпендикулярность двух плоскостей.

Две плоскости называются перпендикулярными, если, пересекаясь, они образуют равные двугранные углы.

Перпендикулярные плоскости образуют двугранные углы по 90°

Т е о р е м а 3 (*признак перпендикулярности двух плоскостей*). Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

С помощью перпендикулярности можно определять и вычислять различные *расстояния* в пространстве.

1. Расстояние от точки до плоскости вычисляется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость (расстояние от данной точки до ее проекции на плоскость).

2. Расстоянием между двумя параллельными плоскостями считается длина отрезка общего перпендикуляра к этим плоскостям, заключенного между этими плоскостями.

3. Если на плоскости задана некоторая фигура, то расстояние от произвольной точки в пространстве до этой фигуры определяется как наименьшее среди расстояний от данной точки до произвольной точки этой фигуры.

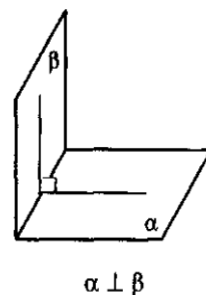
Спроектируем данную точку на плоскость. Тогда ближайшая к данной точке точка фигуры будет ближайшей и к ее проекции, и наоборот, чтобы найти точку фигуры, ближайшую к данной точке, достаточно найти точку, ближайшую к ее проекции.

4. Угол между прямой и плоскостью, определяемый как угол между прямой и ее проекцией, будет наименьшим среди углов, которые образует данная прямая с произвольными прямыми плоскости.

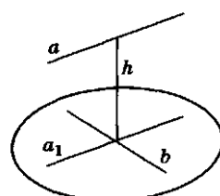
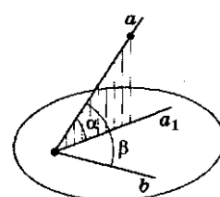
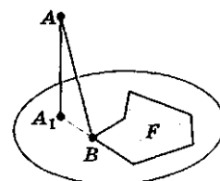
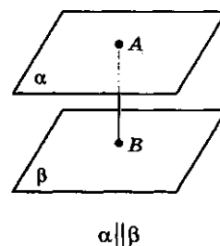
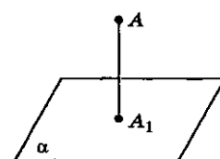
5. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми вычисляется как длина общего перпендикуляра.

Задача 1:

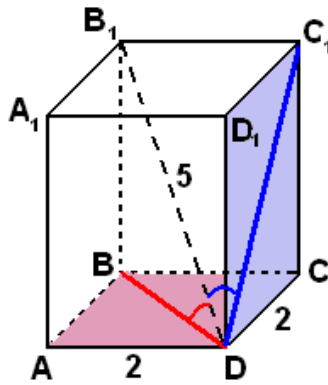
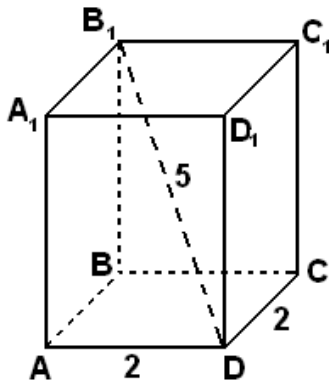
В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - $ABCD$ – квадрат со стороной, равной 2 см. Все боковые грани – прямоугольники, $B_1 D = 5$ см. Найдите углы между $B_1 D$ и плоскостью ABC и между $B_1 D$ и плоскостью $DD_1 C_1$.



Определение расстояний



$$a \perp b, a_1 \parallel a, h \perp a, h \perp b$$

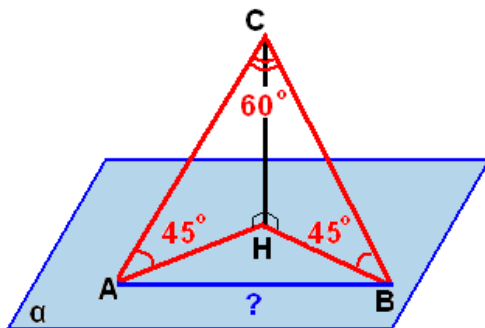


Решение:

1. ABCD – квадрат. По теореме Пифагора $BD^2 = 2^2 + 2^2 = 8$; $BD = 2\sqrt{2}$;
2. Треугольник BDB_1 – прямоугольный (т.к. параллелепипед) $\Rightarrow$
 $\cos BDB_1 = \frac{BD}{B_1D} = \frac{2\sqrt{2}}{5} = 0,4\sqrt{2}$;
3. Так как плоскости B_1C_1C и D_1C_1C перпендикулярны, то $\triangle B_1C_1D$ прямоугольный, тогда $\sin B_1DC_1 = \frac{B_1C_1}{B_1D} = \frac{2}{5} = 0,4$.

Задача 2: Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии a , проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45° , а между собой угол в 60° . Определить расстояние между концами наклонных.

Решение:



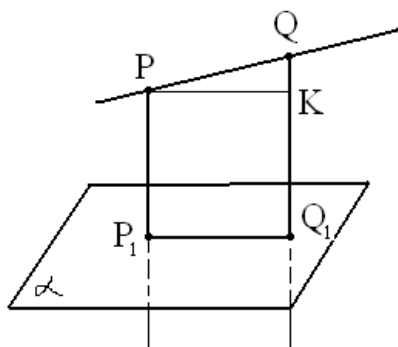
1. Так как CH расстояние, то треугольники ACH и CHB прямоугольные и $\angle CAH = \angle CBH = 45^\circ$, тогда $\angle ACH = \angle BCH = 45^\circ$, значит треугольники ACH и CHB равносторонние и $CH = AH = HB = a$
2. По теореме Пифагора $CA = CB = a^2 + a^2 = a\sqrt{2}$;
3. В треугольнике ABC $\angle ACB = 60^\circ$ и

$AC = CB \Rightarrow$ треугольник ABC равносторонний $AB = a\sqrt{2}$.

Задача 3.

Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие её соответственно в точках P_1 и Q_1 .

Найдите P_1Q_1 , если $PQ = 15$ см; $PP_1 = 21,5$ см; $QQ_1 = 33,5$ см.



Решение:

- 1) $PP_1 \perp \alpha$ и $QQ_1 \perp \alpha$ по условию $\Rightarrow PP_1 \parallel QQ_1$ (т.к. если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны);
- 2) PP_1 и QQ_1 определяют некоторую плоскость β , $\alpha \cap \beta = P_1Q_1$;
- 3) PP_1Q_1Q - трапеция с основаниями PP_1 и QQ_1 , проведём $PK \parallel P_1Q_1$;
- 4) $QK = QQ_1 - PP_1 = 33,5 - 21,5 = 12$ (см)

$$P_1Q_1 = PK = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ см. по теореме Пифагора}$$

Ответ: $P_1Q_1 = 9$ см.

Задача 4.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 9$ см; $BC = 8$ см; $BD = 17$ см. Найдите площадь $BDD_1 B_1$.

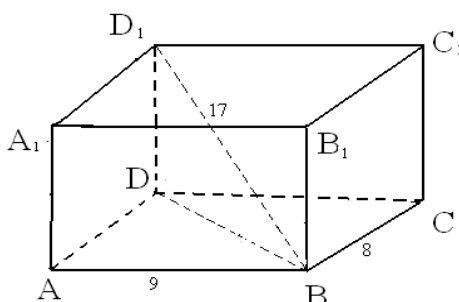


Рис. 5

Решение:

- 1) $\triangle ABD$: $\angle BAD = 90^\circ$; $AD = BC = 8$ см;

$$BD = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145} \text{ см};$$

- 2) $\triangle DD_1 B$: $\angle D_1 D B = 90^\circ$;

$$DD_1 = \sqrt{17^2 - (\sqrt{145})^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ см};$$

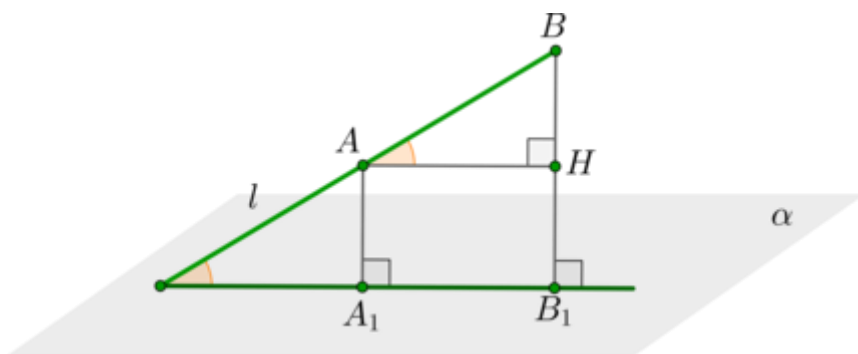
- 3) $S_{BDD_1 B_1} = BD \cdot DD_1 = 12\sqrt{145} \text{ см}^2$.

Ответ: $12\sqrt{145} \text{ см}^2$.

Задачи для самостоятельного решения.

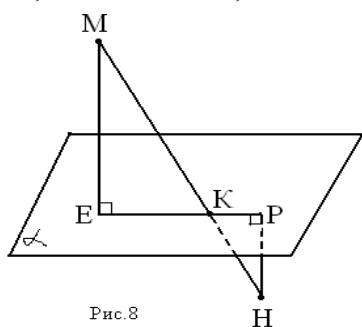
Задача 1.

Прямая l пересекает плоскость α . На прямой l отмечен отрезок $AB=25$, причем известно, что проекция этого отрезка на плоскость α равна 24. Найдите синус угла между прямой l и плоскостью α



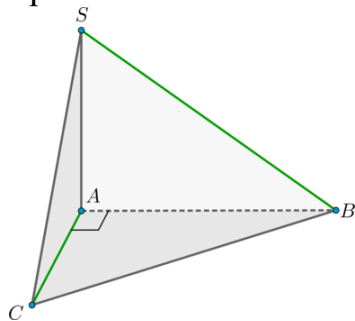
Задача 2

Отрезок MN пересекает плоскость α в точке K . Из концов отрезка проведены прямые ME и HP , перпендикулярные к плоскости α . $HP = 4$ см; $ME = 12$ см; $HK = 5$ см. Найдите отрезок PE .



Задача 3

Дана пирамида $SABC$ с высотой SA , в основании которой лежит прямоугольный треугольник с прямым углом A . Найдите угол между прямыми SB и AC . Ответ дайте в градусах.



Домашнее задание: учебник с. 58-61

Практическое занятие №42

Решение задач на вычисление геометрических величин

Цель: Закрепление изученного материала

Сведения из теории:

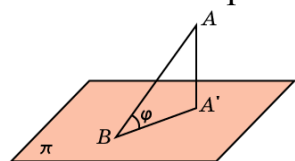
Теорема: Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к

самой наклонной. **Теорема (обратная):** Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Определение: Расстоянием от точки до плоскости в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость

Угол между прямой и плоскостью.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость. Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.



Определим понятие угла между плоскостями.

Определение: Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

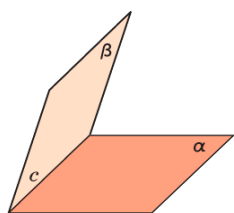


Рис. 1

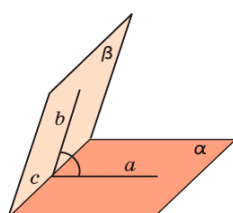


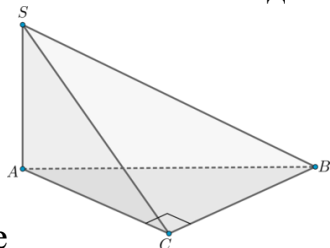
Рис. 2

Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется углом между данными плоскостями. Заметим, что при пересечении двух плоскостей вообще-то

образуются четыре угла. В качестве угла между плоскостями мы берем острый угол.

Задача 1.

Дана пирамида $SABC$ с высотой SA . Известно, что в основании лежит прямоугольный треугольник с прямым углом C . Найдите угол между ребрами SC и BC . Ответ дайте в градусах.



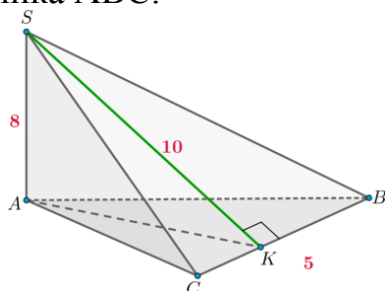
Решение

Так как SA – высота пирамиды, то $SA \perp (ABC)$. Заметим, что AC – проекция наклонной SC на плоскость ABC . Так как $AC \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $SC \perp BC$, следовательно, угол между SC и BC равен 90° .

Ответ: 90

Задача 2.

Дана пирамида $SABC$ с высотой $SA=8$. Известно, что SK равно 10 и перпендикулярно $BC=5$, причем K лежит на BC . Найдите площадь треугольника ABC .



Решение

Так как SA – высота пирамиды, то $SA \perp (ABC)$. Заметим, что AK – проекция наклонной SK на плоскость ABC . Так как $SK \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $AK \perp BC$, следовательно, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AK \cdot BC$. Треугольник SAK прямоугольный, следовательно, по теореме Пифагора $AK = \sqrt{SK^2 - SA^2} = 6$. Следовательно, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$.

Ответ: 15

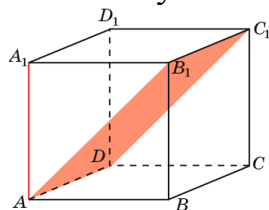
Задания для самостоятельного решения

Решить. Ответы обосновать.

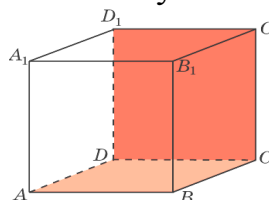
Вариант 1

1. Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведен отрезок AK , равный 3. Из точки K опущены перпендикуляры на стороны BC и CD . Перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.

2. В кубе $A \dots D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1 .



3. В кубе $A \dots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDD_1 .



Домашнее задание: с.р. № 18,19 вопросы для закрепления

Практическое занятие №43,44

**Применение формул и теорем планиметрии для решения задач
Параллельное проектирование**

Цель: знать свойства параллельного проектирования;
уметь строить фигуры с помощью параллельного проектирования.

Сведения из теории:

Параллельное проектирование

Пусть даны плоскость α и прямая l , пересекающая плоскость α . Возьмем произвольную точку пространства A_1 и проведем через эту точку прямую l_1 , параллельную l . Прямая l_1 пересечет плоскость α в некоторой точке A . Полученная таким образом точка A называется проекцией точки A_1 на плоскость α при проектировании параллельно прямой l . Обычно кратко говорят, что точка A есть параллельная проекция точки A_1 .

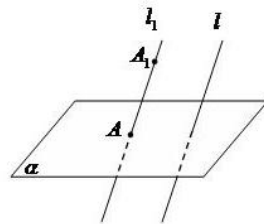


Рисунок 42. Параллельное проектирование

Параллельной проекцией пространственной фигуры Φ_1 называется множество Φ параллельных проекций всех точек данной фигуры.

Свойства параллельного проектирования

- 1) Проекция прямой есть прямая.
- 2) Проекции параллельных прямых параллельны.
- 3) Отношение проекций двух параллельных отрезков равно отношению проектируемых отрезков.

Ортогональное проектирование

Частным случаем параллельного проектирования является *ортогональное проектирование*

Пусть даны плоскость α и прямая l , перпендикулярная α . Возьмем произвольную точку пространства A_1 и проведем через нее прямую l_1 параллельную l (и, следовательно, перпендикулярную плоскости α). Прямая l_1 пересечет плоскость α в некоторой точке A .

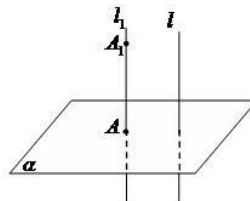


Рисунок 43. Ортогональное проектирование

Полученная точка A называется ортогональной проекцией точки A_1 на плоскость α .

Ортогональной проекцией фигуры Φ_1 на плоскость α называется множество Φ ортогональных проекций всех точек данной фигуры Φ_1 . Как частный случай параллельного проектирования, ортогональное проектирование обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

Свойство ортогональной проекции плоского многоугольника

Площадь s ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость α равна площади S проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла γ между плоскостью многоугольника и плоскостью α :

$$s = S \cdot \cos(\gamma).$$

Пример 1.

Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом $\gamma = 30^\circ$ к плоскости ее основания. Найти площадь образующегося сечения, если сторона основания равна 6 см.

Решение:

т.к. призма правильная, то ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Следовательно, плоскость основания есть проекция плоскости сечения.

Т.к. в основании правильный треугольник, то его площадь равна:

$$s = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Используя свойство ортогональной проекции, имеем:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \gamma}.$$

Зная, что сторона основания равна 6 см и угол $\gamma = 30^\circ$, вычислим площадь:

$$S = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4 \cos 30} = \frac{36 \sqrt{3}}{4 \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{36}{2} = 18.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Каковы проекции двух прямых на плоскость, если: а) прямые пересекаются; б) прямые скрещиваются; в) прямые параллельны.

2) На модели куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ укажите проекции на плоскость грани AA_1B_1B отрезков C_1D_1 , AD , C_1D и DB_1 , треугольников C_1CD и ACD , квадрата BB_1C_1C .

3) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а острый угол 60° . Найдите площадь проекции этого треугольника на плоскость, составляющую с плоскостью треугольника угол 30° .

4) Стороны треугольника равны 3,9 см, 4,1 см и 2,8 см. Найдите площадь его проекции на плоскость, составляющую с плоскостью треугольника угол 60° .

Контрольные вопросы:

1. Что называется параллельной проекцией?
2. Перечислите свойства параллельного проектирования.
3. Что называется ортогональной проекцией фигуры?

Домашнее задание: с.р. № 17 задания 1-3.

Практическое занятие №45

Изображение различных видов многогранников. Выполнение построения на изображениях и моделях многогранников.

Цель: Знать свойство, связывающее число вершин, ребер и граней многогранника;

Уметь устанавливать связь между числом плоских углов Π многогранника и числом его ребер P .

Сведения из теории:

Для выпуклых многогранников имеет место свойство, связывающее число его вершин, ребер и граней, доказанное в 1752 году Леонардом Эйлером, и получившее название теоремы Эйлера.

Прежде чем его сформулировать рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой B – число вершин, P – ребер и G – граней данного многогранника:

Название многогранника	B	P	G
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n -угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$+1$
n -угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$

n -угольная пирамида	усеченная	$2n$	$3n$	$n+2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство $B-P+G=2$. Оказывается, что это равенство справедливо не только для этих многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника.

Заметим, что многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Число вершин, ребер и граней при этом не изменится.

Для полученного разбиения многоугольника на более мелкие многоугольники имеет место равенство:

$$B-P+G=1,$$

где B – общее число вершин, P – общее число ребер и G – число многоугольников, входящих в разбиение. Ясно, что $G=G-1$, где G – число граней данного многогранника.

В любом выпуклом многограннике найдется грань с числом ребер меньшим или равным пяти

Для любого многогранника имеет место неравенство $3B \leq 2P$.

Задания для самостоятельного решения:

- 1) Может ли число вершин многогранника равняться числу его граней?
- 2) Установите связь между числом плоских углов Π многогранника и числом его ребер P .
- 3) Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин B и граней G , если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Приведите примеры таких многогранников.
- 4) Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин B и граней G , если у него: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.
- 5) В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин B и граней G , если число ребер равно 12? Нарисуйте эти многогранники.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу, связывающую число вершин, ребер и граней многогранника.

Домашнее задание: учебник с. 145-150

Практическое занятие №46

Вычисление линейных элементов, углов, площадей поверхностей в пространственных конфигурациях. Построение простейших сечений куба, призмы, пирамиды.

Цель: Знать свойства прямоугольного параллелепипеда;
- формулы объема прямоугольного параллелепипеда, куба; метод «следов»; правила построения сечений многогранников
уметь: строить параллелепипед, куб; вычислять объем прямоугольного параллелепипеда, куба; строить сечения куба, призмы, пирамиды.

Сведения из теории:

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы. Отрезки, соединяющие вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной и той же грани, называются *диагоналями параллелепипеда*.

Свойства параллелепипеда

- 1) Середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии.
- 2) Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.
- 3) Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

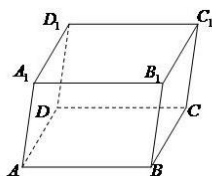


Рисунок 46. Параллелепипед

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания параллелепипеда, называется *прямым параллелепипедом* ($ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед).

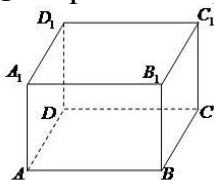


Рисунок 47. Прямоугольный параллелепипед

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники. Длины трех ребер

прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.

Свойства прямоугольного параллелепипеда

1) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

2) Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

3) Для куба формула упрощается: $4d^2 = 12a^2$.

Пример 1.

Найти длину стороны куба, если его диагональ равна 5 см.

Решение:

из формулы для диагонали куба выразим его сторону:

$$a^2 = \frac{4d^2}{12}.$$

Тогда,

$$a = \sqrt{\frac{4d^2}{12}} = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Т. к. параллелепипед есть частный случай призмы, то площадь поверхности и объем параллелепипеда вычисляются по формулам для площади поверхности и объема призмы. Кроме того, объем прямоугольного параллелепипеда можно вычислять по формуле:

$$V = abc,$$

где a, b, c – три измерения прямоугольного параллелепипеда.

Куб

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется кубом. Все грани куба – равные квадраты.

Объем куба вычисляется по формуле:

$$V = a^3,$$

где a – измерение куба.

Как найти сумму длин всех рёбер параллелепипеда

Для удобства введем обозначения: A и B стороны основания параллелепипеда; C – его боковая грань.

Т. о., в основании параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами A и B . Параллелограмм – это четырехугольник, противоположные стороны которого равны и параллельны. Из этого определения следует, что против стороны A лежит равная ей сторона A . Поскольку противоположные грани параллелепипеда равны (вытекает из

определения), то верхняя его грань тоже имеет 2 стороны равные A . Таким образом, сумма всех четырех этих сторон равна $4A$.

То же, можно сказать, и о стороне B . Противоположная ей сторона в основании параллелепипеда равна B . Верхняя (противолежащая) грань параллелепипеда тоже имеет 2 стороны, равные B . Сумма всех четырех этих сторон равна $4B$.

Боковые грани параллелепипеда тоже являются параллелограммами (вытекает из свойств параллелепипеда). Ребро C одновременно является стороной двух соседних граней параллелепипеда. Поскольку противоположные грани параллелепипеда попарно равны, то все его боковые ребра равны между собой и равны C . Сумма боковых ребер – $4C$.

Таким образом, сумма всех ребер параллелепипеда: $4A+4B+4C$ или $4(A+B+C)$.

Частный случай прямого параллелепипеда – куб. Сумма всех его ребер равна $12A$.

Пример 2.

Найдите ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда, если ширина b больше его длины a на 1 см, высота c в 2 раза больше длины a , а диагональ d в 3 раза больше длины a .

Решение:

запишем основную формулу квадрата диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Выразим все измерения через заданную длину a : $b=a+1$; $c=2a$; $d=3a$.

Подставим в формулу:

$$9a^2 = a^2 + (a+1)^2 + 4a^2.$$

Решив квадратное уравнение, найдем длины всех ребер:

$$3a^2 - 2a - 1 = 0.$$

$$a=1; b=2; c=2.$$

Пример 3.

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

Решение:

обозначим известные ребра за a и b , а неизвестное за c . Площадь поверхности параллелепипеда выражается как

$$S = 2(ab + bc + ac).$$

Выразим c :

$$c = \frac{\frac{S}{2} - ab}{a + b}.$$

Подставляя заданные значения, имеем:

$$c = \frac{\frac{94}{2} - 12}{7} = 5.$$

Ответ: 5.

Сечения куба плоскостью

Если плоскость пересекает три ребра куба, выходящих из одной вершины, то в сечении получается треугольник (рис. 48 слева). При этом если отсекаемые плоскостью отрезки ребер равны, то в сечении получается равносторонний треугольник, если равны два отрезка из трех, то получается равнобедренный треугольник, наконец, если все три отрезка различны, то в сечении получается разносторонний треугольник.

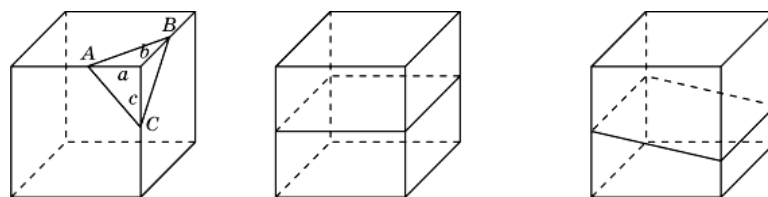


Рисунок 48. Сечения куба плоскостью

В сечении куба плоскостью не могут получаться прямоугольный или тупоугольный треугольники.

Выясним, какие четырехугольники могут получаться в сечении куба плоскостью.

Ясно, что если плоскость параллельна одной из граней куба, то в сечении получается квадрат (рис. 48 посередине). Если плоскость параллельна одному из ребер куба, то в сечении получается прямоугольник (рис. 48 справа). Если плоскость пересекает четыре параллельных ребра куба, то в сечении получается параллелограмм (рис. 49 слева).

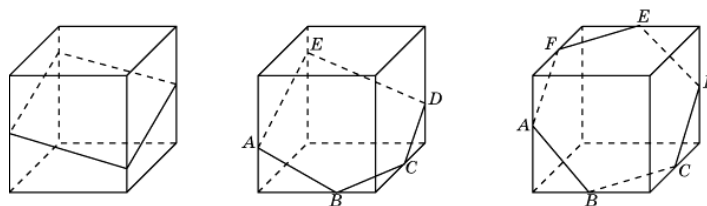


Рисунок 49. Сечения куба плоскостью

На рис. 49 посередине показано сечение куба плоскостью в форме пятиугольника $ABCDE$. Прямые AB и DE , CD и AE параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

На рис. 49 справа показано сечение куба плоскостью в форме шестиугольника $ABCDEF$. Прямые AB и DE , BC и EF , CD и AF параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Поскольку у куба имеется только шесть граней, то в сечении куба плоскостью не может получиться многоугольник с числом сторон, большим шести.

Построение сечений многогранников

Для построения сечений используют метод «следов», заключающийся в нахождении точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость.

Пример 117.

Пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π . Требуется найти точку пересечения прямой AB с плоскостью π .

Решение:

через точки A', B' проведем прямую k' . Тогда пересечение прямой k с прямой k' и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (см. рис. 50).

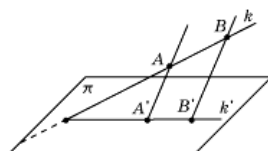


Рисунок 50.

Пример 118.

Даны точки A, B, C и их параллельные проекции A', B', C' на плоскость π . Требуется построить линию пересечения плоскости ABC и плоскости π .

Решение:

используя решение предыдущей задачи, построим точки X и Y пересечения прямых AB и AC с плоскостью π . Прямая XY будет искомой линией пересечения плоскости ABC и плоскости π (см. рис. 51).

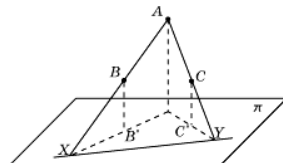


Рисунок 51.

Пример 119.

Через данную точку $C (C')$ провести прямую, параллельную данной прямой $AB (A'B')$, и найти ее точку пересечения с плоскостью π .

Решение:

через точку C проводим прямую, параллельную AB . Через точку C' проводим прямую, параллельную $A'B'$. Точка X пересечения этих прямых и будет искомой (см. рис. 52).

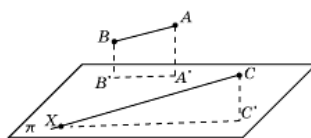


Рисунок 52.

Используя метод, рассмотренный в примере 119, решим задачи на построение сечений куба, пирамиды и призмы

Пример 120.

Построить сечение куба плоскостью проходящей через три точки A , B , C , принадлежащие попарно скрещивающимся ребрам этого куба (см. рис. 53).

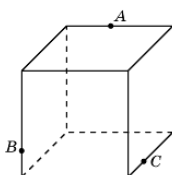


Рисунок 53.

Решение:

найдем пересечение прямой AB , лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции A' , B' точек A , B на основание куба в направлении бокового ребра куба (см. рис. 54).

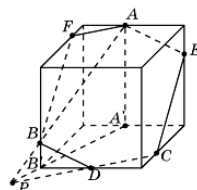


Рисунок 54.

Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P . Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP . Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку D сечения куба. Соединим точки C и D , B и D отрезками. Через точку A проведем прямую, параллельную BD , и точку ее пересечения с ребром куба обозначим E . Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведем прямую, параллельную CD , и точку ее пересечения с ребром куба обозначим F . Соединим точки A и F , B и F отрезками. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью.

Пример 121.

Построить сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки A , B , C , принадлежащие ее ребрам (см. рис. 55).

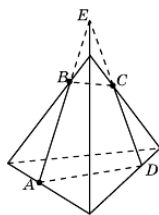


Рисунок 55.

Решение:

проведем прямую AB и ее точку пересечения с боковым ребром пирамиды обозначим через E . Проведем прямую EC и ее точку пересечения с ребром основания пирамиды обозначим через D . Соединим отрезками точки B и C , A и D . Четырехугольник $ABCD$ будет искомым сечением пирамиды.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1. Надо покрасить пол в комнате. Расход краски на 1 м^2 – 120 г, комната имеет размеры 5 м и 4 м. Сколько потребуется краски?
2. Надо оклеить комнату с одним окном и дверью обоями от пола до потолка. Длина комнаты 5 м, ширина – 4 м, высота – 3 м. Площадь окна 3 м^2 , площадь двери 2 м^2 . Обои продаются целыми рулонами, 1 рулон на 10 м^2 . Сколько потребуется рулонов обоев?
3. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.
4. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.
5. Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1 , D и середину ребра CC_1 ?
6. Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB , BC и DD_1 ?
7. Через середину ребра куба, перпендикулярно скрещивающейся с этим ребром диагонали, проведено сечение. Определите его вид.
8. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проходит через две противоположные вершины нижнего основания и середину одного из ребер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ребра куба равна 1.
9. Через вершины A , C , D_1 куба $A...D_1$ проведено сечение. В каком отношении оно делит диагональ DB_1 , и какой образует угол с этой диагональю?
10. Каким является сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB , BC и CD ?

11. Какой фигурой является сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через вершину B и точки M, N – середины соответственно ребер AD, CD ?
12. Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку H , принадлежащую ребру CC_1 .
13. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 56.

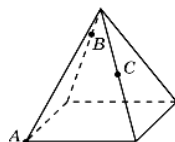


Рисунок 56.

14. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 57.

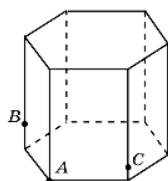


Рисунок 57.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение параллелепипеда, куба, выполните соответствующие чертежи.
2. Перечислите свойства прямоугольного параллелепипеда.
3. Запишите формулы для вычисления объема параллелепипеда, куба.
4. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) трапеция; б) равнобедренная трапеция; в) неравнобедренная трапеция; г) прямоугольная трапеция; д) тупоугольная трапеция?
5. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?
6. Какие могут быть сечения правильного тетраэдра плоскостью?

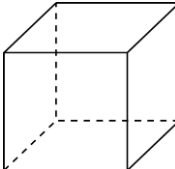
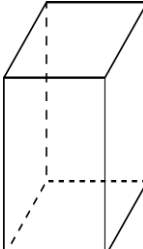
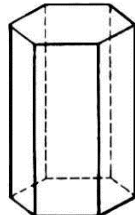
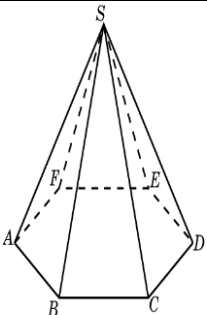
Домашнее задание: задания для с.р. 3,4,13,14

Практическое занятие №47

Площадь поверхности

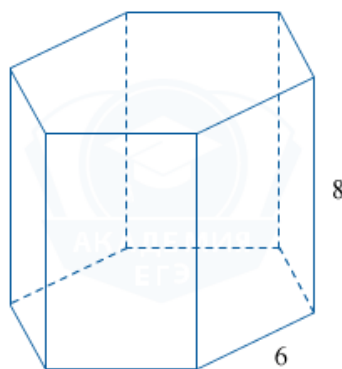
Цель: Знать и уметь применять формулы для нахождения площадей многогранников.

Сведения из теории
Основные формулы

№ п/п	Наименование многогранника	Изображение	Площадь боковой и полной поверхности
1	Куб		$S_{\text{п}} = 6a^2$ $V = a^3$
2	Прямоугольный параллелепипед		$S_{\text{п}} = 2ab + 2ac + 2bc$ $V = a \cdot b \cdot c$ $V = S_{\text{осн}} \cdot h$
3	Призма		$S_{\text{б}} = p \cdot H$ $S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + 2S_{\text{о}}$ $V = S_{\text{осн}} \cdot h$
4	Пирамида		$S_{\text{б}} = \frac{1}{2} p \cdot h$ $S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{о}}$ $V = (1/3) \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$

Пример1.

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 6, а высота — 8.

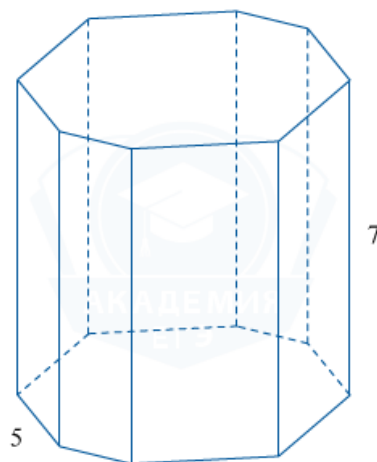


Решение

Площадь боковой поверхности призмы находим по формуле $S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h = 6a \cdot h$, где $P_{\text{осн.}}$ и h — соответственно периметр основания и высота призмы, равная 8, и a — сторона правильного шестиугольника, равная 6. Следовательно, $S_{\text{бок.}} = 6 \cdot 6 \cdot 8 = 288$.

Пример 2.

Найдите площадь боковой поверхности правильной восьмиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 7.

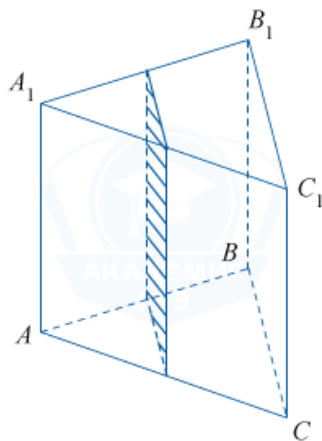


Решение

Площадь боковой поверхности призмы находим по формуле $S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h = 8a \cdot h$, где $P_{\text{осн.}}$ и h — соответственно периметр основания и высота призмы, равная 7, и a — сторона правильного восьмиугольника, равная 5. Следовательно, $S_{\text{бок.}} = 8 \cdot 5 \cdot 7 = 280$.

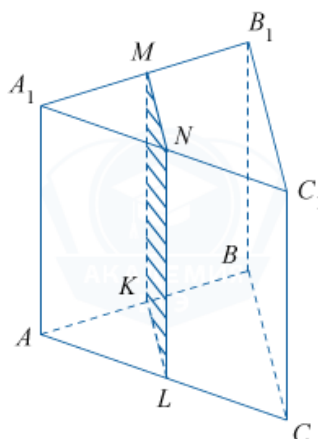
Пример 3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 10. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .



Решение

Рассмотрим следующий рисунок.



Отрезок MN является средней линией треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому $MN = \frac{1}{2}B_1C_1 = 2$. Аналогично, $KL = \frac{1}{2}BC = 2$. Кроме того, $MK = NL = 10$. Отсюда следует, что четырёхугольник $MNLK$ является параллелограммом. Так как $MK \parallel AA_1$, то $MK \perp ABC$ и $MK \perp KL$. Следовательно, четырёхугольник $MNLK$ является прямоугольником. $S_{MNLK} = MK \cdot KL = 10 \cdot 2 = 20$.

Задания для решения в аудитории.

1. Основанием правильной пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной 4 см. Каждое боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол 45° . Найти площадь поверхности пирамиды.
2. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы, сторона основания которой 4 см, а боковое ребро 4 см.
3. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 8 см и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Найти площадь поверхности пирамиды.
4. Основанием прямой призмы является треугольник, у которого стороны, равные 5 см и 6 см образуют угол в 30° , её боковое ребро равно 4 см. Найдите площадь поверхности призмы.

Домашнее задание: учебник с. 213 №4,5

Практическое занятие №48,49

Решение задач на построение сечений, вычисление длин, расстояний, углов, площадей Применение свойств симметрии при решении задач на тела вращения, комбинацию тел.

Цель: Знать свойства проекций; определение шара, сферы, их элементов;

Уметь строить сечения цилиндра, шара.

Сведения из теории:

Сечения цилиндра

Сечения цилиндра плоскостью можно рассматривать как параллельные проекции основания цилиндра на эту плоскость. Поэтому, если плоскость параллельна плоскости основания, то в сечении получается круг, равный основанию.

Если плоскость сечения составляет некоторый угол с плоскостью основания цилиндра и не пересекает основания, то в сечении будет фигура, ограниченная эллипсом.

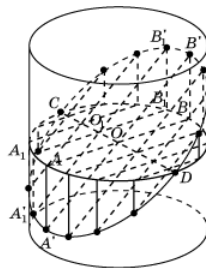


Рисунок 61. Сечение цилиндра

На рис. 61 показано построение точек эллипса, получающегося как сечение боковой поверхности цилиндра плоскостью.

Для этого зададим два сопряженных диаметра AB и CD . Через точку A проведем образующую и выберем на ней какую-нибудь точку A' , принадлежащую сечению. Прямая $A'O$ пересечет образующую, проходящую через точку B в некоторой точке B' , также принадлежащую сечению. Возьмем теперь на отрезке CD произвольную точку и проведем через нее прямую, параллельную $A'B'$. Ее точки пересечения с образующими цилиндра будут принадлежать сечению.

Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат Ox и Oy параллельно соответствующим сторонам (рис. 62).

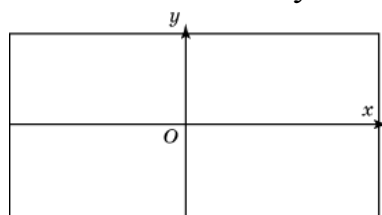


Рисунок 62.

Затем свернем этот лист в боковую поверхность прямого кругового цилиндра, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox свернется в окружность радиуса 1, а ось Oy станет образующей цилиндра (рис. 63).

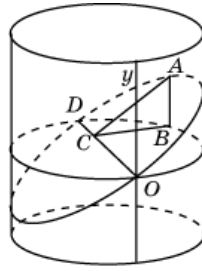


Рисунок 63.

Через диаметр OD полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол в 30° . В этом случае сечением будет эллипс.

Шаром принято называть тело, ограниченное сферой, т.е. шар и сфера – это разные геометрические тела.

Сфера – это фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки на данном расстоянии.

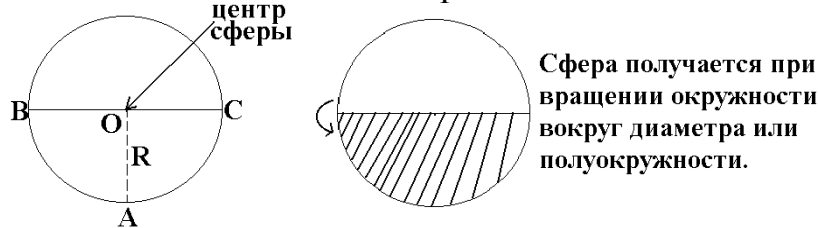


Рисунок 65. Сфера

Поверхность шара называют сферой. Если рассечь сферу плоскостью, получим в сечении окружность. Такие окружности имеют разные радиусы: чем дальше плоскость от центра сферы, тем меньше радиус сечения. Самые большие окружности получаются при сечении сферы плоскостями, проходящими через её центр. Такими большими окружностями на земной поверхности являются экватор и меридианы. А параллели – это сечения земной поверхности плоскостями, которые параллельны экваториальной плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется *центром сферы* и обычно обозначается O .

Расстояние от точек сферы до её центра называется *радиусом сферы* и обычно обозначается R . *Радиусом* также называется любой отрезок, соединяющий точку сферы с её центром. *Сфера* – это граница шара. Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более чем на данное расстояние. Другими словами, *шар* – это объединение сферы и всех ее внутренних точек.

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Основные геометрические формулы

Площадь сферы:

$$S=4\pi r^2=\pi d^2.$$

Объем шара, ограниченного сферой:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

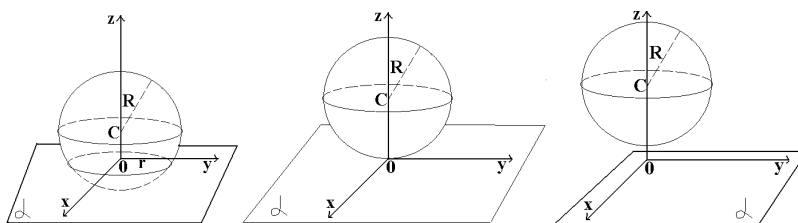


Рисунок 66. Взаимное расположение сферы и плоскости

Касательная плоскость к сфере

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

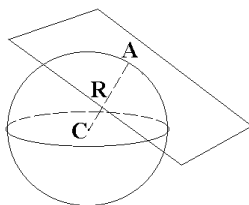


Рисунок 67. Касательная плоскость к сфере

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Сечение шара

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

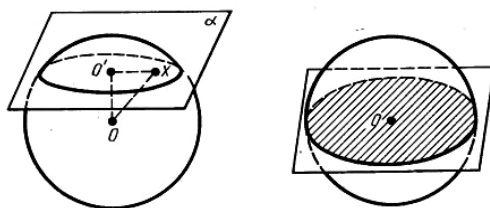


Рисунок 68. Сечение шара

Пример 1.

Два сечения шара радиуса 10 см параллельными плоскостями имеют радиусы, равные 6 см и 8 см. Найти расстояние между секущими плоскостями.

Решение:

находим расстояние каждой из параллельных плоскостей до центра шара из прямоугольных треугольников по теореме Пифагора:

$$d_1 = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ см}$$

или

$$d_2 = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ см.}$$

В зависимости от того, лежит ли центр шара между плоскостями или нет, получаем два различных ответа к задаче:

$$d=14 \text{ см.}$$

Пример 2.

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга (рис. 69)?

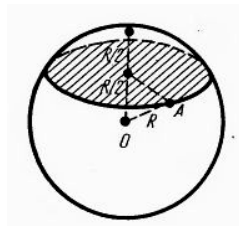


Рисунок 69.

Решение:

отношение площади круга к площади полученного сечения равно:

$$\frac{\pi \left(R \sqrt{\frac{3}{4}} \right)^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Вычислите площадь получившегося сечения.

2) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

3) Радиус шара равен 63 см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.

4) Радиус шара R . Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60° к нему. Найти площадь сечения.

5) На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними: 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара равен 13 см. Радиус шара равен 13 см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

1) Нарисуйте цилиндр и плоскость, пересекающую его боковую поверхность по эллипсу.

2) Нарисуйте цилиндр и постройте несколько точек эллипса, получающегося в сечении его боковой поверхности плоскостью.

3) В основании цилиндра круг радиуса 5 см. Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если она образует с плоскостью основания угол: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .

4) Возьмем прямоугольный лист бумаги с нарисованными на нем осями координат. Свернем этот лист в боковую поверхность правильной четырехугольной призмы (рис. 64). Сторону основания призмы примем за 1 см. Через точки O и D проведем сечение плоскостью, составляющей с плоскостью основания угол 45° . Развернем лист бумаги. Выясните, какая при этом получится кривая? Что изменится, если сечение проводить под другими углами?

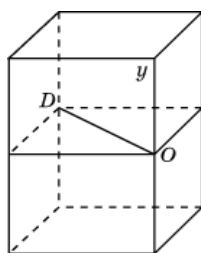


Рисунок 64.

Контрольные вопросы:

1. В каком случае сечением цилиндра плоскостью является круг?
2. Что будет сечением цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра?
3. Какую форму принимает поверхность воды в круглом наклонном стакане?
4. Может ли в сечении цилиндра плоскостью получиться: а) круг; б) прямоугольник; в) параллелограмм; г) трапеция д) треугольник?

5. Могут ли в сечениях цилиндра плоскостью получаться фигуры, отличные от круга, прямоугольника и эллипса?
6. Дайте определение шара, сферы.
7. Запишите формулы площади сферы, объема шара.
8. Приведите примеры взаимного расположения сферы и плоскости

Домашнее задание: с.р № 21

Практическое занятие № 50,51

Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел. Вычисление объемов тел и поверхностей вращения.

Цель: Знать формулы объемов тел и поверхностей вращения, формулы для вычисления объемов подобных тел;

Уметь вычислять объемы тел и поверхностей вращения, вычислять объемы и площади подобных тел

Сведения из теории:

Объем прямоугольного параллелепипеда

$$V=abc,$$

где a, b, c – стороны параллелепипеда.

Объем куба

$$V=a^3,$$

где a – длина грани куба.

Объем призмы

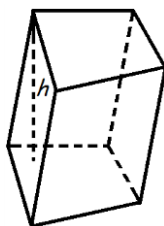


Рисунок 70. Призма

Объем призмы равен произведению площади основания призмы, на высоту:

$$V=S_0h,$$

где S_0 – площадь основания призмы, h – высота призмы.

Объем параллелепипеда

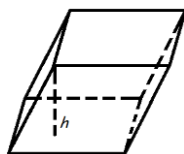


Рисунок 71. Параллелепипед

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S_o \cdot h,$$

где S_o – площадь основания, h – длина высоты.

Объем прямоугольного параллелепипеда

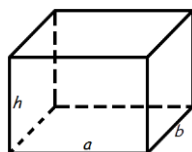


Рисунок 72. Прямоугольный параллелепипед

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты:

$$V = a \cdot b \cdot h,$$

где a – длина, b – ширина, h – высота.

Объем пирамиды

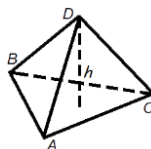


Рисунок 73. Пирамида

Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} S_o h,$$

где S_o – площадь основания пирамиды, h – длина высоты пирамиды.

Объем правильного тетраэдра

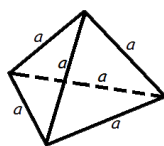


Рисунок 74. Тетраэдр

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12},$$

где a – длина ребра правильного тетраэдра.

Объем цилиндра

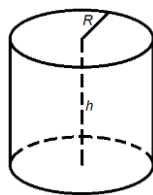


Рисунок 75. Цилиндр

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = \pi R^2 h$$

или

$$V = S_o h,$$

где S_o – площадь основания цилиндра, R – радиус цилиндра, h – высота цилиндра, $\pi = 3,141592$.

Объем конуса

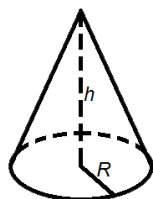


Рисунок 76. Конус

Объем конуса равен трети от произведения площади его основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

или

$$V = \frac{1}{3} S_o h,$$

где S_o – площадь основания конуса, R – радиус основания конуса, h – высота конуса, $\pi = 3,141592$.

Объем шара

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

где R – радиус шара, $\pi = 3,141592$.

Пример 1.

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3 . Определите ребро куба.

Решение:

обозначим ребро куба за x и составим уравнение:

$$\begin{aligned}(x+2)^3 &= x^3 + 98, \\ x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= x^3 + 98, \\ 6x^2 + 12x - 90 &= 0, \\ x^2 + 2x - 15 &= 0, \\ x_1 &= -5, x_2 = 3.\end{aligned}$$

$x_1 = -5$ – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3.

Пример 2.

Прямоугольный лист жести, имеющий 1,6 м длины и 0,8 м ширины, можно согнуть в трубку двояким образом: в первом случае длина трубки будет 1,6 м, во втором 0,8 м. Найти отношение объемов трубок.

Решение:

трубки образуют цилиндры, объем, которого вычисляется по формуле:

$$V = \pi R^2 h.$$

У первого цилиндра высота будет 1,6 м, тогда радиус 0,4 м. Во втором цилиндре высота будет 0,8 м, тогда радиус 0,8 м. Вычислим отношение объемов двух цилиндров:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi 0,4^2 1,6}{\pi 0,8^2 0,8} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1:2.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Измерения прямоугольного параллелепипеда: 15 м, 50 м и 36 м. Найти ребро равновеликого ему куба.

2) Измерения прямоугольного бруса: 3 см, 4 см и 5 см. Если увеличить каждое его ребро на x см, то поверхность увеличится на 54 см^2 . Как увеличится его объем?

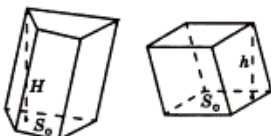
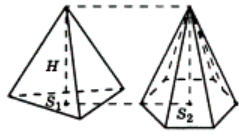
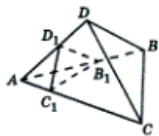
3) Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объем цилиндра.

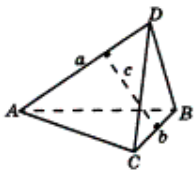
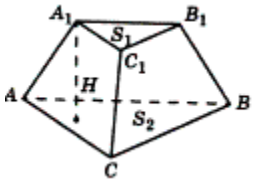
4) Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 9 м и 12 м, каждое из боковых ребер равно 12,5 м. Найти объем пирамиды.

5) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны по 6 см, а основание 8 см. Боковые ребра равны между собой и равны 9 см. Найти объем пирамиды.

6) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60° . Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 30° . Найти объем параллелепипеда.

7) Высота и образующая конуса относятся как 4:5, а объем конуса равен $96\pi \text{ см}^3$. Найти полную поверхность конуса.

<i>Объемы равных тел равны</i> Если тело разбито на несколько тел, не имеющих общих внутренних точек, то его объем равен сумме объемов <i>этих</i> тел. <i>Отношение объемов</i> подобных тел равно кубу коэффициента подобия.	
<i>Объем призмы</i> равен произведению площади ее основания на высоту: $V=S_oH$ или произведению площади ее перпендикулярного сечения на боковое ребро: $V=S_o l$.	 $V_1 = S_o H,$ $V_2 = S_o h,$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{H}{h}.$
<i>Объем пирамиды</i> равен одной трети произведения площади ее основания на высоту: $V = \frac{1}{3} S_o H.$	 $V_1 = \frac{1}{3} S_1 H,$ $V_2 = \frac{1}{3} S_2 H,$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}.$
<i>Объемы призм (пирамид), имеющих равновеликие основания, относятся как их высоты.</i> <i>Объемы призм (пирамид), имеющих равные высоты, относятся как площади их оснований.</i>	
<i>Объемы тетраэдров, имеющих общий трехгранный угол, относятся как произведения ребер, содержащих этот угол.</i>	 $\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}.$

Объем тетраэдра может быть найден по формуле: $V = \frac{1}{6} abc \sin \varphi,$ где a и b – длины скрещивающихся ребер, c – расстояние между ними, φ – угол между ними.	
Объем усеченной пирамиды $V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$	
Объем многогранника можно получить, разбив его на не имеющие общих внутренних точек тетраэдры (<i>триангуляция</i>) и суммировав их объемы.	
Если в многогранник можно вписать шар, то объем многогранника равен: $V = \frac{1}{3} S_{\text{полн.}} R,$ где R – радиус вписанного шара, $S_{\text{полн.}}$ – площадь полной поверхности многогранника.	

Пример 1.

Чашка диаметром 8 см и высотой 10 см вмещает 0,5 литра воды. Каких размеров должна быть подобная чашка, вмещающая 4 литра воды?

Решение:

поскольку чашки – подобные цилиндры, то отношение их объёмов равно отношению кубов соответствующих отрезков (в нашем случае – высот и диаметров чашек). Следовательно, высота h новой чашки находится из отношения:

$$(h/10)^3 = 4/0,5, \text{ т.е. } h^3 = 8 \cdot 10^3, \text{ откуда } h = 20 \text{ см};$$

Аналогично, для диаметра d получим:

$$(d/8)^3 = 4/0,5, \text{ т.е. } d^3 = 8 \cdot 8^3, \text{ откуда } d = 16 \text{ см}.$$

Пример 2.

Во сколько, примерно, раз великан ростом в 2 м тяжелее карлика ростом в 1 м?

Решение:

т.к. как фигуры человеческого тела приблизительно подобны, то при вдвое большем росте человек имеет объем не вдвое, а в 8 раз больший. Значит, наш великан весит больше карлика в 8 раз. Самый высокий великан, о котором сохранились сведения, был один житель Эльзаса ростом в 275 см – на целый метр выше человека среднего роста. Самый

маленький карлик имел высоту меньше 40 см, т.е. был ниже эльзасца круглым счетом в 7 раз. Поэтому если бы на одну чашку весов поставить великана – эльзасца, то на другую надо бы для равновесия поместить $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ карлика, т.е. целую толпу.

Пример 3

Продаются два арбуза разных размеров. Один на четвертую долю шире другого, а стоит он в полтора раза дороже. Какой из них выгоднее купить?

Решение:

объем большого арбуза превышает объем меньшего в $1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,25 = 125/64$ раза, т.е. почти вдвое. Выгоднее значит купить крупный арбуз, он дороже только в полтора раза, а съедобного вещества в нем больше раза в два.

Пример 4.

Имеются две медные кастрюли одинаковой формы и со стенками одной толщины. Первая в 8 раз вместительнее второй. Во сколько раз она тяжелее?

Решение:

обе кастрюли – тела, геометрически подобные. Если большая кастрюля в 8 раз вместительнее, то все ее линейные размеры в два раза больше: она вдвое выше и вдвое шире. Поэтому ее поверхность больше в $2 \cdot 2 = 4$ раза (поверхности подобных тел относятся, как квадраты линейных размеров). При одинаковой толщине стенок вес кастрюли зависит от величины ее поверхности.

Ответ: большая кастрюля вчетверо тяжелее меньшей кастрюли.

Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи

1) Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько весит игрушечный кирпичик из того же материала, все размеры которого в 4 раза меньше?

2) Продаются две дыни одного сорта. Одна окружностью 60, другая – 50 см. Первая в полтора раза дороже второй. Какую дыню выгоднее купить?

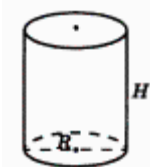
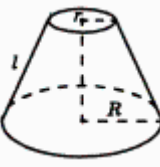
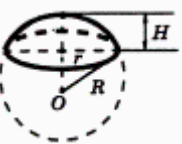
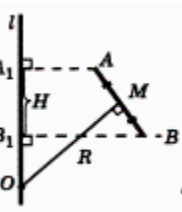
3) Мякоть вишни окружает косточку слоем такой же толщины, как и сама косточка. Будем считать, что и вишня и косточка имеют форму шариков. Можете ли вы сообразить в уме, во сколько раз объем сочной части вишни больше объема косточки?

4) Башня Эйфеля в Париже, 300 м высоты, сделана целиком из железа, которого пошло на нее около 8000000 кг. Я желаю заказать точную железную модель знаменитой башни, висящую всего 1 кг. Какой она будет высоты?

5) Что тяжелее: стакан сахарного песка или такой же стакан колотого сахара?

6) Почему лучина загорается скорее, чем толстое полено, от которого она отколота?

Площади тел вращения

<i>Площадь боковой поверхности цилиндра</i> $S = 2\pi RH$ <i>Площадь полной поверхности цилиндра</i> $S = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2\pi R(R + H)$	
<i>Площадь боковой поверхности конуса</i> $S = \pi Rl$ <i>Площадь полной поверхности конуса</i> $S = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = \pi R(R + l)$	
<i>Площадь боковой поверхности усеченного конуса</i> $S_{\text{бок.}} = \pi(R + r)l$ <i>Площадь полной поверхности усеченного конуса</i> $S_{\text{полн.}} = \pi(R^2 + r^2 + (R + r)l)$	
<i>Площадь поверхности сферы</i> $S = 4\pi R^2$ <i>Площадь сферической поверхности сферического сегмента</i> $S_{\text{бок.}} = 2\pi RH$ <i>Площадь полной поверхности сферического сегмента</i> $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + \pi r^2 = 2\pi RH + \pi r^2$	
<i>Поверхность вращения отрезка AB, не имеющего с осью l общих внутренних точек, равна произведению проекции этого отрезка на ось и длины окружности, радиусом которой служит отрезок серединного перпендикуляра отрезка с концами на оси и на отрезке</i>	
<i>Отношение поверхностей подобных тел равно квадрату коэффициента подобия</i>	

Пример 1.

В "Путешествии Гулливера" рассказывается о лилипутах, рост которых в 12 раз меньше нормального. Если на костюм человека

нормального роста идет 4 м^2 материала, то, сколько материала идет на костюм лилипута?

Решение:

коэффициент подобия $=12^2$, т. е. на костюм лилипута идет в 144 раза меньше. Т.о., $40\,000 \text{ см}^2 : 144 = 280 \text{ см}^2$.

Пример 2.

Один человек на $1/4$ ниже другого. Каково отношение поверхностей их тел, считая, что оба тела геометрически подобны?

Решение:

поверхность человека меньшего роста составляет $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

поверхности более высокого.

Пример 3.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 21π , а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.

Решение:

высота цилиндра равна:

$$h = \frac{S_{\text{бок.}}}{2\pi R} = \frac{21\pi}{7\pi} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 4.

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину – рис. 77). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Решение:

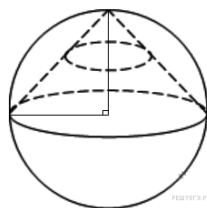


Рисунок 77.

высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$l^2 = r^2 + r^2,$$

$$l^2 = 2r^2,$$

$$l = r\sqrt{2}.$$

Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$ поэтому образующая равна:

$$28\sqrt{2}\sqrt{2} = 56.$$

Ответ: 56.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Сторона первого квадрата больше стороны второго квадрата в 2 раза (в 5 раз). Во сколько раз площадь первого квадрата больше площади второго квадрата?

2) Сторона первого квадрата составляет $\frac{1}{3}$ (0,1) стороны второго квадрата. Какую часть площадь первого квадрата составляет от площади второго квадрата?

3) Коэффициент подобия в подобных многоугольниках равен 4 ($\frac{1}{5}$; 0,4; 2,5). Чему равно отношение их площадей?

4) Отношение площадей подобных многоугольников равно 36 (100; 0,09). Чему равно отношение сходственных сторон этих многоугольников?

5) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 18π , а диаметр основания равен 9. Найдите высоту цилиндра.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы объемов тел и поверхностей вращения.
2. Чему равны объемы равных тел?
3. Чему равно отношение объемов подобных тел?
4. Чему равно отношение объемов призм, пирамид?
5. Запишите формулы площадей поверхности цилиндра, конуса, шара.
6. Чему равно отношение поверхностей подобных тел?

Домашнее задание: выполнить оставшиеся задания для самостоятельного решения.

Практическое занятие №52

Расстояние между двумя точками. Вычисление координат середины отрезка

Цель: Знать формулы для вычисления расстояния между двумя точками; формулы для вычисления координат середины отрезка;

Уметь вычислять расстояние между двумя точками, координаты середины отрезка.

Сведения из теории:

Длиной отрезка AB называется расстояние между точками A и B при заданном масштабе (отрезке единичной длины). Длину отрезка AB будем обозначать как $|AB|$.

Расстояние между двумя точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ в прямоугольной системе координат выражается формулой:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Точка C называется *серединой отрезка AB* , если она лежит на отрезке AB и находится на одинаковом расстоянии от его концов, т. е. $|AC| = |CB|$.

Координаты середины отрезка на плоскости

Введем прямоугольную декартову систему координат Oxy на плоскости. Пусть нам даны две точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ и известно, что точка C – середина отрезка AB . Найдем координаты x_C и y_C точки C .

Рассмотрим случай, когда точки A и B не совпадают и не лежат одновременно на одной из координатных осей или на прямой, перпендикулярной одной из координатных осей.

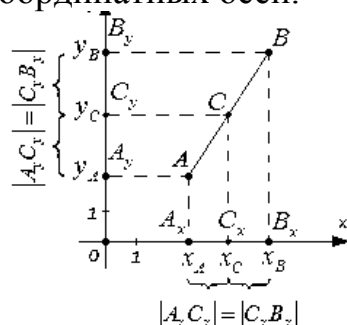


Рисунок 78. Координаты середины отрезка

По построению:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Т. о., середина отрезка AB на плоскости с концами в точках $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ имеет координаты $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

Пример 1.

На плоскости заданы координаты двух точек $A(-7; 3)$, $B(2; 4)$. Найдите координаты середины отрезка AB .

Решение:

пусть точка C – середина отрезка AB . Ее координаты равны полусуммам соответствующих координат точек A и B :

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-7 + 2}{2} = -\frac{5}{2},$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}.$$

Т. о., середина отрезка AB имеет координаты $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)$.

Часто с нахождением координат середины отрезка связаны задачи, в которых фигурирует термин «медиана».

Пример2.

Найдите длину медианы AM в треугольнике ABC , если известны координаты его вершин $A(-1; 0)$, $B(3; 2)$, $C(9; -8)$.

Решение:

т. к. AM – медиана, то точка M является серединой стороны BC . Найдем координаты середины этого отрезка по известным координатам его концов:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+9}{2} = 6,$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2-8}{2} = -3.$$

Т. о., $M(6; -3)$.

Осталось воспользоваться формулой для вычисления расстояния между точками A и M :

$$|AM| = \sqrt{(6 - (-1))^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{58}.$$

Существуют различные задачи, в которых известны координаты середины отрезка и одного из его концов, а требуется найти координаты другого конца. Рассмотрим решение одной из них.

Пример 3.

В прямоугольной системе координат трехмерного пространства дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Известно, что $C_1(1; 1; 0)$, а $M(4; 2; -4)$ – середина диагонали BD_1 . Найдите координаты точки A .

Решение:

диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке, и эта точка является серединой каждой из этих диагоналей. Таким образом, мы можем утверждать, что точка M является серединой отрезка AC_1 . Из формул для нахождения координат середины отрезка имеем:

$$x_M = \frac{x_A + x_{C_1}}{2} \Rightarrow x_A = 2x_M - x_{C_1} = 8 - 1 = 7,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{C_1}}{2} \Rightarrow y_A = 2y_M - y_{C_1} = 4 - 1 = 3,$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{C_1}}{2} \Rightarrow z_A = 2z_M - z_{C_1} = -8 - 0 = -8.$$

Итак, точка A имеет координаты $(7; 3; -8)$.

Пример 4.

Найти на оси Oy точку, которая находится на одинаковом расстоянии от точек $A(6; 12)$ и $B(-8; 10)$.

Решение:

пусть координаты нужной по условию задачи точки, лежащей на оси Oy , будут $O_1(0; b)$ (у точки, лежащей на оси Oy , абсцисса равна нулю). Из условия следует, что $O_1A = O_1B$.

По формуле

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

находим:

$$O_1A = \sqrt{(0 - 6)^2 + (b - 12)^2} = \sqrt{36 + (b - 12)^2},$$

$$O_1B = \sqrt{8^2 + (b - 10)^2} = \sqrt{64 + (b - 10)^2}.$$

Имеем уравнение

$$\sqrt{36 + (b - 12)^2} = \sqrt{64 + (b - 10)^2}.$$

Выполняя элементарные преобразования при решении иррациональных уравнений, получим $b = 4$.

Необходимая по условию задачи точка $O_1(0; 4)$ – рис. 80.

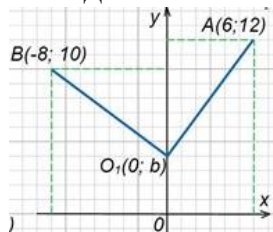


Рисунок 80.

Деление отрезка в данном отношении

Координаты x, y, z точки M , которая делит отрезок M_1M_2 , ограниченный точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в отношении λ , определяется по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Пример 5.

Даны концы отрезка AB : $A(-2; 5)$ и $B(4; 17)$. На этом отрезке расположена точка C , расстояние от которой до точки A в два раза больше расстояния от точки B . Вычислить координаты точки C .

Решение:

по условию задачи $AC = 2BC$, тогда $\lambda = 2$.

По формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

вычислим координаты точки C :

$$x = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = \frac{-2 + 8}{3} = 2,$$

$$y = \frac{5 + 2 \cdot 17}{1 + 2} = \frac{5 + 34}{3} = 13.$$

Т.о., $C(2; 13)$.

Пример 6.

Доказать, что треугольник ABC : $A(-3; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(11; -1)$ – прямоугольный.

Решение:

вычислим длины сторон треугольника по формуле:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

$$AB = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (3 + 3)^2} = \sqrt{40},$$

$$BC = \sqrt{(11 + 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{160},$$

$$AC = \sqrt{(11 + 3)^2 + (-1 + 3)^2} = \sqrt{200}.$$

Т.к. $AB^2 = 40$, $BC^2 = 160$, $AC^2 = 200$, то $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Т.о., сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Из этого следует, что треугольник ABC прямоугольный и сторона AC является его гипотенузой.

Задания для самостоятельного решения:

- 1) Доказать, что треугольник с вершинами $A(3; -1; 2)$, $B(0; -2; 2)$, $C(-3; 2; 1)$ равнобедренный.
- 2) На оси абсцисс найти точку, расстояние от которой до точки $A(-3; 4; 8)$ равно 12.
- 3) На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(1; -3; 7)$ и $B(5; 7; -5)$.
- 4) Даны вершины $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -6)$, $C(-5; 0; 2)$ треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A .
- 5) Вычислите периметр треугольника ABC , если $A(4; 0)$, $B(12; -2)$, $C(5; -9)$.
- 6) Вычислите длину медианы AM треугольника ABC , вершины которого имеют координаты $A(0; 1)$, $B(1; -4)$, $C(5; 2)$.
- 7) Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный и вычислите его площадь, если вершины которого имеют координаты $A(-4; 1)$, $B(-2; 4)$, $C(0; 1)$.
- 8) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, и вычислите его диагонали, если $A(1; 1)$, $B(6; 1)$, $C(7; 4)$, $D(2; 4)$.

9) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником, и вычислите его площадь, если $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; -3)$, $D(-3; -3)$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу для вычисления координат середины отрезка.
2. Запишите формулу для вычисления расстояния между двумя точками.

Домашнее задание: учебник с. 82 № 1-9

Практическое занятие №53

Действия с векторами. Действия с векторами заданными координатами .

Цель: Знать правила сложения векторов, правило умножения векторов;

Уметь строить сумму векторов по правилу треугольника, параллелограмма; вычислять координаты суммы векторов, строить произведение вектора на число; вычислять координаты вектора $k\vec{a}$

Сведения из теории:

Линейные операции над векторами

Суммой двух векторов $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (*правило треугольника*).

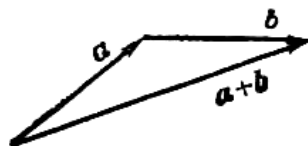


Рисунок 81. Правило треугольника

Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) *правилом параллелограмма*: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a} + \vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отсюда сразу следует, что $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

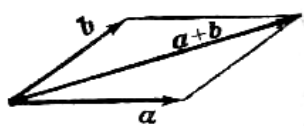


Рисунок 82. Правило параллелограмма

Сложение многих векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника, построим сумму четырех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

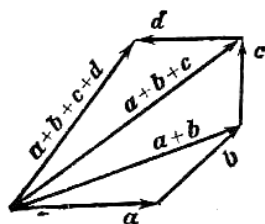


Рисунок 83. Правило многоугольника

Разность двух векторов $\vec{a} - \vec{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет вектор $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу, то разность их есть вектор, идущий из конца $\vec{b}$ («вычитаемого») к концу $\vec{a}$ («уменьшаемого»).

Два вектора равной длины, лежащие на одной прямой и направленные в противоположные стороны, называются *взаимно обратными*: если один из них обозначен символом $\vec{a}$, то другой обозначается символом $-\vec{a}$. Легко видеть, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Т. о., построение разности равносильно прибавлению к «уменьшаемому» вектора, обратного «вычитаемого».

Три вектора в пространстве можно складывать по *правилу параллелепипеда*: если на трех векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, как на ребрах, построить параллелепипед, то его диагональ, выходящая из общего начала данных векторов, и будет их суммой $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$:

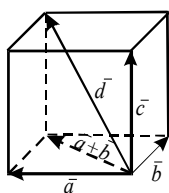


Рисунок 84. Правило параллелепипеда

Задания для самостоятельного решения:

1) По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $\vec{a} + \vec{b}$, 2) $\vec{a} - \vec{b}$, 3) $-\vec{a} + \vec{b}$, 4) $-\vec{a} - \vec{b}$.

При сложении векторов складываются их соответствующие координаты, при вычитании вычитаются соответствующие координаты, т.е. если даны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, то координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2), \\ \vec{d} &= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).\end{aligned}$$

Пример 1.

Вычислить координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = (-3; 5; 1)$, $\vec{b} = (4; -2; 8)$.

Решение:

по формулам

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2), \\ \vec{d} &= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2),\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (-3 + 4; 5 + (-2); 1 + 8) = (1; 3; 9), \\ \vec{d} &= (-3 - 4; 5 - (-2); 1 - 8) = (-7; 7; -7).\end{aligned}$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислить координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{h}$; $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{h}$, если $\vec{a} = (4; -3; 10)$, $\vec{b} = (-4; 12; -1)$, $\vec{h} = (3; -7; -11)$.

Произведение $k\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор, модуль которого равен произведению модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа k ; он параллелен вектору $\vec{a}$ или лежит с ним на одной прямой и направлен так же, как вектор $\vec{a}$, если k – число положительное, и противоположно вектору $\vec{a}$, если k – число отрицательное.

Если $k = 0$, для любого вектора $\vec{a}$ произведение $k\vec{a}$ равно нуль-вектору: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Если $k = 1$, то $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Если $k = -1$, то $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ – вектор, противоположный вектору $\vec{a}$.

Пример 1.

Даны векторы, совпадающие со сторонами треугольника ABC : $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\vec{AO}$, где O – точка пересечения медиан треугольника. Выполните рисунок.

Решение:

известно, что точка O пересечения медиан треугольника делит отрезок медианы в отношении 2:1, считая от вершины. Поэтому $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD}$, где точка D – середина стороны CB .

Но вектор $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \vec{a}$; $\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2} \vec{a}$.

В треугольнике CAD вектор $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b}$.

Искомый вектор $\overrightarrow{AO} = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b} \right) = \frac{1}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}$.

Задания для самостоятельного решения:

1) По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{b}$, $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

2) В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$. Построить каждый из следующих векторов: $\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$, $\frac{\vec{m} - \vec{n}}{2}$, $\frac{-\vec{m} + \vec{n}}{2}$, $-\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$.

3) Точка O является точкой пересечения медиан треугольника ABC . Доказать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.

4) В правильном пятиугольнике $ABCDE$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{q}$, $\overrightarrow{EA} = \vec{r}$. Построить векторы: $\vec{m} - \vec{n} + \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{m} + 2\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{r}$, $2\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} - 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$.

5) В параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{p}$ (рис. 85)

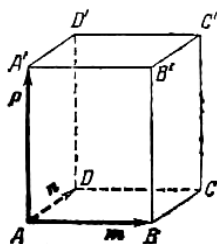


Рисунок 85.

6) Построить каждый из следующих векторов: $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$, $\vec{m} + \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$, $\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{p}$, $-\vec{m} - \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правило умножения вектора на число.
2. Сформулируйте правило треугольника для сложения векторов.
3. Сформулируйте правило параллелограмма для сложения векторов.
4. Запишите формулы сложения (разности) векторов в координатах.

Домашнее задание: с.р. №24 вариант 1 № 1-7

Скалярное произведение векторов

Цель: Знать формулы для вычисления скалярного произведения векторов;

Уметь вычислять скалярное произведение векторов, угол между векторами.

Сведения из теории:

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\vec{b}$ (порядок записи сомножителей безразличен, то есть $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$).

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначить через φ , то их скалярное произведение можно выразить формулой:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно выразить также формулой:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}$$

или

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Из формулы $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ следует, что $\vec{a}\vec{b} > 0$, если φ – острый угол, $\vec{a}\vec{b} < 0$, если φ – тупой угол; $\vec{a}\vec{b} = 0$ в том и только в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора и обозначается символом $\vec{a}^2$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Угол ϕ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ задается

формулой $\cos \phi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, или в координатах

$$\cos \phi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Проекция произвольного вектора $S = (x, y, z)$ на какую-нибудь ось u определяется формулой:

$$np_u \vec{S} = \vec{S}\vec{e},$$

где $\vec{e}$ – единичный вектор, направленный по оси u .

Если даны α, β, γ , которые оси u составляют соответствующие углы с координатными осями, то $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ и для вычисления вектора $\vec{S}$ может служить формула:

$$np_u \vec{S} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

Пример 1.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\phi = \frac{2\pi}{3}$, зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$,

вычислить: $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|^2$, $|\vec{b}|^2$, $(\vec{a} + \vec{b})^2$, $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2$, $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

Решение:

из формулы $\cos \phi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, выразим $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi$, тогда

$$\vec{a}\vec{b} = 12 \cos \frac{2\pi}{3} = 12 \left(-\frac{1}{2} \right) = -6;$$

$$\text{т.к. } \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \text{ то } |\vec{a}|^2 = 3^2 = 9, |\vec{b}|^2 = 4^2 = 16;$$

по формуле сокращенного умножения квадрата суммы, имеем

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2(-6) + 16 = 13;$$

аналогично

$$(3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 81 + 12(-6) + 64 = 73;$$

по формуле сокращенного умножения квадрата разности, имеем

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 - 2(-6) + 16 = 37;$$

раскроем скобки

$$(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 27 + 4(-6) - 64 = -61.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\varphi = \frac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить:

$$(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c}), (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2, (\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2.$$

2) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60° . Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$, определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

3) Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; 4)$ и $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить: $\vec{a}\vec{b}$, $\sqrt{\vec{a}^2}$, $\sqrt{\vec{b}^2}$, $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b})^2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

4) Даны точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$, $C(0; 1; -5)$. Вычислить: $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$, $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$, $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы для вычисления скалярного произведения векторов.
2. Запишите формулу для вычисления угла между векторами.

Домашнее задание: с.р. №24 вариант 1 № 8-10

Практическое занятие №54

Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Цель: Знать, что называется числовой характеристикой проекции вектора на ось; векторы и простейшие действия над ними;

Уметь вычислять числовую проекцию вектора на ось; применять правила действия над векторами при решении математических и прикладных задач

Сведения из теории:

Числовая проекция вектора на ось – это число, которое равно произведению длины данного вектора на косинус угла между этим вектором и вектором, определяющим направление оси.

Числовую проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось L обозначают как $np_L \overrightarrow{AB}$, а числовую проекцию вектора $\vec{a}$ на ось, определяемую вектором $\vec{b}$ – $np_{\vec{b}} \vec{a}$.

В этих обозначениях определение числовой проекции вектора $\vec{a}$ на прямую, направленную как вектор $\vec{b}$, примет вид $np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Эта формула применяется, когда известны длина вектора $\vec{a}$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 1.

Вычислите числовую проекцию вектора $\vec{a}$ на прямую, направленную как вектор $\vec{b}$, если длина вектора $\vec{a}$ равна 8, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60° .

Решение:

по формуле $np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$, имеем

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = 8 \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Известно, что $\cos \phi = \frac{\overrightarrow{ab}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$. Тогда формула $np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$,

позволяющая найти числовую проекцию вектора $\vec{a}$ на прямую, направленную как вектор $\vec{b}$, примет вид $np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$.

Т. о. числовая проекция вектора $\vec{a}$ на ось, направление которой совпадает с направлением вектора $\vec{b}$, – это отношение скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к длине вектора $\vec{b}$.

Полученную формулу вида $np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$ удобно применять для нахождения числовой проекции вектора $\vec{a}$ на прямую, направление которой совпадает с направлением вектора $\vec{b}$, когда известны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 2.

Известно, что вектор $\vec{b} = (-3, 4)$ задает направление оси L . Найдите числовую проекцию вектора $\vec{a} = (1, 7)$ на ось L .

Решение:

запишем формулу $np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$ в координатной форме, тогда

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}.$$

Используем ее для нахождения требуемой числовой проекции вектора $\vec{a}$ на ось L :

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-3) + 7 \cdot 4}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = 5.$$

Пример 3.

Относительно прямоугольной системы координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве заданы два вектора $\vec{a} = (-2; 3; 1)$ и $\vec{b} = (3; -2; 6)$. Найдите числовую проекцию вектора $\vec{a}$ на ось L , направление которой совпадает с направлением вектора $\vec{b}$.

Решение:

по координатам векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычислим скалярное произведение этих векторов: $\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Длина вектора $\vec{b}$ по его координатам вычисляется по следующей формуле $|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}$. Тогда формула для определения числовой проекции вектора $\vec{a}$ на ось L в координатах имеет вид

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

Подставим в полученную формулу заданные координаты:

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 6}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{-6}{\sqrt{49}} = -\frac{6}{7}.$$

Для проекции выполняются следующие теоремы:

1. Проекция равных векторов на одну и ту же ось равны между собой:

$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ тогда } np_L \vec{a} = np_L \vec{b}.$$

2. Проекция суммы двух векторов на произвольную ось равна сумме проекций этих векторов:

$$np_L (\vec{a} + \vec{b}) = np_L \vec{a} + np_L \vec{b}.$$

3. Проекция произведения скаляра на вектор на произвольную ось равна произведению этого скаляра на проекцию вектора:

$$np_L (k\vec{a}) = k np_L \vec{a}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1) Докажите, что для любых точек A, B, C, D справедливо равенство:
 $np_L \overrightarrow{AB} + np_L \overrightarrow{BC} + np_L \overrightarrow{CD} = np_L \overrightarrow{AD}.$

2) Дано: $np_L \vec{a} = -1, np_L \vec{b} = 3$. Вычислите: $np_L (\vec{a} + 2\vec{b})$; $np_L (-\vec{a} + 2\vec{b})$,
 $np_L (3\vec{a} - 2\vec{b})$, $np_L (\vec{a} - \vec{b})$.

3) Вектор $\vec{a}$ образует с осью Ox угол α и имеет длину $|\vec{a}|$.

Определите координаты вектора $\vec{a}$ если:

а) $\alpha = 90^\circ, |\vec{a}| = 2$; б) $\alpha = 180^\circ, |\vec{a}| = \frac{3}{2}$; в) $\alpha = -90^\circ, |\vec{a}| = \frac{1}{2}$; г) $\alpha = 45^\circ, |\vec{a}| = 1$.

Рассмотрим задачи трёх типов, которые целесообразно решать с помощью векторов.

Первый тип: задачи, связанные с доказательством параллельности прямых и отрезков, прямых и плоскости

Пример.

Доказать что вектор, концами которого являются середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен половине векторной суммы двух других противоположных сторон.

Решение:

пусть $ABCD$ – четырехугольник, M – середина AB , N – середина CD .

Тогда необходимо доказать, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

Пусть O – произвольная точка плоскости, соединим ее с вершинами

и серединами двух сторон четырехугольника, выполним рисунок (рис. 86):

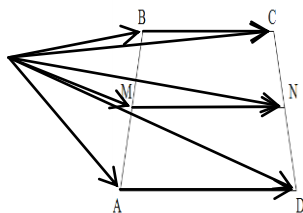


Рисунок 86.

По правилу деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

По правилу треугольника, имеем:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).\end{aligned}$$

Задача для самостоятельного решения №1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Второй тип: задачи, в которых доказывается, что некоторая точка делит отрезок в заданном отношении

Пример .

На стороне AC треугольника ABC взята точка M так, что $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$, а на продолжении стороны BC такая точка N что $|\overrightarrow{BN}| = |\overrightarrow{BC}|$. В каком отношении точка P пересечения AB и MN делит каждый из этих отрезков.

Решение:

выполним рисунок (рис. 87), соответствующий условию задачи:

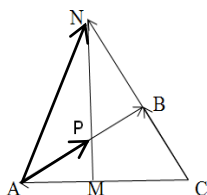


Рисунок 87.

Пусть и $\frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x$, $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = y$.

Выберем базисные векторы $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

Разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базисным двумя различными способами:

$$a) \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = y, \text{ тогда } \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{y}{y+1}, \text{ т.к. векторы } \overrightarrow{AP} \text{ и } \overrightarrow{AB} \text{ сонаправлены,}$$

то

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1} \overrightarrow{AB} = \frac{y}{y+1} (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{y}{y+1} (\vec{a} - \vec{b}).$$

Т.е.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1} \vec{a} - \frac{y}{y+1} \vec{b}.$$

$$б) \frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x, \text{ тогда, } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1} \overrightarrow{AM} + \frac{x}{x+1} \overrightarrow{AN}.$$

$$\text{Но, по условию задачи } |\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{4} |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{4} |\vec{b}|, \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b},$$

поэтому

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1} \left(-\frac{1}{4} \vec{b} \right) + \frac{x}{x+1} (2\vec{a} - \vec{b}).$$

В полученном выражении раскроем скобки, упростим, тогда получим:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2x}{x+1} \vec{a} - \frac{1+4x}{4(x+1)} \vec{b}.$$

Учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{y}{y+1} = \frac{2x}{x+1}, \\ \frac{y}{y+1} = \frac{1+4x}{4(x+1)}. \end{cases}$$

Решая систему любым известным способом (сложением, подстановкой), получим:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, точка P делит отрезок AB в отношении 2:3 и отрезок MN в отношении 1:4.

Задача для самостоятельного решения №2. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты точки соответственно H и M так, что отрезки MH и A_1C параллельны. Найдите

отношение длин этих отрезков (воспользуйтесь предложенным рис. 88).

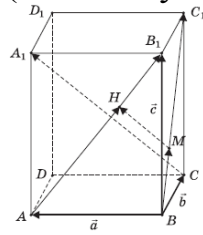


Рисунок 88.

Третий тип: задачи на доказательство принадлежности трех и более точек одной прямой

Пример

Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC четырехугольника $ABCD$, причем $AM:MD=BN:NC=3:4$. Докажите, что середины отрезков AB , MN и CD лежат на одной прямой.

Решение:

выполним рисунок (рис. 89), соответствующий условию задачи

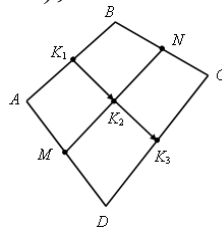


Рисунок 89.

Пусть K_1 — середина AB , K_2 — середина MN , K_3 — середина CD . Используя формулы деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}),$$

$$\overrightarrow{K_1K_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Из условия $AM:MD=BN:NC=3:4$ следует, что

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}.$$

Т.о., векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки K_1 , K_2 и K_3 лежат на одной прямой.

Задача для самостоятельного решения №3. В пространстве расположены отрезки AB и A_1B_1 . Точка M есть середина отрезка AB , точка

M_1 – середина A_1B_1 . Докажите, что середины отрезков AA_1 , BB_1 , и MM_1 расположены на одной прямой.

Контрольные вопросы:

1. Приведите примеры задач, которые целесообразно решать с помощью векторов.
2. Что называется числовой характеристикой проекции вектора на ось?

Домашнее задание: учебник с. 83-87.

Критерии оценки

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой и учебником.

Выявление полноты, прочности усвоения обучающимися теории и умение применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

Учитываются показанные студентами знания и умения. Оценка зависит от наличия и характера погрешностей, допущенных обучающимися. Среди погрешностей выделяются ошибки и недочеты.

Ошибкой считается погрешность, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями и (или) умениями, указанными в программе.

Недочетами считаются погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного

Оценка ответа учащегося при устном и письменном опросах, проводится по пятибалльной системе.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком уровне владения информационными технологиями учащимся, за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные студенту дополнительно после выполнения им основных заданий.

Оценка устных ответов.

"Отлично" - если студент глубоко и прочно усвоил программный материал. Искрывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, не затрудняется с ответом при видоизменении задания, свободно справляется с задачами и практическими заданиями, правильно обосновывает принятые решения, умеет самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок.

"Хорошо" - если твердо студент знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, может правильно применять

теоретические положения и владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических заданий.

"Удовлетворительно" - если студент усвоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении программного материала и испытывает затруднения в выполнении практических заданий. "Неудовлетворительно" - если студент не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические задания, задачи.

Критерии оценки письменных работ:

«5»-Работа должна быть выполнена правильно и в полном объеме , 90-100% выполнения.

«4»-Работа выполнена правильно, но имеются недочеты, процент выполнения 75-89%.

«3»- Работа выполнена правильно, но имеются ошибки, процент выполнения 59-74%.

Литература

- 1) Афанасьев О.Н., Бродский Я.С., Павлов А.Л. Математика для техникумов. – М.: Наука, 1991.
- 2) Афанасьев О.Н. Математика для техникумов. – М., Издательский центр «Академия», 2003.
- 3) Богомолов В.С. Основы высшей математики. – М., Издательский центр «Академия», 2007.
- 4) Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М.: Высшая школа, 2004.
- 5) Колмогоров А.Н., Абрамов А.Н., Дудницын Ю.П. и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.: ил.
- 6) Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш.шк., 1991. – 480 с.: ил.
- 7) Луканкин Г.Л. Высшая математика для экономистов: курс лекций: учебное пособие для вузов / Г.Л. Луканкин, А.Г. Луканкин. – 2-е изд., стереотип. – М.: Издательство «Экзамен», 2009. – 285 с.
- 8) Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1987 – Часть 1.
- 9) Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1987 – Часть 2.
- 10) Математика для техникумов. Геометрия. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1989.
- 11) Математика: Учеб. для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования/Игорь Дмитриевич Пехлецкий. – 2-е изд., стереотип. – М., Издательский центр «Академия», 2003. – 304 с.
- 12) Михеев В.С. Краткий справочник по математике. – Красногорск, 1996.
- 13) Пехлецкий И.Д. Математика – М., Издательский центр «Академия», 2001.
- 14) Подольский В.А. и др. Сборник задач по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М., Издательский центр «Академия», 2004.
- 15) Сергиенко Л.Ю., Самойленко П.И. Планирование учебного процесса по математике: Учеб. – метод. пособие для преподавателей сред. спец. учеб. заведений. – М.: высш. шк., 1987. – 424 с.: ил.
- 16) Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика: учебник для СПО, 2012, <http://www.sprinter.ru/books/matematika-uchebnik-7-e-izd-ster-grigorev-2061370.html>
- 17) <http://festival.1september.ru/articles/538170/>

Министерство сельского хозяйства Ставропольского края

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Методические рекомендации

**ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

ЕН 01 Элементы высшей математики

АННОТАЦИЯ

Данная методическая разработка посвящена актуальной теме организации самостоятельной работы студентов СПО, методам организации, мотивации деятельности студентов, описывается личный опыт. Рассматривается роль самостоятельной работы в обучении высококвалифицированного специалиста. Ключевые слова: внеаудиторная самостоятельная работа студента СПО, условия организации, опыт организации, методические рекомендации.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данная методическая разработка разработана с целью помочь правильно организовать самостоятельную внеаудиторную работу по математике студентов СПО. Она включает в себя методические рекомендации по выполнению различных видов самостоятельной внеаудиторной работы и комплекс самостоятельных работ по основным темам дисциплины «Математика».

Методические указания по организации самостоятельной внеаудиторной работы студентов составлены в соответствии с рабочей программой, разработанной на основе Федерального государственного образовательного стандарта.

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ О САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа по математике – это педагогически управляемый процесс самостоятельной деятельности студентов, обеспечивающий реализацию целей и задач по овладению необходимым объемом знаний, умений и навыков, опыта творческой работы и развитию профессиональных интеллектуально-волевых, нравственных качеств будущего специалиста.

1.1 Цель самостоятельной работы

Целью самостоятельной работы студентов является:

- обеспечение профессиональной подготовки выпускника в соответствии с ФГОС СПО;
- формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС СПО;
- формирование и развитие профессиональных компетенций, соответствующих основным видам профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных знаний и практических умений и навыков студентов;
- углубления и расширения теоретических и практических знаний;
- формирования умений использовать специальную, справочную литературу, Интернет;
- развития познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских знаний.

1.2 Задачи самостоятельной работы

Задачами, реализуемыми в ходе проведения внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся, в образовательной среде являются:

- систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления: способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;
- развитие исследовательских умений.

2 КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

2.1 Формы контроля выполнения самостоятельной работы

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы может осуществляться в пределах аудиторного времени, отведенного на обязательные учебные занятия по данному курсу.

Результативность самостоятельной работы студентов оценивается посредством следующих форм контроля знаний и умений:

- текущего контроля успеваемости, то есть регулярного отслеживания уровня усвоения материала на лекциях, практических занятиях;
- путем проверки рефератов, контрольных работ, домашних, индивидуальных заданий и других видов работ с подведением итогов в течение учебного семестра;
- промежуточной аттестации.

Самостоятельные работы являются важным средством проверки уровня знаний, умений и навыков.

Массовой формой контроля является экзамен.

2.2 Критерии оценивания

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов, рассматриваемой в комплексе с другими составными элементами учебной нагрузки, предусмотренной программой данного курса, являются:

- уровень освоения студентами учебного материала;
- уровень сформированности умений студента использовать теоретические знания при выполнении практических и прикладных задач;
- умение студента использовать теоретические знания при решении задач;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- уровень сформированности умений студента активно использовать печатные и электронные образовательные ресурсы, находить требующуюся информацию, изучать ее и применять на практике;
- уровень сформированности общих и профессиональных компетенций.

Контроль результатов самостоятельной работы обучающихся может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия и самостоятельную работу по дисциплине «Математика» и может проходить в письменной, устной или смешанной форме с предоставлением изделия или продукта творческой деятельности.

В методических рекомендациях предлагается перечень внеаудиторных самостоятельных работ, которые вы должны выполнить в течение учебного года.

При выполнении внеаудиторных самостоятельных работ студент может обращаться к преподавателю для получения консультации.

3.3 Указания к выполнению внеаудиторной самостоятельной работы

Внеаудиторную самостоятельную работу нужно выполнять в отдельной тетради в клетку, чернилами черного или синего цвета. Необходимо оставлять поля шириной 5 клеточек для замечаний преподавателя.

Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».

Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения внеаудиторной самостоятельной работы:

«5» - 100 – 90% правильных ответов

«4» - 89 - 80% правильных ответов

«3» - 79 – 70% правильных ответов

«2» - 69% и менее правильных

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

3.1 Методические рекомендации по составлению конспекта

Внимательно прочитайте текст.

Уточните в справочной литературе непонятные слова.

При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.

Выделите главное, составьте план.

Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.

Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана.

При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами.

Записи следует вести четко, ясно.

Грамотно записывайте цитаты.

Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

Критерии оценки составления опорного конспекта

- соответствие содержания теме;
- правильная структурированность информации;
- наличие логической связи изложенной информации;
- соответствие оформления требованиям;
- аккуратность и грамотность изложения;
- работа сдана в срок.

3.2 Методические рекомендации по самостоятельному решению задач.

При самостоятельном решении поставленных задач нужно обосновывать каждый этап действий, исходя из теоретических положений курса.

Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный.

Полезно до начала решения поставленных задач составить краткий план решения проблемы (задачи).

Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками, инструкциями по выполнению.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом.

Полученный результат следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи.

3.3 Методические рекомендации к написанию реферата

Согласно рабочей программе по дисциплине, на подготовку реферата отводится 2 часа внеаудиторной самостоятельной работы студента.

Одной из основных целей проведения этой формы самостоятельной работы является формирование умений поиска и использования информации; обобщение, систематизация, закрепление и расширение знаний и умений студентов, полученных не только за период изучения данного курса, но и предыдущих ступеней и уровней познания дисциплин математического и общего естественнонаучного цикла.

Студенческий реферат – это творческая работа студента, в которой на основании краткого письменного изложения и оценки различных источников проводится самостоятельное исследование определенной темы, проблемы.

2. Реферат отличаются следующие признаки:

а) реферат не копирует дословно содержание первоисточника, а представляет собой новый вторичный текст, создаваемый в результате систематизации и обобщения материал первоисточника, его аналитико-синтетической переработки («аналитико-синтетическая переработка первичного документа с целью создания вторичного»).

б) будучи вторичным текстом, реферат создается со всеми требованиями, предъявляемыми к связному высказыванию, то есть ему должны быть присущи следующие черты: целостность, связность, структурная упорядоченность и завершенность.

в) в реферат должно быть включено самостоятельное мини-исследование, осуществляемое на материале или художественных текстов, или источников по теории и истории литературы.

Реферат выполняется и сдается студентом в установленные преподавателем сроки.

Оформление реферата должно удовлетворять следующим требованиям:

- работа выполняется печатным способом с использованием компьютера и принтера на одной стороне листа формата А4

- реферат (доклад) должен быть оформлен в MS Word, шрифт текста Times New Roman, 14 пт., интервал 1. В работе не допускается использование шрифта разных гарнитур.

- страницы имеют следующие поля: левое 25 мм, правое - 10 мм, верхнее и нижнее - 20 мм. Абзацный отступ одинаковый по всему тексту и равен 5 знакам.

Структура реферата:

1. Титульный лист (приложение 1).
2. Содержание (приложение 2).
3. Введение.
4. Основная часть реферата.
5. Текст работы (главы, части и т.п.).
6. Заключение.
7. Список используемой литературы (приложение 3).
8. Приложения.

Если возникнут затруднения в процессе работы, обратитесь к преподавателю.

Критерии оценки:

Вы правильно выполнили задание. Работа выполнена аккуратно – 5(отлично).

Вы не смогли выполнить 2-3 элемента. Работа выполнена аккуратно-4(хорошо).

Работа выполнена неаккуратно, технологически неправильно – 3(удовлетворительно).

Все структурные элементы работы начинаются с нового листа.

Заголовки располагаются посередине страницы и указываются прописными буквами без кавычек и точки в конце, выделяются полужирным шрифтом. Переносить слова в заголовке не допускается. Заголовки оглавления должны точно повторять заголовки в тексте.

Иллюстрации, используемые в тексте работы, размещаются после первой ссылки на них и сопровождаются словами «Рисунок», «Таблица», «Схема», «График» и т.п. Все иллюстрации нумеруются сквозной нумерацией арабскими цифрами в порядке упоминания в тексте (для каждого вида иллюстраций своя нумерация).

Приложения должны иметь тематические заголовки и нумеруются арабскими цифрами. Перечень приложений указывается в оглавлении.

Все страницы работы, включая приложения, нумеруются по порядку. Первой страницей считается титульный лист, на нем номер не ставится. Порядковый номер печатается сверху страницы по центру.

Библиографические ссылки в виде подстрочных примечаний оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008. Нумеруются арабскими цифрами в пределах страницы, т.е. с каждой следующей страницы нумерация подстрочных примечаний начинается с цифры «1». Допускается нумеровать в пределах структурных частей работы.

Список источников и литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.1-2003, ГОСТ 7.80-2000, ГОСТ 7.82-2001.

3.4 Методические рекомендации по подготовке доклада

Доклад – публичное сообщение, представляющее собой развёрнутое изложение определённой темы.

Этапы подготовки доклада:

1. Определение цели доклада.
2. Подбор необходимого материала, определяющего содержание доклада.
3. Составление плана доклада, распределение собранного материала в необходимой логической последовательности.
4. Общее знакомство с литературой и выделение среди источников главного.
5. Уточнение плана, отбор материала к каждому пункту плана.
6. Композиционное оформление доклада.
7. Заучивание, запоминание текста доклада, подготовки тезисов выступления.
8. Выступление с докладом.

Композиционное оформление доклада – это его реальная речевая внешняя структура, в ней отражается соотношение частей выступления по их цели, стилистическим особенностям, по объёму, сочетанию рациональных и эмоциональных моментов, как правило, элементами композиции доклада являются: вступление, определение предмета выступления, изложение, заключение.

Вступление помогает обеспечить успех выступления по любой тематике.

Вступление должно содержать:

- название доклада;
- сообщение основной идеи;
- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- интересную для слушателей форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

Выступление состоит из следующих частей:

Основная часть, в которой выступающий должен раскрыть суть темы, обычно строится по принципу отчёта. Задача основной части: представить достаточно данных для того, чтобы слушатели заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами.

Заключение - это чёткое обобщение и краткие выводы по излагаемой теме

3.5 Методические рекомендации по подготовке сообщения

Сообщение – это сокращенная запись информации, в которой должны быть отражены основные положения текста, сопровождающиеся аргументами, 1–2 самыми яркими и в то же время краткими примерами.

Сообщение составляется по нескольким источникам, связанным между собой одной темой. Вначале изучается тот источник, в котором данная тема изложена наиболее полно и на современном уровне научных и практических достижений. Записанное сообщение дополняется материалом других источников.

Этапы подготовки сообщения:

1. Прочитайте текст.
2. Составьте его развернутый план.
3. Подумайте, какие части можно сократить так, чтобы содержание было понято правильно и, главное, не исчезло.
4. Объедините близкие по смыслу части.
5. В каждой части выделите главное и второстепенное, которое может быть сокращено при конспектировании.
6. При записи старайтесь сложные предложения заменить простыми.

Тематическое и смысловое единство сообщения выражается в том, что все его компоненты связаны с темой первоисточника.

Сообщение должно содержать информацию на 3-5 мин. и сопровождаться презентацией, схемами, рисунками, таблицами и т.д.

Критерии оценки подготовки информационного сообщения и доклада:

- актуальность темы;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала;
- грамотность и полнота использования источников;
- наличие элементов наглядности.

3.6 Методические рекомендации по составлению презентаций

Требования к презентации

На первом слайде размещается:

- название презентации;
- автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке);
- год.

На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).

На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Оформление слайдов

Стиль

- необходимо соблюдать единый стиль оформления;
- нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации;
- вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки)

Фон

- для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)

Использование цвета

- на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста;
- для фона и текста используются контрастные цвета;
- особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)

Анимационные эффекты

- нужно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде;
- не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации

Содержание информации

- следует использовать короткие слова и предложения;
- времена глаголов должно быть везде одинаковым;
- следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных;
- заголовки должны привлекать внимание аудитории

Расположение информации на странице

- предпочтительно горизонтальное расположение информации;
- наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана;
- если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней

Шрифты

- для заголовков не менее 24;
- для остальной информации не менее 18;
- шрифты без засечек легче читать с большого расстояния;
- нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации;
- для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа;

- нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).

Способы выделения информации

Следует использовать:

- рамки, границы, заливку
- разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки
- рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов

Объем информации

- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут одновременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений.

- наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.

Виды слайдов

Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

Критерии оценки презентации

Содержание оценки

1. Содержательный критерий

правильный выбор темы, знание предмета и свободное владение текстом, грамотное использование научной терминологии, импровизация, речевой этикет

2. Логический критерий

стройное логико-композиционное построение речи, доказательность, аргументированность

3. Речевой критерий

использование языковых (метафоры, фразеологизмы, пословицы, поговорки и т.д.) и неязыковых (поза, манеры и пр.) средств выразительности; фонетическая организация речи, правильность ударения, четкая дикция, логические ударения и пр.

4. Психологический критерий

взаимодействие с аудиторией (прямая и обратная связь), знание и учет законов восприятия речи, использование различных приемов привлечения и активизации внимания

5. Критерий соблюдения дизайн - требований к компьютерной презентации

соблюдены требования к первому и последним слайдам, прослеживается обоснованная последовательность слайдов и информации на слайдах, необходимое и достаточное количество фото- и видеоматериалов, учет особенностей восприятия графической (иллюстративной) информации, корректное сочетание фона и графики, дизайн презентации не противоречит ее содержанию, грамотное соотнесение устного выступления и компьютерного сопровождения, общее впечатление от мультимедийной презентации

Примерная тематика рефератов, сообщений, докладов, презентаций.

1. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях
2. Применение сложных процентов в экономических расчетах.
3. Исторический обзор развития теории пределов.
4. Средние значения и их применение в статистике.
5. Понятие дифференциала и его приложения.
6. Истоки математических знаний. Математика в догреческих цивилизациях.
7. Математика Древней Греции. Источники.
8. Математика в древнем и средневековом Китае.
9. Математика в древней и средневековой Индии.
10. История развития понятия «функция».
11. Реформа математического анализа.
12. Старинные задачи и способы их решения.
13. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики.
14. Функциональные зависимости в реальных процессах и явлениях.
15. Биографии и открытия ученых – математиков.
16. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса
17. Комплексные числа - расширение понятия числа,
18. Показательная форма комплексного числа и ее применение в технике
19. История возникновения и развития теории вероятностей
20. Случайные величины

Тема: Матрицы и определители

Самостоятельная работа № 1.

Сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу, транспонирование матриц, нахождение обратных матриц и определителей матриц.

Цель: Закрепить умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц

Методические рекомендации

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k , необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц* A, B одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 1. Найти $2A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу A на число «2», затем матрицу B на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Произведение AB можно определить только для матриц A размера $m \times n$ и B размера $n \times p$, при этом $AB = C$, матрица C имеет размер $m \times p$, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B : $c_{ij} = A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, p$). Фактически необходимо каждую строку матрицы A (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы B (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы A 3×2 , матрицы B 2×2 . Поэтому произведение AB найти можно, произведение BA – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2,4) \\ (0;4)(1,3) & (0;4)(-2,4) \\ (2;1)(1,3) & (2;1)(-2,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице A размера $m \times n$, называется матрица A^T размера $n \times m$, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант 11

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 13

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант 14

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант 15

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 16

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 17

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант 18

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 19

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 20

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$б) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Вариант 21

Задание 1. Вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$б) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 22

Задание 1. Вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$б) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 23

Задание 1. Вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$a) \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$б) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант 24

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вариант 25

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 26

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант 27

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 28

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 29

Задание 1. Вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

Задание 2. Умножить матрицы:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- если $\Delta \neq 0$, то система совместна и единственное решение системы выражается формулами Крамера;
- если $\Delta = 0$ и все $\Delta_{x_j} = 0$, то система совместна и имеет множество решений; тогда свободные $(n-r)$ неизвестных (где r – ранг матрицы) выбирается произвольно, а главные (базисные) r неизвестных определяются единственным образом через свободные неизвестные;

- если $\Delta = 0$ и хотя бы один $\Delta_{x_j} \neq 0$, то система несовместна и решений не имеет.

1. Установить, что система имеет единственное решение, найти его.

$$\begin{cases} x + y - z = 36 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7. \end{cases}$$

Решение: Найдём определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta \neq 0, \text{ следовательно, система имеет единственное}$$

решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 36 & 1 & -1 \\ 13 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 + 7 - 13 - 7 - 36 - 13 = -98,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 36 & -1 \\ 1 & 13 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 13 - 36 - 7 - 13 - 7 - 36 = -86,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & 13 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 36 - 13 - 36 - 13 - 7 = -40,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta};$$

$$x = \frac{98}{4} = 24,5; \quad y = \frac{86}{4} = 21,5; \quad z = \frac{40}{4} = 10.$$

$$\text{Проверка: } \begin{cases} 24,5 + 21,5 - 10 = 36 \\ 24,5 - 21,5 + 10 = 13 \\ -24,5 + 21,5 + 10 = 7. \end{cases}$$

Ответ: (24,5; 21,5; 10)

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Пример . Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ -x + 4y + z = 3 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$$

Вариант 2

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$$

Вариант 3

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \end{array}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 3 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases} \end{array}$$

Вариант 4

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases} \end{array}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases} \end{array}$$

Вариант 5

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} 3x - 2z = 11 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases} \end{array}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases} \end{array}$$

Вариант 6

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5; \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases} \end{array}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0; \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 4z = 2 \\ 11x - 12y + 17z = 3 \end{cases} \end{array}$$

Вариант 7

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4; \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases} \end{array}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x + 2y - 6z = 5 \\ 2x - y + 3z = -7; \\ 5x + 5y - 15z = 8 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases} \end{array}$$

Вариант 8

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1; \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases} \end{array}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3; \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - 3z = 13 \\ 3x - 2y + 4z = -15 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases} \end{array}$$

Вариант 9

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - z = 1; \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y - 3z = 13 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = -15 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

Вариант 10

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5; \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - 6z = -1; \\ -x + 5y - 15z = 8 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 5x - 7y + 8z = 1 \end{cases}$$

Вариант 11

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5; \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 2; \\ 5x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 11y + 4z = 13 \\ 2x - 10y + 5z = 1 \end{cases}$$

Вариант 12

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5; \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5; \\ 2x - y + 5z = 12 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - y - z = -6 \\ 3x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Вариант 13

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3; \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 2x - y - 3z = 4 \\ 3x + y - 5z = 1 \end{cases}$$

Вариант 14

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3; \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ 4x + y + 3z = 9 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ 7x + 6y + 5z = 5; \\ 5x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 7y + 5z = 1 \\ 3x - 8y + 8z = 5 \end{cases}$$

Вариант 15

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2; \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y + 5z = 12 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 3x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Вариант 16

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 2x - y - 2z = -4 \\ 3x + y - 4z = 1 \end{cases}$$

Вариант 17

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ -x + 4y + z = 3 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$$

Вариант 18

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + 6y + 9z = 2 \end{cases}$$

Вариант 19

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \end{array}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 3 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases} \end{array}$$

Вариант 20

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases} \end{array}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 5x + y - z = 7 \end{cases} \end{array}$$

Вариант 21

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} 3x - 2z = 11 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases} \end{array}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases} ; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases} \end{array}$$

Вариант 22

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5; \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0; \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 4z = 2 \\ 11x - 12y + 17z = 3 \end{cases}$$

Вариант 23

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4; \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - 6z = 5 \\ 2x - y + 3z = -7; \\ 5x + 5y - 15z = 8 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

Вариант 24

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1; \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3; \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases}$$

Вариант 25

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2; \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases}$$

Вариант 26

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - 6z = -1 \\ -x + 5y - 15z = 8 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 5x - 7y + 8z = 1 \end{cases}$$

Вариант 27

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 4 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 11y + 4z = 13 \\ 2x - 10y + 5z = 1 \end{cases}$$

Вариант 28

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$a) \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y + 5z = 12 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - y - z = -6 \\ 3x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Вариант 29

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ 2x - y - 3z = 4 \\ 3x + y - 5z = 1 \end{cases}$$

Тема: Моделирование и решение задач линейного программирования
Самостоятельная работа № 3.

Графический метод решения задачи линейного программирования

Цель: закрепить умения решать задачи линейного программирования графическим методом.

Методические рекомендации

Геометрический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными:

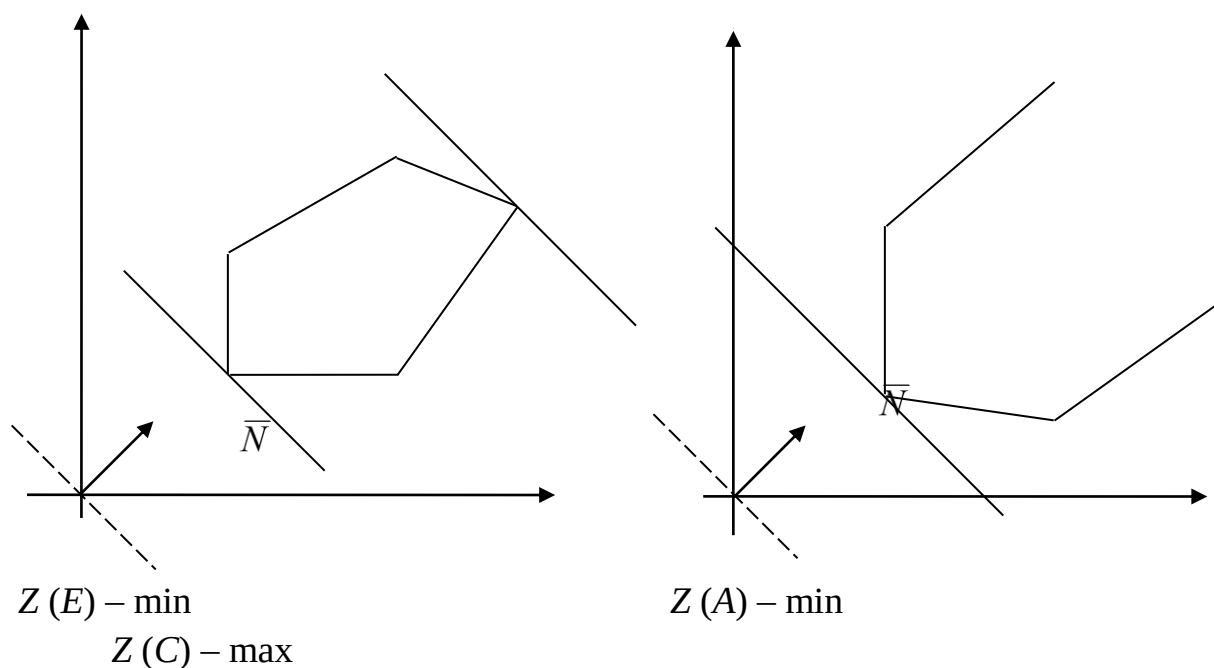
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases}$$
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min)$$

К такой форме может быть сведена количественная задача с ограничениями в виде уравнений, когда число переменных $n >$ числа уравнений m на два, т. е. $n - m = 2$.

О₁. Множество допустимых решений задач линейного программирования представляют собой выпуклый многоугольник (или выпуклую многогранную область), а оптимальное решение задачи находится по крайней мере в одной из угловых точек этого многоугольника решений.

Значит, задачу линейного программирования можно сформулировать так:

Среди всех точек области D найти ту, которая обращает в максимальную или минимальную целевую функцию Z .



1. Вектор $\bar{N} = (c_1; c_2)$ – нормальный вектор. Он показывает направление возрастания функции Z .

2. Приравняем значение Z к какой-нибудь постоянной C

$$c_1x_1 + c_2x_2 = c \quad (c = 0)$$

$$l_0: c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$

Давая C различные числовые значения, будем получать прямые параллельные l_0 и перпендикулярные вектору $\bar{N}$. Значит, уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ определяет на плоскости семейство параллельных прямых.

1. Решением задачи на минимум является первая точка, в которой прямая l встречается с областью D при перемещении прямой l_0 в положительном направлении вектора $\bar{N}$.

$Z(E) - \min$ для первого случая

$Z(A) - \min$ для второго случая

2. Решением задачи на максимум является последняя точка, в которой прямая l встречается с областью D .

$Z(C) - \max$ для первого случая

Во втором случае задача на $\max$ решений не имеет, т.к. Z не ограничена сверху.

Аналогично может быть не ограничено снизу, тогда на минимум задача решений не имеет.

Замечание.

1. Если прямая l при перемещении совпадает с отрезком BC , то все точки этого отрезка дают решение задачи на максимум (l параллельна BC). Следовательно, решений на максимуме бесчисленное множество.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Задания для самостоятельного решения

1. Построить на плоскости область допустимых решений задачи и геометрически найти максимум или минимум функции цели.

Вариант №1 $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 97; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ x_1 + 7x_2 \geq 77 \end{cases}$ $Z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$	Вариант №2 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19 \end{cases}$ $Z = x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$
Вариант №3 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 53 \\ x_1 - x_2 \leq 3; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 71 \end{cases}$ $Z = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$	Вариант №4 $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq 17 \\ x_1 + 2x_2 \leq 34; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 17 \end{cases}$ $Z = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$
Вариант №5 $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ x_1 + 4x_2 \geq 26 \end{cases}$ $Z = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$	Вариант №6 $\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \geq 24 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 110; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 15 \end{cases}$ $Z = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$
Вариант №7 $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29 \\ 3x_1 - x_2 \leq 14; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38 \end{cases}$ $Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$	Вариант №8 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 - 3x_2 \leq 37; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20 \end{cases}$ $Z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$
Вариант №9	Вариант №10

$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 57 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 53; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 15 \end{cases}$ $Z = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max$	$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \leq 157; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -3x_1 + 11x_2 \geq 16 \end{cases}$ $Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min$
Вариант №11 $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 97; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ x_1 + 7x_2 \geq 77 \end{cases}$ $Z = 7x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$	Вариант №12 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19 \end{cases}$ $Z = 6x_1 + x_2 \rightarrow \max$
Вариант №13 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 53 \\ x_1 - x_2 \leq 3; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 71 \end{cases}$ $Z = x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$	Вариант №14 $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq 17 \\ x_1 + 2x_2 \leq 34; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 17 \end{cases}$ $Z = x_1 + 9x_2 \rightarrow \min$
Вариант №15 $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ x_1 + 4x_2 \geq 26 \end{cases}$ $Z = x_1 + 8x_2 \rightarrow \min$	Вариант №16 $\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \geq 24 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 110; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -2x_1 + 4x_2 \geq 15 \end{cases}$ $Z = x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$
Вариант №17 $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29 \\ 3x_1 - x_2 \leq 14; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38 \end{cases}$ $Z = 4x_1 + x_2 \rightarrow \min$	Вариант №18 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 37; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20 \end{cases}$ $Z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$
Вариант №19 $\begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 57 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 53; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 6x_1 - 7x_2 \geq 15 \end{cases}$ $Z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$	Вариант №20 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \leq 157; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -3x_1 + 11x_2 \geq 16 \end{cases}$ $Z = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$
Вариант №21 $\begin{cases} 2x_2 \leq 5 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 89; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 8x_1 - 6x_2 \geq 69 \end{cases}$ $Z = 7x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$	Вариант №22 $\begin{cases} 5x_1 - x_2 \leq 51 \\ 2x_2 \leq 1; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 10x_1 + 4x_2 \geq 69 \end{cases}$ $Z = 11x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$
Вариант №23	Вариант №24

$\begin{cases} 11x_1 - 17x_2 \leq 66 \\ -x_1 + 11x_2 \leq 14 ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 5x_1 - 3x_2 \geq 14 \end{cases}$ $Z = 13x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$	$\begin{cases} 8x_1 + 14x_2 \geq 14 \\ 13x_1 + 5x_2 \leq 100 ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 5x_1 - 9x_2 \geq 5 \end{cases}$ $Z = 11x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$
Вариант №25 $\begin{cases} x_1 - 9x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 3 ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 27 \end{cases}$ $Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min$	Вариант №26 $\begin{cases} 9x_1 + 11x_2 \geq 48 \\ 5x_1 - x_2 \leq 44 ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ -x_1 + 13x_2 \leq 6 \end{cases}$ $Z = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$
Вариант №27 $\begin{cases} 2x_2 \leq 6 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 90 ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 8x_1 - 6x_2 \geq 60 \end{cases}$ $Z = 9x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$	Вариант №28 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ 5x_1 - x_2 \leq 46 ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15 \end{cases}$ $Z = 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$
Вариант №29 $\begin{cases} x_1 + 11x_2 \geq 11 \\ 3x_1 - x_2 \leq 28 ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 5x_1 - 13x_2 \geq 11 \end{cases}$ $Z = 8x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$	Вариант №30 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 4x_1 - 2x_2 \leq 35 ; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \\ 5x_1 - 13x_2 \leq 18 \end{cases}$ $Z = 7x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Тема: Интеграл и его применение

Самостоятельная работа № 4.

Интегральное исчисление функций одной вещественной переменной

Цель: закрепить знания, умения и навыки интегрирования функций

Методические рекомендации

Первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется функция $F(x)$, производная которой в каждой точке отрезка равна $f(x)$, т.е:

$$F'(x) = f(x)$$

Теорема. *Две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$, определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

Прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ все возможные постоянные значения C , можно получить все первообразные для данной

функции $f(x)$, т.е. $F(x) + C$ - это есть совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от этой функции и обозначается: $\int f(x) dx = F(x) + C$, где

$f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x) dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$; C - постоянная интегрирования;

x - переменная интегрирования; $\int$ - знак интеграла.

Действие нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется **интегрированием** данной функции.

Основные свойства неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x)$$

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$

На этом свойстве основывается проверка правильности нахождения неопределенного интеграла.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого:

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int A \cdot f(x) dx = A \int f(x) dx, \quad A \neq 0$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

6. Свойство *инвариантности*: всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо x любой дифференцируемой функции от x .

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\boxed{\int f(u) du = F(u) + C}$. На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C$	11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
5. $\int e^u du = e^u + C$	15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
6. $\int \cos u du = \sin u + C$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$	17. $\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C$
8. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$
9. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$	
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	

Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C$$

$$(\ln |\sin u| + C)' = \frac{(\sin u)'}{\sin u} = \frac{\cos u}{\sin u} = \operatorname{ctg} u$$

Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

Непосредственное интегрирование функций

1. Интегрирование по таблице.

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

2. Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

3. Непосредственное интегрирование.

- Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ если } u = \varphi(x), \text{ то } \int f(u) du = F(u) + C$$

Интегрирование методом подстановки

Пусть $\int f(x) dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$$\boxed{\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix}}, \text{ т.е.}$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) \cdot d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной x . Такой способ нахождения интеграла называется **методом замены переменной** или **методом подстановки**.

Задача нахождения неопределённых интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов. Этого можно достичь путём алгебраических тождественных преобразований подынтегральной функции или подведения части её множителей под знак дифференциала.

Подведение множителя под знак дифференциала

$dx = d(x + b), b - \text{const}$	$\sin x dx = -d(\cos x)$
$dx = \frac{1}{a} d(ax), a \neq 0$	$\cos x dx = d(\sin x)$
$dx = \frac{1}{a} d(ax + b), a \neq 0$	$\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$
$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$	$\sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x$
$x dx = \frac{1}{2} d(x^2 + b)$	$\cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$

Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

Основные типы интегралов, «берущихся» по частям

интеграл		u	dv
I	$\int p(x) \cdot e^{\alpha x} dx$	$p(x)$	$e^{\alpha x} dx$
	$\int p(x) \cdot \sin \alpha x dx$	$p(x)$	$\sin \alpha x dx$
	$\int p(x) \cdot \cos \beta x dx$	$p(x)$	$\cos \beta x dx$
II	$\int p(x) \cdot \ln x dx$	$\ln x$	$p(x) dx$
	$\int p(x) \cdot \arcsin x dx$	$\arcsin x$	$p(x) dx$
	$\int p(x) \cdot \arccos x dx$	$\arccos x$	$p(x) dx$
III	$\int e^{\alpha x} \cdot \sin \alpha x dx$	$e^{\alpha x}$	$\sin \alpha x dx$
		$\sin \alpha x$	$e^{\alpha x} dx$
	$\int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x dx$	$e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x} dx$
		$\cos \beta x$	$\cos \beta x dx$
	$\int \sin(\ln x) dx$	$\sin(\ln x)$	dx

Замечания:

1. Интегралы 1-го типа берутся **n**-кратным интегрированием, если $P(x)$ - многочлен **n**-й степени.
2. Под знаком интегралов 2-го типа стоят функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\ln x$, от которых интеграл не существует.
3. Интегралы 3-го типа берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Задания для самостоятельного решения

Выполнить тест

Тест

1 Чему равно значение интеграла $\int \frac{x dx}{1+x^2}$:

- 1: $\ln(1+x^2)+C$; 2: $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 3: $\arctg x+C$.

2 Первообразная функции $y(x) = \frac{1}{x^2} - 4 \sin x$ равна:

1: $4 \cos x - \frac{1}{x} + c$; 2: $4 \cos x + \frac{1}{x} + c$; 3: $4 \cos x - \frac{1}{2x} + c$.

3 Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если в любой точке интервала (a, b) функция $F(x)$ дифференцируема и:

1: $F''(x) = f(x)$ 2: $F'(x) = 0$; 3: $F'(x) = f(x)$.

4 Отметить правильный ответ. Формула интегрирования по частям:

1: $\int u dv = uv - \int v du$; 2: $\int u dv = uv - \int u dv$; 3: $\int u dv = v^2 - \int v du$.

5 Отметить правильный ответ. Отыскание неопределенного интеграла называется

1: дифференцированием; 2: интегрированием; 3: логарифмированием.

6 Отметить правильный ответ. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется :

1: совокупность всех первообразных; 2: сумма функций $f(x) + f^2(x)$;
3: производная функции $f(x)$; 4: выражение $f(x)dx$.

7 Чему равен интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$:

1: $\ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$; 2: $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$; 3: $\ln|x-a| + \ln|x+a| + c$; 4: $\ln|x^2 - a^2| + C$.

8 Чему равен интеграл $\int x\sqrt{x} dx$:

1: $\frac{x^3}{3} + C$; 2: $2\sqrt{x} + C$; 3: $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$; 4: $x^{\frac{3}{2}} + C$.

9 Дополнить формулировку:

У всякой непрерывной на данной интервале функции существует ...

1: точка разрыва; 2: неопределенный интеграл; 3: вертикальная асимптота графика функции.

10 Дополнить формулировку:

Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен ...

1: подынтегральному выражению; 2: самой функции; 3: производной функции; 4: натуральному логарифму функции.

11 Универсальная тригонометрическая подстановка:

1: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 2: $t = \cos x$; 3: $t = \cos \frac{x}{2}$; 4: $t = \sin \frac{x}{2}$; 5: $t = \arccos x$.

12 Чему равен интеграл $\int (7x-1)^{23} dx$:

1: $(7x-1)^{23}$; 2: $(7x-1)^{23} + C$; 3: $\frac{(7x-1)^{24}}{168} + C$; 4: $\frac{(7x-1)^{24}}{168}$.

13 Чему равен интеграл $\int x^2 \cdot \sin(x^3+1) dx$:

1: $-\frac{1}{3} \cos(x^3+1)$; 2: $-\frac{1}{3} \cos(x^3+1) + C$; 3: $\cos(x^3+1) + C$; 4: $3 \cos(x^3+1) + C$;
5: $-3 \cos(x^3+1) + C$.

14 Чему равен интеграл $\int 2x dx$:

1: $x^2 + C$; 2: x^2 ; 3: $\frac{x^3}{9} + C$; 4: $2x^2 + C$; 5: $-x^2 + C$;

15 Дополнить формулировку:

С точки зрения геометрической, неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, каждая из которых получается путем перемещения кривой $y = F(x)$...

1: параллельно самой себе вдоль оси ОУ; 2: параллельно самой себе вдоль оси ОХ; 3: симметрично относительно начала координат.

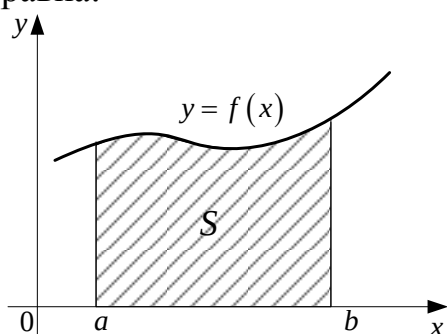
Самостоятельная работа №5

Вычисление площади плоской фигуры, длины кривой, объёма и площади тел вращения

Цель: закрепить знания, умения и навыки нахождения площади криволинейной трапеции с помощью интеграла.

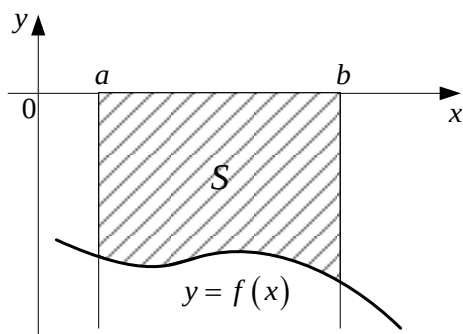
Методические рекомендации

1. Если на $[a;b]$ функция $f(x) \geq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a; x = b$ равна:



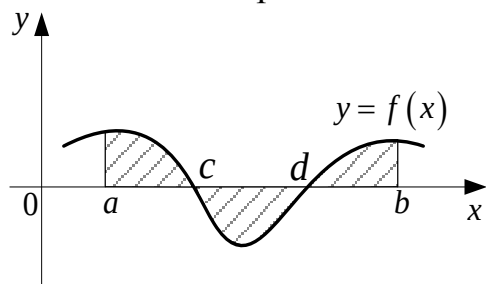
$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

2. Если на $[a;b]$ функция $f(x) \leq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a; x = b$, равна:



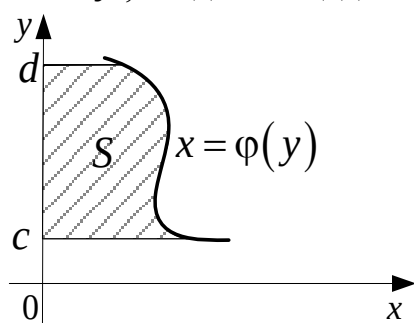
$$S = -\int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

3. Если функция $f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a;b]$, то интеграл по всему отрезку $[a;b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам. Площадь такой криволинейной трапеции соответственно равна:



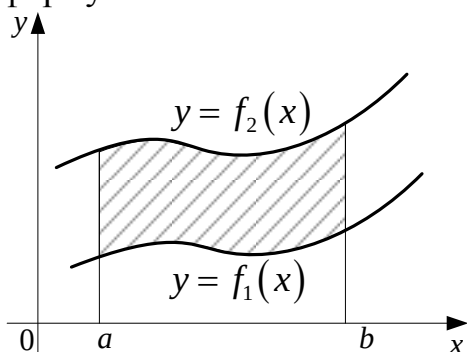
$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

4. Если основанием криволинейной трапеции является отрезок $[c; d]$ оси Oy , тогда площадь такой фигуры равна:



$$S = \int_c^d \varphi(y) dy \quad (3)$$

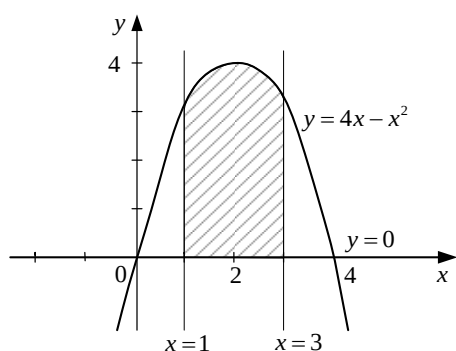
5. Пусть на отрезке $[a; b]$ заданы непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f_2(x) \geq f_1(x)$. Тогда площадь фигуры, заключённой между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на отрезке $[a; b]$, вычисляется по формуле:



$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (4)$$

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$; $x = 1$; $x = 3$ и осью Ox .

Решение:



Воспользуемся формулой $S = \int_a^b f(x) dx$,

тогда $a = 1$; $b = 3$; $f(x) = 4x - x^2$, следовательно,

$$S = \int_1^3 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = 18 - 9 - 2 + \frac{1}{3} = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Задания для решения в аудитории

Вариант 1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3$.
2. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$ и $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Вариант 2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 6x - x^2$ и $y = 0$.
2. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x$; $x = 0$; $y = 4$.

Вариант 3

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$.

Вариант 4

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$.

Вариант 5

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 1 - 2x$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 6

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^3$ и $y = 2x$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

Вариант 7

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^2 + 4$ и осью OY .

Вариант 8

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $y = 0$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $y = 2$.

Вариант 9

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = x$ и $x - y = 2$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

Вариант 10

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4x - x^2$ и осью OX .
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 3$; $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$.

Вариант 11

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 - 2$ и $y = 4 + x$.
2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}$; $y = 3$; $x = 12$; $y = 0$.

Вариант 12

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = 1 - x$; $x = -3$ и осью OX .
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$; $x = -2$; $x = 0$; $y = 0$.

Вариант 13

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 4$; $x = -2$; $x = 2$; $y = 0$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{4} - 1$; $y = 0$.

Вариант 14

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x$; $y + x = 5$; $x = 0$; $x = 1$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$; $y = 4$.

Вариант 15

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 1$; $y = 3 - x$.
2. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.

Вариант 16

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 6x - x^2$; $y = 0$
2. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x$; $x = 0$; $y = 4$.

Вариант 17

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \ln x$; $y = 0$; $x = e$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$; $x = 0$; $x = \pi$.

Вариант 18

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x$; $y = 2$; $x = 0$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$; $y = 2$; $x = 0$.

Вариант 19

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$; $y = 1 - 2x$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 20

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^3$; $x = 2x$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$; $x = 2$; $y = 0$.

Вариант 21

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \sqrt{x}$; $x + y = 2$; $y = 0$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^2 + 4$ и осью OY .

Вариант 22

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \frac{1}{x}$; $x = 1$; $x = e$; $y = 0$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}$; $y = 1$; $y = 2$.

Вариант 23

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = x$; $x - y = 2$

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x}$; $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$.

Вариант 24

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4x - x^2$ и осью OX .
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}$; $x = 3$; $x = 12$; $y = 0$.

Вариант 25

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 - 2$; $y = 4 + x$.
2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 3$; $x = 0$; $x = 2$.

Вариант 26

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = 1 - x$; $x = -3$
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$; $x = 0$; $x = -2$; $y = 0$.

Вариант 27

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 4$; $x = -2$; $x = 2$; $y = 0$.
2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{4} - 1$; $y = 0$

Вариант 28

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x$; $x + y = 5$; $x = 0$; $x = 1$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$; $y = 4$.

Вариант 29

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 1$; $x + y = 3$.
2. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.

Тема: Дифференциальные уравнения
Самостоятельная работа № 6.

Решение дифференциальных уравнений первого порядка и первой степени, уравнений с разделяющимися переменными, а также однородных дифференциальных уравнений

Цель: закрепить знания, умения решения дифференциальных уравнений.

Методические рекомендации

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } y' = f(x, y)$$

где y - неизвестная функция; x - независимая переменная.

Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка имеет вид $\varphi(x, C) = 0$ или $\Phi(x, y, c) = 0$ - соответственно. Для получения частного решения (частного интеграла), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x) = y_0$, надо найти соответствующее значение $C = C_0$, подставляя в общее решение (общий интеграл) значения x_0 и y_0 . Будем иметь $y = \varphi(x, C_0)$ или $\Phi(x, y, c) = 0$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (1)$$

Поделив обе части уравнения (I) на $N_1(y)M_2(x)$ получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 \quad (2)$$

в котором переменные разделены. Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

Однородные уравнения I порядка

Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - однородные функции одного измерения. Функция $F(x, y)$ называется однородной измерения m , если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Оно приводится к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Где $f\left(\frac{y}{x}\right)$ - однородная функция нулевой степени однородности. Однородное уравнение с помощью подстановки $\left(\frac{y}{x}\right) = u$ или $y = ux$, $(y' = u'v + uv')$, приводится к уравнению с

разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции u . При этом $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$, или $dy = xdu + udx$.

Интегрируя получившееся уравнение с разделяющимися переменными, и, заменяя затем $u = \left(\frac{y}{x}\right)$, находим искомое общее решение (общий интеграл) данного однородного уравнения.

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y' = (y+1)\operatorname{ctg} x$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx и разделим на множитель $(y+1)$. Получим уравнение с разделенными переменными: $\frac{dy}{y+1} = \operatorname{ctg} x dx$.

Интегрируя обе части уравнения и беря произвольную постоянную в виде $\ln C$, получим $\ln|y+1| = \ln|\sin x| + \ln C$.

Потенцируя, находим общее решение: $y = C \sin x - 1$.

Найдем значение C , соответствующее начальным условиям: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $2 = C \sin \frac{\pi}{2} - 1$, откуда $C = 3$. Подставим $C = 3$ в формулу общего решения. Получим, $y = 3 \sin x - 1$ есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

Решение. Здесь $P = x^2 + 2xy$, $Q = xy$. Функции однородные второго измерения. Введем подставку $y = ux$, тогда $dy = xdu + udx$.

Данное уравнение примет вид: $(x^2 + 2x^2u)dx + ux^2(xdu + udx) = 0$, или $(x^2 + 2x^2u + u^2x^2)dx + ux^3du = 0$.

Разделяя переменные и интегрируя, имеем: $\frac{dx}{x} + \frac{udu}{(u+1)^2} = 0$,

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{udu}{(u+1)^2} = C, \quad \ln|x| + \int \frac{u+1-1}{(u+1)^2} du = C, \quad \ln|x| + \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = C.$$

Возвращаясь к прежней неизвестной функции y заменой " u " на $\frac{y}{x}$,

получаем $\ln|x| + \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = C$, $\ln\left|x\left(\frac{y}{x} + 1\right)\right| + \frac{x}{x+y} = C$.

Задания для решения в аудитории

№ 1 1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ 2. $y' = y \operatorname{tg} x + \cos x$	№ 2 1. $xyy' = 1 - x^2$ 2. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$	№ 3 1. $y' \operatorname{tg} x - y = 0$ 2. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$
№ 4 1. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ 2. $xy' + y - e^x = 0$	№ 5 1. $yy' = \frac{1-2x}{y}$ 2. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$	№ 6 1. $xy' + y = y^2$ 2. $y' - y \frac{2x-1}{x^2} = 1$
№ 7 1. $x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0$ 2. $xy' + y = xy^2 \ln x$	№ 8 1. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}$ 2. $(1 - x^2)y' + xy = x$	№ 9 1. $y' \sin x = y \ln y$ 2. $y' + y = \frac{e^{-x}}{1-x}$
№ 10 1. $(1 + y')e^y = 1$ 2. $y' + y \cos x = \cos x$	№ 11 1. $y' = 2xy^3 - 2xy$ 2. $x^2y^2y' + xy^3 = 1$	№ 12 1. $(3x - 1)dy + y^2dx = 0$ 2. $xy' - y = -3y^2$
№ 13 1. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ 2. $x^3y' - x^2y = -y^3$	№ 14 1. $xy' + 2y = 2xyy'$ 2. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$	№ 15 1. $3x^2ydx + 2\sqrt{4-x^3}dy = 0$ 2. $y' + \frac{y}{x} = xe^{x/2}$
№ 16 1. $\sqrt[3]{1-2x^3+x^6}dy = x^2y^2dx$ 2. $y' - 2y = e^{2x}$	№ 17 1. $e^{x+y}dx + ydy = 0$ 2. $y' = x^2 + y$	№ 18 1. $y'e^{-x} = x - 1$ 2. $y' - 2xy = x^3$
№ 19 1. $xy + 2y = xy \frac{dy}{dx}$ 2. $y' + \frac{6xy}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^4}$	№ 20 1. $e^{x-y}dx - \frac{1}{x}dy = 0$ 2. $y' - \frac{2y}{x+5} = (x+5)^3$	№ 21 1. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$ 2. $y' + \frac{(1-4x)y}{x^2} = 3$
№ 22 1. $(x - xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0$	№ 23 1. $y' \operatorname{tg} x - y = 5$ 2. $y' = x + y$	№ 24 1. $\sin y \cdot \cos x \cdot y' = \cos y \cdot \sin x$

2. $xy' + 2y = x^2$		2. $xy' = x^3 + y$
№ 25 1. $y' \sin x = y \ln y$ 2. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$	№ 26 1. $x + xy + yy'(1 + x) = 0$ 2. $y' + \frac{y}{x} = x^2$	№ 27 1. $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2 y)dy = 0$ 2. $xy' + y = xy^2 \ln x$
№ 28 1. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}$ 2. $(1 - x^2)y' + xy = x$	№ 29 1. $y' = \frac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}$ 2. $y' = -\frac{y}{x} - xy^2$	№ 30 1. $(1 + y')e^y = 1$ 2. $y' + y \cos x = \cos x \cdot \sin x$