СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Утверждаю
Проректор по среднему
профессиональному образованию
__________ Ряховская О.С.
«__» __________ 20__ г.

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА «ПРОФЕССИОНАЛИТЕТ»

Уровень профессионального образования
Среднее профессиональное образование

Образовательная программа
Подготовки специалистов среднего звена

Специальность
09.02.07 Информационные системы и программирование

На базе основного общего образования

Квалификация выпускника
Специалист по информационным системам

Одобрено на заседании педагогического совета: протокол № 5 от «28» марта 2025 г.

2025 год

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

Методические указания к занятиям

по учебной дисциплине ЕН. 01 Элементы высшей математики

Методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины ЕН. 01 «Элементы высшей математики». В методических указаниях приведена структура и содержание занятий, предусмотренных рабочей программой дисциплины.

Разработчик: Мелешко С.В., преподаватель

учебно-методического отдела ________

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания предназначены для студентов и служат пособием при работе на занятиях, предусмотренных рабочими учебными планами специальности, запланированных в рабочих программах.

Содержание и объем занятий по дисциплине соответствует требованиям ФГОС СПО, реализуемого в пределах ППССЗ с учетом профиля профессионального образования.

Практические задания направлены на подтверждение теоретических положений и формирование учебных умений, они составляют важную часть теоретической подготовки по освоению дисциплины.

В данных методических указаниях приведены тема, цель, сведения из теории, практико-ориентированные задания, вопросы для закрепления, задания для самостоятельного решения, домашнее задание.

Занятие 1

Тема: Решение задач с комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексного числа.

Цель: Научиться изображать комплексные числа на плоскости и выполнять действия над ними

1.Сведения из теории:

Определение1. Комплексным числом ***z*** называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1; \quad i = \sqrt{-1}.$

При этом число a называется *действительной частью* числа z ($a = Re\, z$), а b- *мнимой частью* ($b = Im\, z$).

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

Определение2. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются *комплексно сопряженными.*

Определение3. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2;$

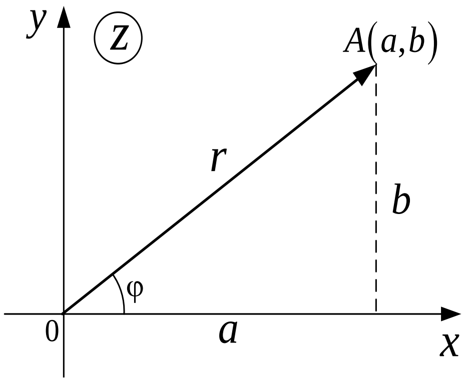
Определение4. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$a = b = 0.$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Известно, что отрицательные числа были введены в связи с решением линейных уравнений с одной переменной. В конкретных задачах отрицательный ответ истолковывался как значение направленной величины (положительные и отрицательные температуры, передвижения в противоположных направлениях, прибыль и долг и т.п.). Однако еще в XVI веке многие математики не признавали отрицательных чисел. Только с введением координатной прямой и координатной плоскости отчетливо проявился смысл отрицательных чисел, и они стали такими же «равноправными» и понятными, как и натуральные числа. Аналогично обстоит дело с комплексными числами. Смысл их отчетливо проявляется при введении их геометрической интерпретации.

Всякое комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить на плоскости $0xy$



в виде точки $A(a,b)$ с координатами a и b. Плоскость на которой изображаются комплексные числа, называется ***плоскостью комплексного переменного*** z (на плоскости ставить символ z). Ось $0y$ называют мнимой осью, а ось $0x$ действительной осью.

Соединив точку $A(a,b)$ с началом координат, получим вектор $\overline{OA}$. В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением комплексного числа $z = a + ib$ вектор $\overline{OA}$.

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек координатной плоскости. Подобным образом было установлено соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой.

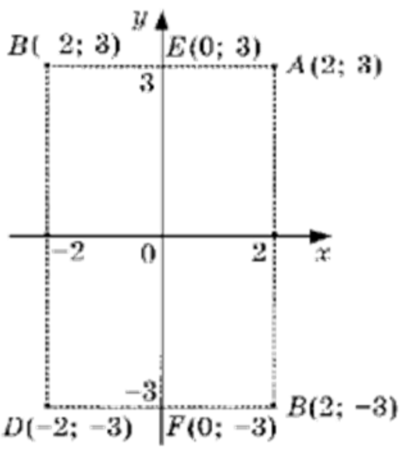


Рис. 1

На рисунке 1 изображена координатная плоскость. Числу 2 + 3i соответствует точка A(2, 3) плоскости; числу 2 – 3i – точка B(2, – 3); числу – 2 + 3i – точка C(– 2, 3); числу – 2 – 3i – точка D(– 2; – 3). Числу 3i соответствует точка E(0, 3); а числу – 3i – точка F(0, – 3). Итак, каждому комплексному числу соответствует единственная точка координатной плоскости и, обратно, каждой точке координатной плоскости соответствует единственное комплексное число, при этом двум различным комплексным числам соответствуют две различные точки координатной плоскости. Ясно, что действительным числам x + 0i соответствуют точки оси абсцисс, а чисто мнимым числам 0 + yi, где y ≠ 0 – точки оси ординат. Поэтому ось Oy называют мнимой, а ось Ox – действительной. Сопряженным комплексным числам $z = x + iy$ и $z = x - iy$ соответствуют точки, симметричные относительно оси абсцисс (рис. 2).

2. Модуль и аргумент комплексного числа.

Модулем комплексного числа $|z|$ называется длина радиус-вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначают буквой r.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Если комплексное число z изображается точкой оси абсцисс (т.е. является действительным числом), то его модуль совпадает с абсолютным значением. Все комплексные числа, имеющие модуль 1, изображаются точками единичной окружности – окружности с центром в начале системы координат, радиуса 1 (рис. 4).

Угол φ между положительной полуосью Ox и лучом Oz называют аргументом комплексного числа z = x + yi (рис. 3).

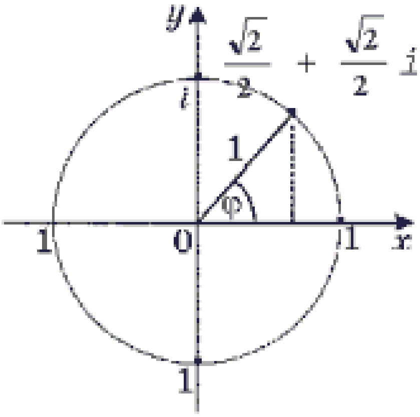


Рис. 4

Сопряженные комплексные числа $z = x + iy$ и $z = x - iy$ имеют один и тот же модуль $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и аргументы, отличающиеся знаком: $\varphi = -\varphi$

В отличие от модуля аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Аргумент одного и того же комплексного числа может иметь бесконечно много значений, отличающихся друг от друга на число, кратное 360°. Например, число z (рис. 3) имеет модуль r, аргумент же этого числа может принимать значения j; φ + 360°; φ + 720°; φ + 1080°; … или значения φ – 360°; φ – 720°; φ – 1080°; … Данное значение модуля r и любое из приведенных выше значений аргумента определяют одну и ту же точку плоскости, соответствующую числу z.

Пример: Найти модуль и аргумент для комплексного числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4 \qquad \varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -60^0$$

3. Арифметические действия над комплексными числами.

Правило сложения и вычитания комплексных чисел.

($x_1 + iy_1$) + ($x_2 + iy_2$) = ($x_1 + x_2$) + ($y_1 + y_2$)i.

Например:

(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3 + 1)i = 7 + 4i;

(– 2 + 3i) + (1 – 8i) = (– 2 + 1) + (3 + (– 8))i = – 1 – 5i;

(– 2 + 3i) + (1 – 3i) = (– 2 + 1) + (3 + (– 3))i =

= – 1 + 0i = – 1.

Вычитание комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению, и выполняется по формуле:

($x_1 + iy_1$) - ($x_2 + iy_2$) = ($x_1 - x_2$) + ($y_1 - y_2$)i.

Например:

(5 – 8i) – (2 + 3i) = (3 – 2) + (– 8 – 3)i = 1 – 11i;

(3 – 2i) – (1 – 2i) = (3 – 1) + ((– 2) – (– 2))i = 2 + 0i = 2.

Правило умножения комплексных чисел.

$(x_1+iy_1)\ (x_2+iy_2) = (x_1x_2-y_1y_2) + (x_1y_2+x_2y_1)$i.

Таким образом операции сложения, вычитания и умножения над комплексными числами осуществляются так, как будто мы выполняем операции над многочленами, однако с условием, что $i^2 = -1$.

Действительно: $(x_1+iy_1)\ (x_2+iy_2) = x_1x_2+x_1y_2i+x_2y_1i+y_1y_2i^2 = (x_1x_2-y_1y_2) + (x_1y_2+x_2y_1)$i.

Например, $(-1 + 3i)(2 + 5i) = -2 - 5i + 6i + 15i^2 = -2 - 5i + 6i - 15 = -17 + i$; (2 + 3i)(2 – 3i) = 4 – 6i + 6i – 9i2 = 4 + 9 = 13.

Из второго примера следует, что результатом сложения, вычитания, произведения двух комплексных чисел может быть число действительное. В частности, при умножении двух комплексных чисел $x+yi$ и $x-yi$, называемых сопряженными комплексными числами, в результате получается действительное число, равное сумме квадратов действительной части и коэффициента при мнимой части. Действительно:

$(x+yi)(x-yi) = x^2-y^2i^2 = x^2+y^2$

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число.

Например: $5i \cdot 3i = 15i^2 = -15$; $-2i \cdot 3i = -6i^2 = 6$.

Деление комплексных чисел.

Деление комплексного числа x_1+y_1i на комплексное число $x_2+y_2i \neq 0$ определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

$$\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i} = \frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{(x_2+y_2i)(x_2-y_2i)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}} + \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}i$$

Формула теряет смысл, если $x_2+y_2i = 0$, так как тогда $x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2} = 0$, т. е. деление на нуль и во множестве комплексных чисел исключается.

Обычно деление комплексных чисел выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Например,

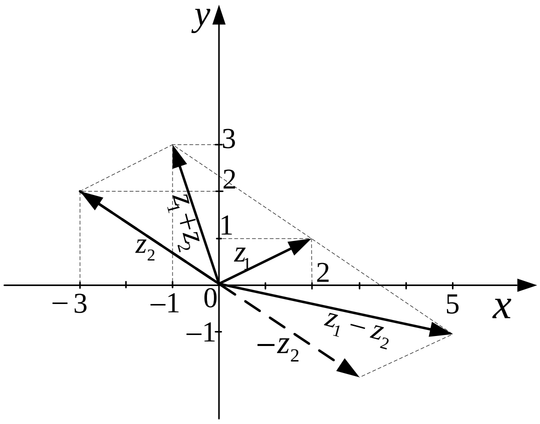
$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1+1} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = i;$$

$$\frac{3+2i}{2+i} = \frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8+i}{2^2+1^2} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i.$$

<u>ПРИМЕР 1</u>. $z_1 = 2+i$ $\qquad z_2 = -3+2i$

Найти: z_1+z_2, $\quad z_1-z_2$ (геометрически и алгебраически), $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^2.

Решение



$z_1+z_2=(2+i)+(-3+2i)=-1+3i$,

$z_1-z_2=(2+i)-(-3+2i)=5-i$,

$z_1\cdot z_2=(2+i)(-3+2i)=-6+4i-3i+2i^2=-6+i-2=-8+i$,

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2+i}{-3+2i}=\dfrac{(2+i)(-3-2i)}{(-3-2i)(-3-2i)}=\dfrac{-6-4i-3i-2i^2}{(-3)^2+(2)^2}=\dfrac{-4-7i}{13}=-\dfrac{4}{13}-\dfrac{7}{13}i$,

$z_1^2=(2+i)^2=4+4i+i^2=4+4i-1=3+4i$.

ПРИМЕР 2**.** Решить уравнение $x^2+2x+9=0$.

Решение

$D=b^2-4ac=4-36=-32=32i^2$, $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,

$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{32i^2}}{2}=\dfrac{-2+4\sqrt{2}i}{2}=-1+2\sqrt{2}i$,

$x_2=\dfrac{-2-\sqrt{32i^2}}{2}=\dfrac{-2-4\sqrt{2}i}{2}=-1-2\sqrt{2}i$.

Ответ: $x_1=-1+2\sqrt{2}i$, $\quad x_2=-1-2\sqrt{2}i$.

Задания для самостоятельного решения

1 вариант	2 вариант
1. Найдите $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1=3+i$, $z_2=2-8i$	1. Найдите $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1=1+2i$, $z_2=-4+2i$
2. Найдите модуль к.ч. $z=-2+2\sqrt{3}i$	2. Найдите модуль к.ч. $z=3-4\sqrt{5}i$
3. Найдите $z_1\cdot z_2$, если $z_1=6-2i$, $z_2=3-4i$	3. Найдите $z_1\cdot z_2$, если $z_1=1+2i$, $z_2=3+i$
4. Изобразите число на комплексной	4. Изобразите число на комплексной

плоскости $z = 2 + 4i$ плоскости $z = -3 + 4i$

5. Вычислите: $(-5x + 4y^2 i) \cdot (5x - 4y^2 i)$ 5. Вычислите: $(6x^3 + yi) \cdot (-6x^3 + yi)$

Вопросы для закрепления:

1. Какие числа называются комплексными и мнимыми?
2. Как геометрически представляется комплексное число?
3. Что называется модулем комплексного числа?
4. Как выполняется сложение и вычитание комплексных чисел?

Как выполняется умножение комплексных чисел?

Практическое занятие 2,3

Тема: Матрицы и действия с ними. Определитель матрицы.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

Сведения из теории

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица *B* имеет размер *m*х*n*» означает, что речь идет о матрице, состоящей из *m* строк и *n* столбцов. Например, матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер *2*х*3*. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на *i-ю* строку матрицы *A* используют обозначение A_i, при ссылке на *j-й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы *A* (размера *n*х*n)* образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*х*3*

$$A=\begin{pmatrix}-2&3&1\\0&3&3\\0&0&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&0\\3&-4&-2\end{pmatrix}$$

матрица *A* является верхней треугольной, *B* – диагональной, *C* – нижней треугольной, *E* – единичной.

Матрицы *A*, *B* называются *равными* (*A*=*B*), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k*, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA=k\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\dots&ka_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\dots&ka_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\ka_{m1}&ka_{m2}&\dots&ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\dots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\dots&b_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\b_{m1}&b_{m2}&\dots&b_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\dots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\dots&a_{2n}+b_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\dots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\-3&2\end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-2\\4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2\\7&4\end{pmatrix}$$

Произведение AB можно определить только для матриц *A* размера *m*х*n* и *B* размера *n*х*p*, при этом *AB*=*C*, матрица *C* имеет размер *m*х*p*, и ее элемент

c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B*: $c_{ij} = A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы *A* *3*x*2*, матрицы *B* *2*x*2*. Поэтому произведение *AB* найти можно, произведение *BA* – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4) \\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице *A* размера *m*x*n,* называется матрица A^T размера *n*x*m,* строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A, B называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы *A* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A).* Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.* Можно доказать, что ранг матрицы *A* (размера *m*x*n*) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы *A* размера *2*x*3* $r(A) \le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице B можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3=-C_2$):

$$B=\begin{pmatrix}2&0&4&9\\1&3&2&5\\1&9&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\2&0&4&9\\1&9&2&6\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3-3C_1}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\2&0&4&9\\-2&0&-4&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&5\\2&0&4&9\end{pmatrix}$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix}1&-2\\3&5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-4\\5&0\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}^T+2\begin{pmatrix}5&-1\\0&3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3&-4&5\\-8&10&4\end{pmatrix}^T-3\begin{pmatrix}-5&-1\\8&4\\1&-1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2&0&8\\3&8&5\\0&-4&7\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&10&3\\0&4&-2\\5&2&-9\end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix}1&2\\-3&14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4\\5&10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&4\\-1&3\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}-3&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-3&2\\1&0&-1&0\\-1&3&1&10\\2&4&8&-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\\1\end{pmatrix}^T$;

7) $\begin{pmatrix}3&-4&5\\5&6&-2\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}-5&6\\2&-3\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&2\\-1&-1\end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}4&-2\\1&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&-1\\3&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&4\\-2&5\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}-3&2&1\\0&1&2\\3&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&1&4\\3&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&4\\-1&1&-1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}-3&2&1\\0&1&2\\3&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\\3&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2&4&-1\\1&2&0\end{pmatrix}$;

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Вычисление определителей. Определитель матрицы A размера $2x2$ (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определителем матрицы третьего порядка $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{\mathrm{ij}})$ **,** или **определителем третьего порядка,** называется число, которое находится по формуле $\Delta_3 = |\mathrm{A}| = \mathrm{a}_{11} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} \\ \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{33} \end{vmatrix} - \mathrm{a}_{12} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{23} \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{33} \end{vmatrix} + \mathrm{a}_{13} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{32} \end{vmatrix}$.

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарриуса). Покажем это на схеме:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 5 + 2\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 4\cdot 3 - 2\cdot 0\cdot 3 - (-1)\cdot 2\cdot 5 - 4\cdot 1\cdot 1 =$

$$= 0 + 4 - 12 - 0 + 10 - 4 = -2.$$

Определитель матрицы A размера $3x3$ (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= 2(-1\cdot 0 - 2\cdot 5) + 3(4\cdot 0 - 2\cdot 3) - 1(4\cdot 5 - (-1)\cdot 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 8) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Практическое занятие 4,5

Тема: Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса.

Цель: Приобрести навыки решения систем линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса.

Сведения из теории: Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Рассмотрим линейную систему, в которой число уравнений равно числу неизвестных: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_{m.} \end{cases}$

Запишем определитель, состоящий из коэффициентов системы при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Этот определитель называется ***главным определителем системы***. ***Вспомогательными*** определителями по переменной x_j называются определители, полученные из главного определителя системы заменой j-го столбца коэффициентов на столбец свободных членов уравнений системы. Количество вспомогательных определителей равно числу неизвестных.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Формулы Крамера для нахождения решения системы алгебраических линейных уравнений имеют вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

При решении системы методом Крамера возможны случаи:

- если $\Delta \neq 0$, то система совместна и единственное решение системы выражается формулами Крамера;

- если $\Delta = 0$ и все $\Delta_{xj} = 0$, то система совместна и имеет множество решений; тогда свободные (n-r) неизвестных (где r – ранг матрицы) выбирается произвольно, а главные (базисные) r неизвестных определяются единственным образом через свободные неизвестные;

- если $\Delta = 0$ и хотя бы один $\Delta_{xj} \neq 0$, то система несовместна и решений не имеет.

1. Установить, что система имеет единственное решение, найти его.

$$\begin{cases} x + y - z = 36 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7. \end{cases}$$

Решение: Найдём определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta \neq 0$$,следовательно, система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 36 & 1 & -1 \\ 13 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 + 7 - 13 - 7 - 36 - 13 = -98,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 36 & -1 \\ 1 & 13 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 13 - 36 - 7 - 13 - 7 - 36 = -86,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & 13 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 36 - 13 - 36 - 13 - 7 = -40,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta};$$

$$x=\frac{98}{4}=24{,}5;\quad y=\frac{86}{4}=21{,}5;\quad z=\frac{40}{4}=10.$$

Проверка: $\begin{cases}24{,}5+21{,}5-10=36\\24{,}5-21{,}5+10=13\\-24{,}5+21{,}5+10=7.\end{cases}$

Ответ: (24,5; 21,5; 10)

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (1) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11}\neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11}\neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11},\ -a_{31}/a_{11},\ldots,-a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, …, m-му уравнению системы (1), исключим переменную x_1, из всех последующих уравнений, начиная со второго. Получим:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{i2}^{(1)}x_2+\ldots+a_{in}^{(1)}x_n=b_i^{(1)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m2}^{(1)}x_2+\ldots+a_{mn}^{(1)}x_n=b_m^{(1)},\end{cases},$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)}\neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)}\neq 0$). Умножая второе уравнение на подходящие числа ($-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)},-a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)},\ldots,\ \ldots,\ -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, …, m–му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных $x_3, x_4, \dots, x_{r-1}$, после $(r-1)$–го шага, получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r}^{(1)}x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \qquad (4)$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n$. Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}, \dots, b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (2) несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы числа $b_{r+1}^{(r-1)}, \dots, b_m^{(r-1)}$ в системе (4) равны нулю. В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе (4) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (1). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (4) равно числу переменных, т.е. $r=n$ (в этом случае система (4) имеет треугольный вид); б) $r<n$ (в этом случае система (4) имеет ступенчатый вид). Переход системы (1) к равносильной ей системе (4) называется **прямым ходом** метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (4) – **обратным ходом.**

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемую **расширенной матрицей системы**, так как в нее, кроме матрицы системы А, дополнительно включен столбец свободных членов.

Пример 2. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} \neq 0$, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2), (-3), (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на $13{,}5/8 = 27/16$ и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ \qquad\qquad -8x_3 + x_4 = 6, \\ \qquad\qquad\quad -\frac{117}{16} x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4=-2$; из третьего $x_3=\frac{6-x_4}{-8}=\frac{6+2}{-8}=-1$; из второго $x_2=\frac{-14-8x_4+10x_3}{-4}=\frac{-14-8(-2)+10(-1)}{-4}=2$ и из первого уравнения $x_1=6+2x_4-3x_3-2x_2=6+(-2)-3(-1)-2\cdot 2=1$, т.е. решение системы $(1;\ 2;\ -1;\ 2)$.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=7, \\ 2x_1-3x_2+x_3=3, \\ 4x_1+x_2-x_3=16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0=-1$, следовательно, данная система несовместна.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x+y-z=36 \\ x-y+z=13 \\ -x+y+z=7. \end{cases}$ 2). $\begin{cases} 4x+y+z=5 \\ 6x+3y+4z=1 \\ 7x+2y+5z=2 \end{cases}$

2. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -x_1+4x_3=6 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -x_1+4x_3=4 \end{cases}$

Вопросы для закрепления:

1. В чем заключается метод Крамера при решении систем линейных уравнений?

2. Алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Домашнее задание: Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x+y-5z=-1 \\ x-y-z=-2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ x+2y+3z=-1 \\ x-3y-2z=3 \end{cases}$

Практическое занятие 6

Тема: Решение матричных уравнений.

Цель: Приобрести навыки решения матричных уравнений.

Сведения из теории:

Две системы уравнений называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (1) в матричной форме. Обозначим:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $\mathrm{A}_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $\mathrm{X}_{n\times 1}$, их произведение $AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_x+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец.

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (1). На основании определения равенства матриц систему (1) можно записать в виде:

$$\mathrm{AX}=\mathrm{B}. \qquad (2)$$

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. $\mathrm{m}=\mathrm{n}$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta=|\mathrm{A}|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (1) при $\mathrm{m}=\mathrm{n}$ предположим, что квадратная матрица системы $\mathrm{A}_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|\mathrm{A}|\neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая слева обе части матричного равенства (2) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=EX=X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец:

$$X=A^{-1}B$$

Пример 1. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде:

$$AX=B \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}

$$\Delta=\det(A)=\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=5(4\text{-}9)+1(2-12)-1(3-8)=\text{-}25-10+5=\text{-}30.$$

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=\text{-}5; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1; \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=10; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=14; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-16;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-5; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-19; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=11.$$

Получим A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\tilde{A}^{T}=\frac{1}{-30}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Находим вектор *X*.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{30}&\frac{1}{30}\\-\frac{1}{3}&-\frac{7}{15}&\frac{8}{15}\\\frac{1}{6}&\frac{19}{30}&-\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\-\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\\frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3,\\2x_1+x_2+x_3=11,.\\x_1+x_2+2x_3=8.\end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; **Решение.** а) Обозначим

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3\\11\\8\end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид $AX=B$. Найдем определитель $|A|=5$. Так как $|A|\neq 0$, матрица A – невырожденная, и существует обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3&1&1\\1&-2&3\end{pmatrix};\ X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3&1&1\\1&-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\11\\8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}20\\10\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

Задания для самостоятельного решения.

Решить систему уравнений матричным методом

1) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2\\3x_1+2x_2+2x_3=-2\\x_1-2x_2+x_3=1\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}3x_1+x_2+3x_3=2\\5x_1-2x_2+2x_3=1\\2x_1+2x_2+3x_3=1\end{cases}$

Домашнее задание.

Практическое занятие 7

Тема: Графический метод решения задачи линейного программирования

Цель: сформировать умения решать задачи линейного программирования графическим методом

Сведения из теории

Геометрический смысл решения неравенств и систем неравенств

Пусть дана система линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \end{cases}$$

O_1. Уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ определяет на плоскости Ox_1x_2 прямую, которая разбивает эту плоскость на две полуплоскости, каждая из которых лежит по одну сторону от прямой. Сама прямая называется граничной и принадлежит обеим полуплоскостям.

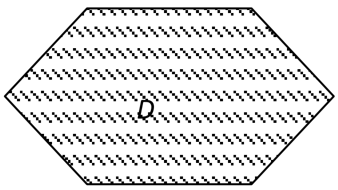
O_2. Координаты точек лежат в одной полуплоскости и удовлетворяют неравенству $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1$, а координаты точек, лежащих в другой полуплоскости удовлетворяют неравенству: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$.

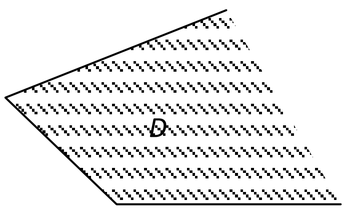
Аналогично для второго неравенства.

O_3. В системе неравенств удовлетворяют множество точек (x_1, x_2), лежащих в пересечении полуплоскостей, заданных неравенствами системы.

O_4. Пересечение плоскостей есть некоторая многоугольная область D, которая называется областью решения системы неравенств.

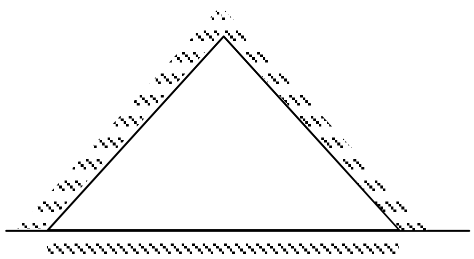
O_5. Если область D ограничена, то её называют многоугольником решений системы.



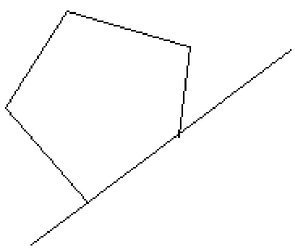


замкнутая ограниченная область   открытая неограниченная область решений

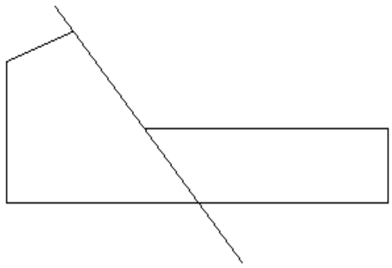
O_6. Если система неравенств противоречива, то область D – пустое множество Ø.



O_7. Множество точек называется выпуклым, если оно вместе со своими двумя точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.



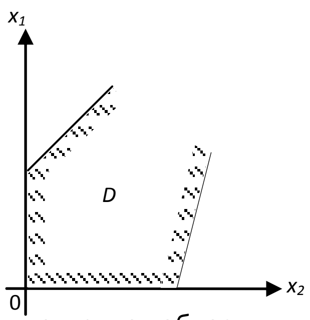
выпуклый



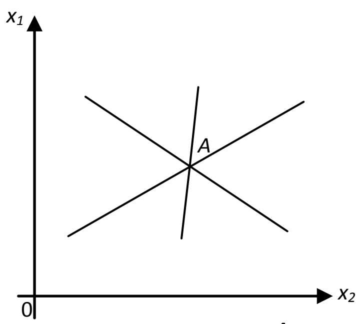
невыпуклый

<u>Замечания.</u>

При построении области решений системы неравенств могут встречаться и другие случаи.



открытая область



единственная точка *A*

Геометрический метод решения задач линейного программирования

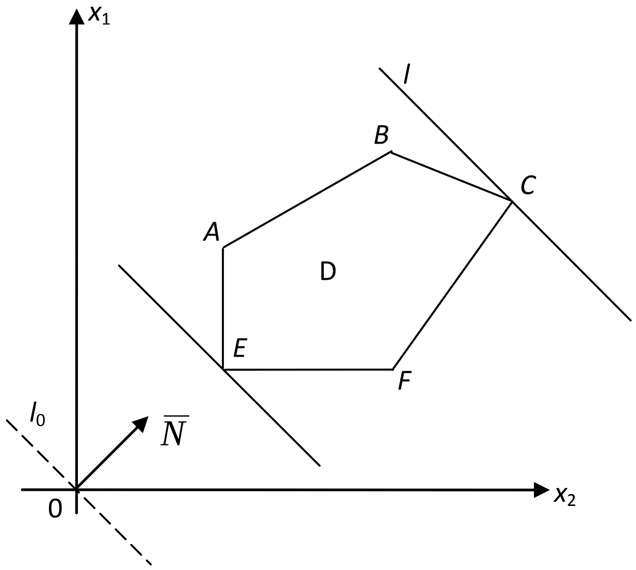
Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

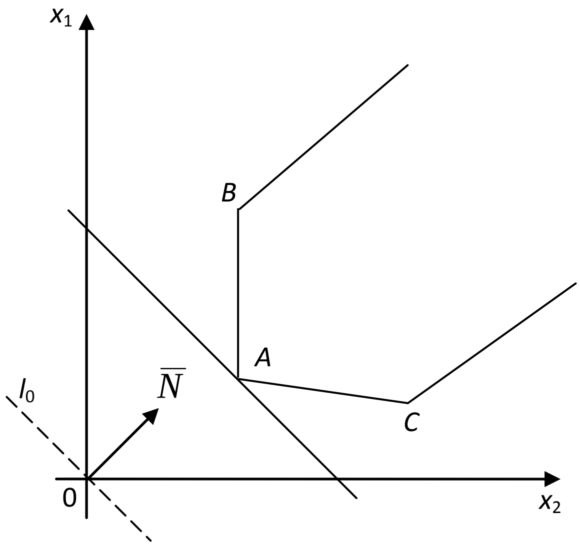
К такой форме может быть сведена количественная задача с ограничениями в виде уравнений, когда число переменных n > числа уравнений m на два, т. е. $n - m = 2$.

О$_1$. Множество допустимых решений задач линейного программирования представляют собой выпуклый многоугольник (или выпуклую многогранную область), а оптимальное решение задачи находится по крайней мере в одной из угловых точек этого многоугольника решений.
Значит, задачу линейного программирования можно сформулировать так:
Среди всех точек области D найти ту, которая обращает в максимальную или минимальную целевую функцию Z.



$Z\,(E)$ – min

$Z\,(C)$ – max



$Z\,(A)$ – min

1. Вектор $\overline{N} = (c_1; c_2)$ – нормальный вектор. Он показывает направление возрастания функции Z.
2. Приравняем значение Z к какой-нибудь постоянной C

$$c_1x_1 + c_2x_2 = c \qquad (c = 0)$$

$$l_0: \quad c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$

Давая C различные числовые значения, будем получать прямые параллельные l_0 и перпендикулярные вектору $\overline{N}$. Значит, уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ определяет на плоскости семейство параллельных прямых.

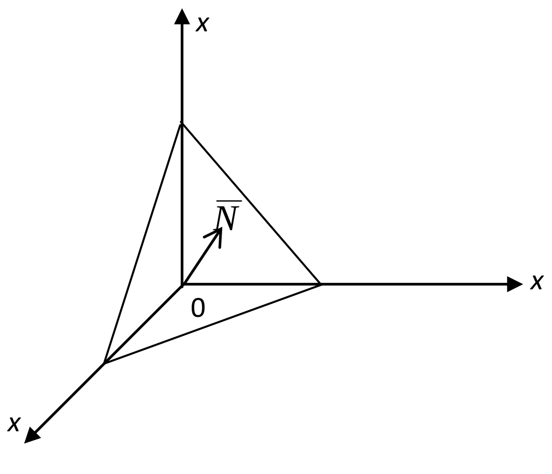
1. Решением задачи на минимум является первая точка, в которой прямая l встречается с областью D при перемещении прямой l_0 в положительном направлении вектора $\overline{N}$.
Z (E) – min для первого случая
Z (A) – min для второго случая

2. Решением задачи на максимум является последняя точка, в которой прямая l встречается с областью D.
Z (C) – max для первого случая
Во втором случае задача на max решений не имеет, т.к. Z не ограничена сверху.
Аналогично может быть не ограничено снизу, тогда на минимум задача решений не имеет.

<u>Замечание.</u>

1. Если прямая l при перемещении совпадает с отрезком BC, то все точки этого отрезка дают решение задачи на максимум (l параллельна BC). Следовательно, решений на максимуме бесчисленное множество.
2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Аналогично, можно показать решение задачи линейного программирования в случае 3-х переменных.



Задача об использовании ресурсов.

При производстве двух видов продукции *A* и *B* предприятием используется четыре вида сырья. Расход каждого вида сырья на единицу продукции *A* - 1, 2, 0, 1 единиц соответственно; для продукции *B* – 3, 1, 1, 0. Запасы сырья составляют 18, 16, 5, 7 единиц. Прибыль от производства продукции *A* - 2 усл. ед., продукции *B* – 3 усл. ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу графически.

Решение.

Составим экономико-математическую модель задачи. Пусть x_1 - количество единиц продукции *A*, x_2 - количество единиц продукции вида *B*.

Так как на первый вид продукции необходима 1 единица первого сырья, а на второй – 3 единицы и запасы этого сырья составляют 18 единиц, получаем первое неравенство системы. Рассуждая аналогично, получаем следующую систему неравенств и целевую функцию:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \le 7 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max .$$

Строим область допустимых решений задачи. В прямоугольной декартовой системе координат строим прямые, соответствующие системе ограничений.

$l_1: \ x_1 + 3x_2 = 18$

x_1	0	18
x_2	6	0

$l_2: \ 2x_1 + x_2 = 16$

x_1	0	8
x_2	16	0

l_3: $x_2 = 5$ (параллельна OX_1); l_4: $x_1 = 7$ (параллельна OX_2)

l_5: $x_1 = 0$ (OX_2); l_6: $x_2 = 0$ (OX_1)

Каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости. Находим, какие из полуплоскостей являются областями решений для каждого неравенства. Для этого достаточно координаты какой либо точки, не лежащий на прямой, подставить в неравенство. Если получили верное неравенство, то полуплоскость является областью решений (на чертеже указываем стрелками). Пересечение всех полуплоскостей и является областью допустимых решений *D*.

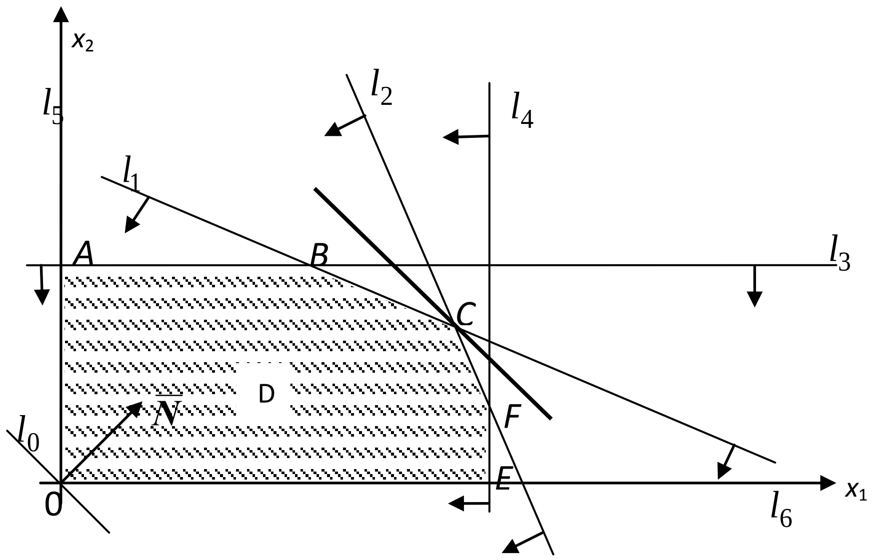
Строим нормальный вектор и прямую l_0. Так как задача на максимум, то перемещаем ее в направлении вектора до пересечения с самой крайней точкой области и находим ее координаты.

$\bar{N} = (2;3)$; $Z_{\max} = r(C)$; $B:\ l_1 \cap l_2$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 & \big| -2 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases} \qquad \text{C}(6;4)$$

$-5x_2 = -20;$ $x_2 = 4$

$Z_{\max} = Z(6;4) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 12 + 12 = 24$



Задания для самостоятельного решения.

1. При производстве двух видов краски *A* и *B* предприятием используется три компонента. Расход каждого вида компонента на единицу продукции и запасы компонентов приведены в таблице Прибыль от производства краски вида *A* - 3 усл. ед., краски вида *B* – 2 усл. ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, решить задачу графически.

Компоненты	Расход компонента на единицу продукции		Запасы компонентов
	A	B	
1	1	2	6
2	2	1	8
3	0	1	2
Прибыль	3	2	

2. В рационе животных используется два вида кормов. Животные должны получать три вида веществ. Составить рацион кормления, обеспечивающий минимальные затраты и решить задачу графически. Данные приведены в таблице:

Питательные вещества	Содержание питательного вещества в единице корма		Необходимое количество питательных веществ
	A	B	
1	2	1	12
2	1	1	10
3	2	3	24
Цена	60	60	

Практическое занятие 8

Тема: Экстремум функции нескольких переменных

Цель: Сформировать умение находить экстремум функции двух переменных.

Частной производной по x функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения по x $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю и обозначается z_x', $f_x'(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$.

По определению $z_x' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Аналогично

$$z_y' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Значение частной производной зависит от точки, в которой она вычисляется. Поэтому частная производная есть функция точки (x, y), т.е. также является функцией 2-х переменных.

Частные приращения и производные функции n переменных $(n > 2)$ определяются и обозначаются аналогично.

Из определения частных производных следует, что при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Все правила и формулы дифференцирования для функции одной переменной сохраняются для частных производных функции нескольких переменных.

Решение типовых примеров

1. Найти частные производные функций:

а) $z = e^{x^2+y^2}$;

Решение

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_x = 2xe^{x^2+y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

б) $z = y\ln\left(x^2 - y^2\right)$.

Решение

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}\ .$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln\left(x^2 - y^2\right) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}\ .$$

Частные производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x\left(x,y\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y\left(x,y\right).$$

Частные производные от частных производных $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x\left(x,y\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y\left(x,y\right)$ называются частными производными второго порядка функции $z = f(x,y)$.

Каждая частная производная первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеет две частные производные. Таким образом, получаем четыре частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{y^2}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y).$$

Производные $f''_{xy}(x,y)$; $f''_{yx}(x,y)$ называются смешанными производными второго порядка и $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

Пример. Найти все частные производные первого и второго порядков от функции $z=x^3-x^2y-y^3$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-2xy;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-x^2-3y^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2-2xy\right)=6x-2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2-2xy\right)=-2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2-3y^2\right)=-2x;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-3y^2\right)=-6y.$$

Экстремум функции.

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)$, определенную и непрерывную в некоторой области *D*.

Функция $f(x,y)$ имеет строгий локальный максимум (минимум) в точке $M(x_0;y_0)$, если неравенство $f(x_0,y_0)>f(x,y)\left(f(x_0,y_0)<f(x,y)\right)$ имеет место во всех точках $M(x,y)\neq M_0$.

Необходимые условия экстремума:

Если дифференцируемая функция $z=f(x;y)$ имеет в точке Ì $_0(x_0;y_0)$ экстремум, то в этой точке обе частные производные первого порядка равны нулю, то есть

$$f'_x(x_0;y_0)=0,\qquad f'_y(x_0;y_0)=0.$$

Точка $\left(x_0; y_0\right)$ называется стационарной точкой функции $f(x,y)$, если $df(x_0, y_0) = 0.$ Пусть $\left(x_0; y_0\right)$ - стационарная точка функции $f(x,y)$, обозначим $A = \dfrac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x \partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y^2}$.

Достаточные условия экстремума:

Если $AC - B^2 > 0$, и $A < 0$, то $\left(x_0; y_0\right)$ - точка максимума.

Если $AC - B^2 > 0$, и $A > 0$, то $\left(x_0; y_0\right)$ - точка минимума.

Если $AC - B^2 < 0$, то $\left(x_0; y_0\right)$ - не является точкой экстремума.

Если $AC - B^2 = 0$, то точка $\left(x_0; y_0\right)$ может как быть, так и не быть точкой экстремума, требуется дополнительное исследование.

Решение типовых примеров

1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6.$$

Решение

Область определения функции $D(f)$ - плоскость Oxy, $f(x,y)$ - дифференцируема в каждой точке Ì $\left(x; y\right) \in D(f)$.

Определим стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 8xy + 24y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 + 24x + 2y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\left(x+3\right) = 0, \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0. \end{cases}$$

$$y = 0;\ x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = -2,$$

$$x = -3,\ y = 2.$$

Получили три стационарные точки: M_1(-4,0), M_2(-2,0), M_3(-3,2).

Эти точки исследуем на достаточность условий экстремума:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8x + 24, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Для каждой точки вычислим соответствующие *A, B, C*.

$M_1\left(-4;0\right)$: $A_1 = 0$, $B_1 = -32 + 24 = -8$, $C_1 = 2$, $A_1C_1 - B_1^2 = -64 < 0$, то есть $M_1\left(-4;0\right)$ не является точкой экстремума.

$M_2\left(-2;0\right)$: $A_2 = 0$, $B_2 = -16 + 24 = 8$, $C_2 = 2$, $A_2C_2 - B_2^2 = -64 < 0$, то есть $M_2\left(-2;0\right)$ не является точкой экстремума.

$M_3(-3;2)$: $A_3=16,\quad B_3=0,\quad C_3=2$, $\quad A_3C_3-B_3^2=32>0$ при этом $A>0$. Вывод: $M_3(-3;2)$ точка локального минимума функции $f(x,y)$, $f(-3;2)=-10$.

Задания для самостоятельного решения.

Исследовать на экстремум функции:

1. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$
2. $z=x^3+y^3-9xy$
3. $z=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+2xy-5x-y+2$

Практическое занятие 9

Тема: Нахождение неопределённого интеграла с помощью таблиц, а также используя его свойства.

Цель: Выработать практические умения в интегрировании табличных неопределённых интегралов. Приобрести навыки при решении неопределенных интегралов, используя свойства.

Сведения из теории:

В дифференциальном исчислении решалась задача, где по данной функции $y=f(x)$ находилась ее производная или дифференциал.

В интегральном же исчислении решается обратная задача: по дифференциалу данной функции находится сама функция. Этот процесс называется **интегрированием.**

Первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется функция $F(x)$, производная которой в каждой точке отрезка равна $f(x)$, т.е: $\boxed{F'(x)=f(x)}$

Теорема. *Две различные первообразные одной и той же функции* $f(x)$*, определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

Прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ все возможные постоянные значения С, можно получить все первообразные для данной функции $f(x)$, т.е. $\boxed{F(x)+C}$ - это есть совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f\left(x\right)$ называется ***неопределенным интегралом*** от этой функции и обозначается: $\boxed{\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right)+C}$, где

$f\left(x\right)$ - подынтегральная функция; $f\left(x\right)dx$ - подынтегральное выражение;

$F\left(x\right)$ - первообразная для $f\left(x\right)$; C - постоянная интегрирования;

x – переменная интегрирования; $\int$ - знак интеграла.

Действие нахождения первообразной для функции $f\left(x\right)$ называется ***интегрированием*** данной функции.

Основные свойства неопределенного интеграла.

$$\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right)+C \qquad\qquad F'\left(x\right)=f\left(x\right)$$

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\boxed{\left(\int f\left(x\right)dx\right)' = f\left(x\right)}$

На этом свойстве основывается проверка правильности нахождения неопределенного интеграла.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $\boxed{d\left(\int f\left(x\right)dx\right) = f\left(x\right)dx}$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого: $\boxed{\int d\left(F\left(x\right)\right)=F\left(x\right)+C}$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\boxed{\int A\cdot f\left(x\right)dx = A\int f\left(x\right)dx}$, $A\neq 0$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции: $\boxed{\int\left(f_1\left(x\right)\pm f_2\left(x\right)\right)dx=\int f_1\left(x\right)dx\pm\int f_2\left(x\right)dx}$

6. Свойство *инвариантности*: всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо **x** любой дифференцируемой функции от **x**.

Если $\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C$ и $u=\varphi\left(x\right)$, то $\boxed{\int f\left(u\right)du = F\left(u\right)+C}$. На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C$	**11.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad , n \neq -1$	**12.** $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right\| + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$	**13.** $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	**14.** $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$
5. $\int e^u du = e^u + C$	**15.** $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$
6. $\int \mathrm{cos}u du = \mathrm{sin}u + C$	**16.** $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
7. $\int \mathrm{sin}u du = -\mathrm{cos}u + C$	**17.** $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{arcsec}\frac{u}{a} + C$
8. $\int \mathrm{tg}u du = -\ln\|\mathrm{cos}u\| + C$	**18.** $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$
9. $\int \mathrm{ctg}u du = \ln\|\mathrm{sin}u\| + C$	
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	

Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \mathrm{ctgudu} = \ln|\mathrm{sinu}| + C$$

$$\left(\ln|\mathrm{sinu}| + C\right)' = \frac{(\mathrm{sinu})'}{\mathrm{sinu}} = \frac{\mathrm{cosu}}{\mathrm{sinu}} = \mathrm{ctgu}$$

Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

Непосредственное интегрирование функций

1. *Интегрирование по таблице.*

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

2. *Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.*

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

3. *Непосредственное интегрирование.*

- Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.

Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, если $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$

- Добавление постоянного слагаемого под знак дифференциала.

При любой постоянной **a** будет выполняться равенство: $d(x+a) = dx$. Значит, и наоборот $dx = d(x+a)$ и поэтому $\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(x)\,d(x+a)}$, т.е. под знак дифференциала можно ввести любое постоянное слагаемое.

- Введение под дифференциал постоянного множителя.

Если $a = \text{const}$, то $d(ax) = a\,dx$. Отсюда при $a \neq 0$ - $dx = \dfrac{1}{a}d(ax)$. Следовательно, $\boxed{\int f(x)\,dx = \dfrac{1}{a}\int f(x)\,d(ax)}$, т.е. под знак дифференциала можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.

- Интеграл от дроби, числитель которой является производной знаменателя, равен логарифму знаменателя.

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \ln\left|\varphi(x)\right| + C}$$

Пример 1. $\int \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + 1\right)dx$

Решение:

$$\int \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} + 1\right)dx = 2\int x^3 dx - 3\int x^{2/3}dx + 4\int x^{-3}dx + \int dx =$$

$$= 2\cdot\frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^{5/3}}{5/3} + 4\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + x + C = \frac{x^4}{2} - \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^2} + x + C$$

Пример 2. $\int 3^x \cdot e^{2x}dx$

Решение:

$$\int 3^x \cdot e^{2x}dx = \int \left(3e^2\right)^x dx = \frac{\left(3e^2\right)^x}{\ln\left(3e^2\right)} + C$$

Пример 3. $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx$

Решение:

$$\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{\left(4+\sin^2 x\right)'}{4+\sin^2 x}dx = \ln\left|4+\sin^2 x\right| + C$$

Пример 4. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$

Решение

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right| + C$$

Задания для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1) $\int x^3 dx$,

2). $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2}}$,

3) $\int -\frac{dx}{3}$.

4) $\int (\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{2\sqrt{x}})dx$,

5) $\int \frac{3+2t-t^2}{t^4}dt$,

6) $\int (2^x - \frac{1}{1+x^2})dx$,

7) $\int \sqrt[5]{x^4}dx$,

8) $\int 10x dx$,

9) $\int (2x^2-3x-7)dx$,

10) $\int \frac{3x^2(2+x^2)}{2}dx$,

11) $\int \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

12) $\int (\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 7\cos x)dx$.

Вопросы для закрепления:

1. В чем заключается непосредственное интегрирование?
2. Какие свойства неопределенного интеграла применяются при непосредственном интегрировании?

Домашнее задание:

1. Является ли функция $F(x) = x^2+3x+1$ первообразной для функции $f(x) = 2x+3$ на ***R***?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}$.

3. Для функции $f(x)=\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};-2\right)$.
4. Найдите неопределённый интеграл: а)$\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+4x^4\right)dx$; б) $\int(5x+3)^3$dx.

Практическое занятие 10

Тема: Методы замены переменной и интегрирования по частям

Цель: Выработать практические умения в интегрирование неопределённых интегралов методами подстановкой и по частям. Приобрести навыки при решении неопределенного интеграла методами подстановкой и по частям.

Сведения из теории:

Интегрирование методом подстановки

Пусть $\int f(x)dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$\boxed{\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{array}}$, т.е.

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\int f(\varphi(t))\cdot d(\varphi(t))=F(\varphi(t))+C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной **x**. Такой способ нахождения интеграла называется ***методом замены переменной*** или ***методом подстановки.***

Задача нахождения неопределённых интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов. Этого можно достичь путём алгебраических тождественных преобразований подынтегральной функции или подведения части её множителей под знак дифференциала.

Подведение множителя под знак дифференциала

$dx=d(x+b), b-const$	$\sin xdx=-d(\cos x)$
$dx=\frac{1}{a}d(ax), a\neq 0$	$\cos xdx=d(\sin x)$
$dx=\frac{1}{a}d(ax+b), a\neq 0$	$\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$
$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$	$\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$xdx = \frac{1}{2} d(x^2 + b)$	$\cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x$

Выбор удачной формулы (подстановки) для замены переменной имеет большое значение. Вместе с тем дать одно общее правило для выбора хорошей подстановки невозможно. Некоторые частные правила для важнейших типов интегралов даются в решениях типовых примеров.

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-1}dx$

Замечание: В данном примере с первого взгляда не определить, что подвести под знак дифференциала, а поэтому сделаем подстановку, позволяющую избавиться от иррациональности. Обозначим $\sqrt{x-1} = t$. Эта подстановка приводит исходный интеграл к новому интегралу, сводящемуся к табличному.

Решение:

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \begin{vmatrix} \sqrt{x-1} = t \\ x = t^2 + 1 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int \left(t^2+1\right)\cdot t \cdot 2tdt = 2\int \left(t^4 + t^2\right)dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{5}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{5}(x-1)^{3/2} + C$$

Если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $f(x)$, то есть выражение $f'(x)dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t = f(x)$.

Пример 2. Найти $\int \sqrt[3]{1+\sin x}\cdot \cos xdx$

Решение: $\int \sqrt[3]{1+\sin x}\cdot\cos xdx = \begin{vmatrix} 1+\sin x = t \\ \cos xdx = dt \end{vmatrix} = \int t^{1/3}dt = \frac{t^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\sin x)^4} + C$

Если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, используется подстановка $t = \varphi(x)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\sin\frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t = \frac{1}{x}$, а если e^{-x^3}, то $t = -x^3$).

Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

Данная формула называется ***формулой интегрирования по частям.*** Применять её целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. Отметим, что в некоторых случаях формулу необходимо применять несколько раз.

Метод интегрирования по частям рекомендуется для нахождения интегралов от функций $x^k \cdot \sin\alpha x; x^k \cdot \cos\alpha x; x^k \cdot e^{\alpha x}; x^n \cdot \ln^k x; a^{\beta x}\sin\alpha x;$ $a^{\beta x}\cos\alpha x; \arcsin x; arctgx$ и т.д., где n, k - целые положительные постоянные, $\alpha, \beta \in R$, а также для отыскания некоторых интегралов от функций, содержащих обратные тригонометрические и логарифмические функции.

Основные типы интегралов, «берущихся» по частям

интеграл		u	dv
I	$\int p(x) \cdot e^{\alpha x}dx$	$p(x)$	$e^{\alpha x}dx$
	$\int p(x) \cdot \sin\alpha x dx$	$p(x)$	$\sin\alpha x dx$
	$\int p(x) \cdot \cos\beta x dx$	$p(x)$	$\cos\beta x dx$
II	$\int p(x) \cdot \ln x dx$	$\ln x$	$p(x)dx$
	$\int p(x) \cdot \arcsin x dx$	$\arcsin x$	$p(x)dx$
	$\int p(x) \cdot \arccos x dx$	$\arccos x$	$p(x)dx$
III	$\int e^{\alpha x} \cdot \sin\alpha x dx$	$e^{\alpha x}$	$\sin\alpha x dx$
		$\sin\alpha x$	$e^{\alpha x}dx$
	$\int e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x dx$	$e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}dx$
		$\cos\beta x$	$\cos\beta x dx$
	$\int \sin(\ln x)dx$	$\sin(\ln x)$	dx

Замечания:

1. Интегралы 1-го типа берутся **n**-кратным интегрированием, если $P(x)$ - многочлен **n**-й степени.
2. Под знаком интегралов 2-го типа стоят функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$, $\ln x$, от которых интеграл не существует.
3. Интегралы 3-го типа берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Пример 1. Найти $\int x\cdot e^{-2x}dx$

Решение:

$$\int x\cdot e^{-2x}dx=\left|\begin{array}{l} x=u;e^{-2x}dx=dv \\ dx=dv;v=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C;(C=0)\end{array}\right|=$$

$$=x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$$

Пример 2. Найти $\int x\cdot arctgxdx$

Решение:

$$\int x\cdot arctgxdx=\left|\begin{array}{l} u=arctgx;dv=xdx \\ du=\frac{dx}{1+x^2};v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1-1)dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы методом подстановки и по частям:

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 6x}$, 2) $\int\frac{dx}{1+25x^2}$, 3) $\int\cos\frac{x}{2}dx$, 4) $\int 3^{-x}dx$.

5). $\int(4-3x)\,e^{-3x}dx$ 6). $\int(4x-2)\cos 2x\,dx$

7). $\int(3x+4)e^{3x}dx$

Вопросы для закрепления*:*

1. В чем заключается принцип решения интегралов методов подстановки?
2. Как проинтегрировать по частям и в каком случае применяется этот метод?

Домашнее задание:

Вариант № 1

$$\int(5x^4-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x\sqrt[3]{x}}+9\sqrt[7]{x^2})dx$$

$$\int\cos(7x+1)dx$$

Вариант № 2

1. $\int(4x^3-\frac{4}{x^5}+\frac{9}{x\sqrt[4]{x}}+10\sqrt[7]{x^3})dx$

2. $\int\frac{dx}{sin^2(5x-3)}$

$$\int (5x-2)e^{3x}dx$$

3. $$\int (2-4x)sin2xdx$$

Вариант № 3

$$\int \left(6x^5 - \frac{1}{x^2} - 8\sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}\right)dx$$

$$\int 5^{2x+1}dx$$

$$\int (1-6x)\, e^{2x}dx$$

Вариант № 4

1. $$\int \left(7x^6 - \frac{3}{x^4} + 3\sqrt{x} - \frac{6}{x^2\sqrt{x}}\right)dx$$

2. $$\int Ctg(7x+2)dx$$

3. $$\int (2-9x)\, e^{-3x}dx$$

Вариант № 5

$$\int \left(8x - \frac{5}{x^6} + 7\sqrt[6]{x} - \frac{5}{x^3\sqrt{x}}\right)dx$$

$$\int (2x-7)^5dx$$

$$\int (3x-2)\cos 5x\, dx$$

Вариант № 6

1. $$\int \left(4x - \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x\sqrt[5]{x^3}} + 9\sqrt[7]{x^2}\right)dx$$

2. $$\int \sqrt[4]{3x+1}\, dx$$

3. $$\int e^{-2x}(4x-3)\, dx$$

Вариант № 7

$$\int \left(8x^7 + \frac{7}{x^8} - \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} + 5\sqrt[4]{x}\right)dx$$

$$\int \frac{dx}{3x+10}$$

$$\int (5x+6)\cos 2xdx$$

Вариант № 8

1. $$\int \left(9x^8 - \frac{15}{x^4} + \frac{7}{x\sqrt[4]{x}} + 13\sqrt[10]{x^3}\right)dx$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-2)^2}}$$

3. $$\int (4x+7)\cos 3xdx$$

Вариант № 9

$$\int \left(11x^{10} - \frac{6}{x^7} + 9\sqrt[5]{x^4} - \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}\right)dx$$

$$\int \frac{dx}{(2x-5)^3}$$

Вариант № 10

1. $$\int \left(6x^5 + \frac{6}{x^3} - \frac{5}{2x\sqrt{x}} + 13\sqrt[8]{x^5}\right)dx$$

2. $$\int \sqrt[3]{(2x+7)}\, dx$$

$\int (8-3x)\cos 5x dx$ 3. $\int (2x-5)\cos 4x dx$

Вариант № 11

$\int \left(6x^2 + 7\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{3x\sqrt[3]{x}} + \frac{9}{x^4}\right) dx$

$\int 6^{2x+1} dx$

$\int (x+5)\sin 3x dx$

Вариант № 12

1. $\int \left(8x^3 + 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{x^5} - \frac{3}{4x\sqrt[4]{x}}\right) dx$

2. $\int e^{3x-10} dx$

3. $\int (2-3x)\sin 2x dx$

Тема: Интегрирование простейших рациональных дробей

Сведения из теории

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx.$$

Если $A \neq 0$, то из числителя можно выделить слагаемое $2x+b$, равное производной квадратного трёхчлена, стоящего в знаменателе. Тогда в результате простых преобразований получим

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+b)+(2B/A-b)}{x^2+bx+c} dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx +$$

$$+(B-Ab/2)\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + (B-Ab/2)\int \frac{dx}{x^2+bx+c}.$$

Для отыскания последнего интеграла выделим в квадратном трёхчлене полный квадрат, то есть представим трёхчлен в виде

$$x^2+bx+c = (x+b/2)^2 + \left(c-b^2/4\right)$$

и в зависимости от знака выражения $c-b^2/4$ получим один из табличных интегралов вида $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2}$.

Пример 1. Найти $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+13} dx.$

Решение

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+13} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4-4-4/3}{x^2+4x+13} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} dx -$$

$$-8\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right|-8\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+c.$$

Пример 2. Найти $\int\frac{5x-7}{x^2-8x+7}dx.$

Решение

$$\int\frac{5x-7}{x^2-8x+7}dx=\frac{5}{2}\int\frac{2x-8+8-14/5}{x^2-8x+7}dx=\frac{5}{2}\int\frac{2x-8}{x^2-8x+7}dx+13\int\frac{dx}{x^2-2\cdot4x+16-9}=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left|x^2-8x+7\right|+13\int\frac{dx}{(x-4)^2-9}=\frac{5}{2}\ln\left|x^2-8x+7\right|+13\frac{1}{2\cdot3}\ln\left|\frac{x-4-3}{x-4+3}\right|+c=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left|x^2-8x+7\right|+\frac{13}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right|+c.$$

Замечание Если в интеграле квадратный трёхчлен имеет вид $ax^2+bx+c\,(a\neq0)$, то для отыскания этого интеграла коэффициент a в знаменателе выносят за скобки: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$

Пример 3. Найти $\int\frac{4x-3}{-2x^2+12x-10}dx.$

Решение

$$\int\frac{4x-3}{-2x^2+12x-10}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{4x-3}{x^2-6x+5}dx=-\int\frac{2x-6+6-3/2}{x^2-6x+5}dx=$$

$$=-\int\frac{2x-6}{x^2-6x+5}dx-\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^2-4}=-\ln\left|x^2-6x+5\right|+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x-3}{2-x+3}\right|+c.$$

Методы нахождения интеграла вида

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

аналогичны рассмотренным выше, однако в результате получаются другие табличные интегралы. При $A\neq0$ имеем

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b-b+2Ba/A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{bA}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}}.$$

Тогда при $c \neq \frac{b^2}{4a}$ и $a > 0$ последний интеграл можно привести к виду

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm q^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm q^2}\right| + c,$$

а при $c > \frac{b^2}{4a}$ и $a < 0$ - к виду

$$\int \frac{du}{\sqrt{q^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{q} + c.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx.$

Решение

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)+(4-2/3)}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx - 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}} =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x+8} - 5\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}\right| + c.$$

Задания для самостоятельного решения.

1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}.$ **2.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$

Интегрирование рациональных функций путём разложения на простейшие дроби

Рациональной функцией $R(x)$ называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n},$$

где m, n - целые положительные числа; $b_i, a_j \in R$ $(i = 0,1,2,...,m; \quad j = 0,1,2,...,n)$.

Если $m<n$, то $R(x)$ называется ***правильной дробью,*** если $m \ge n$, то ***неправильной дробью.***

Всякую неправильную дробь путём деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{Q_l(x)}{P_n(x)},$$

где $M_{m-n}(x)$, $Q_l(x)$ - многочлены; $\dfrac{Q_l(x)}{P_n(x)}$ - правильная дробь; $l<n$.

Например $\dfrac{x^4+4}{x^2+3x-1}$ - неправильная дробь. Разделив её по правилу деления многочленов, получим

$$\frac{x^4+4}{x^2+3x-1} = x^2-3x+10+\frac{-33x+14}{x^2+3x-1}.$$

Так как всякий многочлен легко интегрируется, то интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных дробей.

Простейшей дробью называется дробь одного из следующих четырёх типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; **2)** $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; **4)** $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$,

где A, a, M, N, p, q - постоянные числа, k - целое, $k \ge 2$, $p^2-4q<0$.

Интегралы от простейших дробей первого и второго типов находятся легко:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+c,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)}+c.$$

Методика нахождения интегралов от простейших дробей третьего и четвёртого типов рассмотрена в пункте 5.3.1. Таким образом, всякая простейшая рациональная дробь может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Известно, что всякий многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами на множестве действительных чисел может быть представлен в виде

$$P_n(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ - действительные корни многочлена $P_n(x)$ кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_m$, а $p_\gamma^2 - 4q_\gamma < 0$ $(\gamma = 1, 2, ..., s)$; $k_1 + k_2 + \ldots + k_m + 2t_1 + \ldots + 2t_s = n$; числа $k_1, k_2, \ldots, k_m, t_1, \ldots, t_s$ - целые неотрицательные. Тогда верна теорема.

Для вычисления значений A, B, M, N в разложении функции $R(x)$ на сумму простейших рациональных дробей часто используют ***метод неопределённых коэффициентов.*** В некоторых случаях с целью упрощения вычислений можно воспользоваться ***методом частных значений.*** Суть этих методов покажем на примерах.

Пример 1. Найти $\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx.$

Решение

В соответствии с формулой разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}\right)dx. \quad (1)$$

Если привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадает со знаменателем исходной подынтегральной функции, а числители подынтегральной функции в левой и правой частях формулы (1) будут тождественно равными, то есть

$$2x-3 \equiv A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + C(x-1)x. \quad (2)$$

Найдём коэффициенты A, B, C ***методом неопределённых коэффициентов.***

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества (2), получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B+C, \\ x^1 & 2 = -3A-2B-C, \\ x^0 & -3 = 2A, \end{array}\right\}$$

решение которой: $A = -3/2, \quad B = 1, \quad C = 1/2.$

Теперь найдём коэффициенты разложения ***методом частных значений.*** Подставим в тождество (2) вместо x частные значения, равные корням знаменателя $\alpha_1 = 0,\quad \alpha_2 = 1,\quad \alpha_3 = 2.$ Получим равенства $-3 = 2A,$ $-1 = -B,\quad 1 = 2C,$ откуда следует, что $A = -3/2,\quad B = 1,\quad C = 1/2$. Подставив в равенство (1) найденные значения коэффициентов, окончательно имеем

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx = \int \left(\frac{-3/2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2} \right) dx =$$

$$-\frac{3}{2}\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + c.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}.$

Решение

На основании теоремы о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)} \right) dx.$$

Приведя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, имеем

$$x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x^2-1). \qquad (1)$$

При $x = 1$ и $x = -1$ находим, что $4A = 1,\quad -1 = -2B,$ то есть $A = 1/4,\quad B = 1/2$.

Для вычисления значения C приравняем в тождестве (1) коэффициенты при x^2. Получим $0 = A + C$, то есть $C = -1/4$.

Окончательно имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \frac{1/4}{x-1}dx + \int \frac{1/2}{(x+1)^2}dx + \int \frac{-1/4}{(x+1)}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + c.$$

Задания для самостоятельного решения.

1. $\int \frac{x^3}{x-2}dx.$ **2.** $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx.$

Домашнее задание:

Тест

1 Чему равно значение интеграла $\int \frac{xdx}{1+x^2}$:

1: $\ln(1+x^2)+C$; 2: $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 3: $arctgx + C$.

2 Первообразная функции $y(x) = \frac{1}{x^2} - 4\sin x$ равна:

1: $4\cos x - \frac{1}{x} + c$; 2: $4\cos x + \frac{1}{x} + c$; 3: $4\cos x - \frac{1}{2x} + c$.

3 Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на интервале (a, b), если в любой точке интервала (a, b) функция F(x) дифференцируема и:

1: $F''(x) = f(x)$ 2: $F'(x) = 0$; 3: $F'(x) = f(x)$.

4 Отметить правильный ответ. Формула интегрирования по частям:

1: $\int udv = uv - \int vdu$; 2: $\int udv = uv - \int udv$; 3: $\int udv = v^2 - \int vdu$.

5 Отметить правильный ответ. Отыскание неопределенного интеграла называется

1: дифференцированием; 2: интегрированием; 3: логарифмированием.

6 Отметить правильный ответ. Неопределенным интегралом от функции *f(x)* называется :

1: совокупность всех первообразных; 2: сумма функций $f(x) + f^2(x)$;
3: производная функции *f(x)*; 4: выражение $f(x)dx$.

7 Чему равен интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$:

1: $\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$; 2: $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$; 3: $\ln|x-a| + \ln|x+a| + c$; 4: $\ln\left|x^2 - a^2\right| + C$.

8 Чему равен интеграл $\int x\sqrt{x}dx$:

1: $\frac{x^3}{3} + C$; 2: $2\sqrt{x} + C$; 3: $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$; 4: $x^{\frac{3}{2}} + C$.

9 Дополнить формулировку:
У всякой непрерывной на данной интервале функции существует ...

1: точка разрыва; 2: неопределенный интеграл; 3:вертикальная асимптота графика функции.

10 Дополнить формулировку:
Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен …

1: подынтегральному выражению; 2: самой функции; 3: производной функции; 4: натуральному логарифму функции.

11 Универсальная тригонометрическая подстановка:

1: $t = tg\frac{x}{2}$; 2: $t = \cos x$; 3: $t = \cos\frac{x}{2}$; 4: $t = \sin\frac{x}{2}$; 5: $t = arcc\,\text{os}\,x$.

12 Чему равен интеграл $\int (7x-1)^{23}dx$:

1: $(7x-1)^{23}$; 2: $(7x-1)^{23}+C$; 3: $\frac{(7x-1)^{24}}{168}+C$; 4: $\frac{(7x-1)^{24}}{168}$.

13 Чему равен интеграл $\int x^2 \cdot \sin\left(x^3+1\right)dx$:

1: $-\frac{1}{3}\cos(x^3+1)$; 2: $-\frac{1}{3}\cos(x^3+1)+C$; 3: $\cos(x^3+1)+C$; 4: $3\cos(x^3+1)+C$;
5: $-3\cos(x^3+1)+C$.

14 Чему равен интеграл $\int 2xdx$:

1: x^2+C; 2: x^2; 3: $\frac{x^3}{9}+C$; 4: $2x^2+C$; 5: $-x^2+C$;

15 Дополнить формулировку:
С точки зрения геометрической, неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, каждая из которых получается путем перемещения кривой $y = F(x)$ …

1: параллельно самой себе вдоль оси ОУ; 2: параллельно самой себе вдоль оси ОХ; 3: симметрично относительно начала координат.

Практическое занятие 11

Правила замены переменной и интегрирования по частям

Цель: Выработать практические умения в интегрирование определённых интегралов методами замены переменной и по частям. Приобрести навыки при решении определенного интеграла методами замены переменной и по частям.

Сведения из теории.

Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и функция $F(x)$ - некоторая первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$, то определённый интеграл от функции $f(x)$ на $[a;b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Нахождение определённых интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница осуществляется в два шага:

на первом шаге, используя технику нахождения неопределённого интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для $f(x)$,

на втором подсчитывают разность значений первообразной в точках b и a. Разность этих значений первообразной принято обозначать символом $F(x)\Big|_a^b$, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Следует подчеркнуть, что при применении формулы Ньютона-Лейбница можно использовать любую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, например, имеющую более простой вид при $c = 0$.

Пример 1 Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Замена переменной (интегрирование подстановкой)

Пусть выполняются следующие условия

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$;
2) функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \le t \le \beta$;
3) $a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta)$;
4) функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$,

тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. (6.5)

Пример 2 Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Решение

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \qquad\textit{обозначим} \\ x = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ \textit{если} \quad x = 1, \textit{то } t = 0 \\ \textit{если} \quad x = e, \textit{то } t = 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$; $V = V(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции на $[a;b]$, тогда справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_a^b u\,dV = uV\Big|_a^b - \int\limits_a^b V du. \qquad (6.6)$$

Пример 3 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} x\cos 2x dx$.

Решение

$$\int_0^{2\pi} x\cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dV = \cos 2x dx; & V = \frac{1}{2}\sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\sin 4\pi - \frac{1}{2}\cdot 0\sin 0 + \frac{1}{4}\cos 4\pi - \frac{1}{4}\cos 0 = \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 1 = 0.$$

Интегрирование чётной и нечётной функции

Если $f(x)$ - чётная функция, то есть $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Если $f(x)$ - нечётная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Пример 4 Вычислить интеграл $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, dx$.

Решение

Функция $f(x) = \sin^2 x$ - чётная, так как

$$f(-x) = \sin^2(-x) = \left[\sin(-x)\right]^2 = \left[-\sin x\right]^2 = \sin^2 x = f(x),$$

поэтому

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, dx = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)dx = \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Пример 5 Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$ - нечётная, так как

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 \arcsin(-x)}{\sqrt{1+(-x)^2}} = -\frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} = -f(x),$$

поэтому

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = 0 .$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы

6.6 $\int_{1}^{3} x^3 dx$.

6.7 $\int_{1}^{2} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) dx$.

6.8 $\int_{0}^{3} e^{\frac{x}{3}} dx$.

6.9 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$.

6.10 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^2}$.

6.11 $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

6.12 $\int_{0}^{8} \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} \right) dx$.

6.13 $\int_{1}^{2} \left(x^2 - 2x + 3 \right) dx$.

6.18 $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$.

6.19 $\int_{1}^{2} e^x \left(2 + \frac{x^2}{e^x} \right) dx$.

6.20 $\int_{1}^{2} 2^{3x-4} dx$.

6.21 $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

6.22 $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

6.23 $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

6.34 $\int_{3}^{4} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

6.35 $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2 + 3x + 2}$.

6.36 $\int_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$.

6.37 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{8-x^2} dx$.

6.38 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$.

6.39 $\int\limits_{1}^{2} \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx$.

6.40 $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

6.41 $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x} dx$.

6.42 $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1) dx$.

6.43 $\int\limits_{0}^{\pi} x \sin x dx$.

6.44 $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

6.45 $\int\limits_{-1}^{1} x \operatorname{arctg} x dx$.

6.46 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

6.47 $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \sin x dx$.

6.48 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$.

6.49 $\int\limits_{1}^{e} \cos \ln x dx$.

Практическое занятие 12

Тема: Вычисление несобственных интегралов. Исследование сходимости (расходимости) интегралов

Цель: Выработать навыки исследования сходимости интегралов.

Сведения из теории.

Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются:

1) интегралы с бесконечными пределами;

2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ на полуинтервале $[a;+\infty)$ определяется равенством

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x) dx. \quad (6.28)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же предел не существует или равен ∞, то интеграл называется расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл функции $f(x)$ на $(-\infty;b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (6.29)$$

Несобственный интеграл функции $f(x)$ на $(-\infty;+\infty)$ определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (6.30)$$

где c - любая фиксированная точка оси $0x$.

Пример 1 Вычислить $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3}$.

Решение

По определению имеем (формула (6.28))

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} x^{-3}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{x}\bigg|_1^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right) = \frac{1}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 2 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

Решение

Воспользуемся формулами (6.28), (6.29), (6.30):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{+\infty} e^x dx,$$

В формуле (6.30) полагаем, что $c = 0$.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) = 1,$$

то есть первый интеграл сходится.

Но $$\int_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^x dx = \lim_{b\to\infty} e^x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(e^\infty - e^0\right) = \infty,$$

то есть второй интеграл расходится.

И, следовательно, расходится несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна, но не ограничена на полуинтервале $[a;b)$.

Несобственным интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $y=f(x)$ на $[a;b)$ называется предел $\lim\limits_{\delta\to 0+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$, то есть

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx. \tag{6.31}$$

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла от функции $y=f(x)$ непрерывной, но неограниченной на $(a;b]$

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx. \tag{6.32}$$

Замечание. Если функция $f(x)$ не ограничена при $x=c$, где $c\in[a;b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ также называется несобственным. В этом случае

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx \tag{6.33}$$

считается сходящимся, если сходятся два несобственных интеграла в правой части равенства.

Пример 3 Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x=0$ не ограничена, а потому имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_\delta^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\delta\to 0+}2\sqrt{x}\Big|_\delta^1=\lim_{\delta\to 0+}\left(2-2\sqrt{\delta}\right)=2.$$

Интеграл сходится.

Пример 4 Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x=1$ не ограничена, где $1\in[0;2]$. Тогда по формуле (6.33) имеем

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}=\int\limits_0^1 (x-1)^{-2}d(x-1)+\int\limits_1^2 (x-1)^{-2}d(x-1)=$$

$$=\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_0^{1-\delta}(x-1)^{-2}d(x-1)+\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_{1+\delta}^2 (x-1)^{-2}d(x-1)=$$

$$=-\lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{x-1}\Bigg|_0^{1-\delta}-\lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{x-1}\Bigg|_{1+\delta}^2=-\lim_{\delta\to 0+}\left(\frac{1}{1-\delta-1}-\frac{1}{-1}\right)-\lim_{\delta\to 0+}\left(1-\frac{1}{1+\delta-1}\right)=\infty.$$

То есть данный интеграл расходится.

Задания для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы

6.138 $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4}$.

6.139 $\int\limits_0^\infty e^{-2x}dx$.

6.140 $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$.

6.141 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$.

6.142 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

6.143 $\int\limits_0^\infty x\sin xdx$.

Практическое занятие 13

Тема: Приложения интегрального исчисления

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин и объемов фигур, выработать навыки применения определенного интеграла к вычислению физических величин.

Сведения из теории

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (8)$$

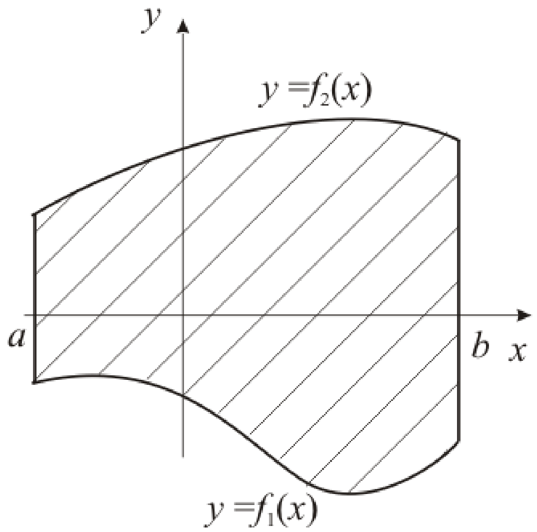


Рис. 1

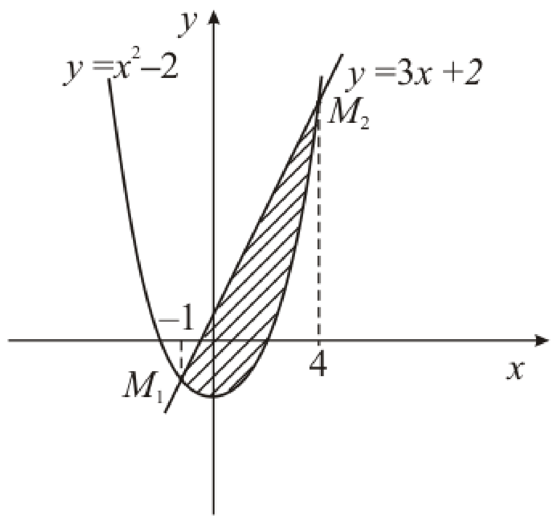


Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2$, $y = 3x + 2$.

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$, $y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$. Итак, $M_1(-1,-1)$, $M_2(4,14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой

$f_2(x)=3x+2,\ f_1(x)=x^2-2,$ поскольку $f_2(x)\geq f_1(x)$ для всех $x\in[-1,4]$. Получим:

$$S=\int_{-1}^{4}\left(3x+2-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{4}\left(3x-x^2+4\right)dx=\left.\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\right|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{3\cdot4^2}{2}-\frac{4^3}{3}+4\cdot4-\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right)=24-\frac{64}{3}+16-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4=$$

$$=44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y=y(t)$ и $x=x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t\in[t_0,t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in[t_0,t_1]$, прямыми $x=a$, $x=b$, где $a=$ $x(t_0)$,

$b=x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S=\left|\int_{t_0}^{t_1}y(t)x'(t)dt\right|. \qquad (9)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$x=2\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\leq t\leq 2\pi.$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра t, $0\leq t\leq 2\pi$.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	–2	0	2
y	0	3	0	–3	0

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB. Согласно формуле (9) получим:

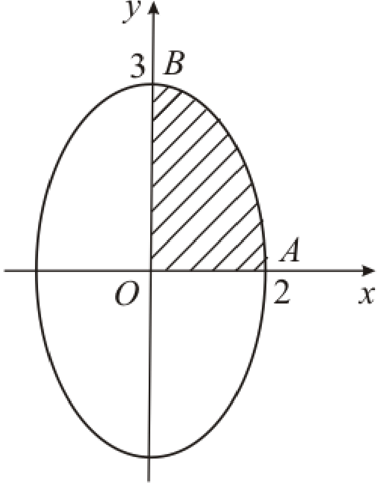


Рис. 3

$$S = 4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\left(2\cos t\right)' dt\right| = 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt\right| = \left\{\begin{matrix} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right)dt\right| = 4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt\right| = 4\left|-3\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right| =$$

$$= 4\left|-3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right| = 4\left|-3\frac{\pi}{2}\right| = 6\pi \approx 18{,}850 \text{ (кв. ед.)}.$$

Длина дуги плоской кривой

1. Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную при всех $x \in [a, b]$, то длина дуги AB (рис. 4) этой кривой, заключенной между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, вычисляется по формуле:

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (10)$$

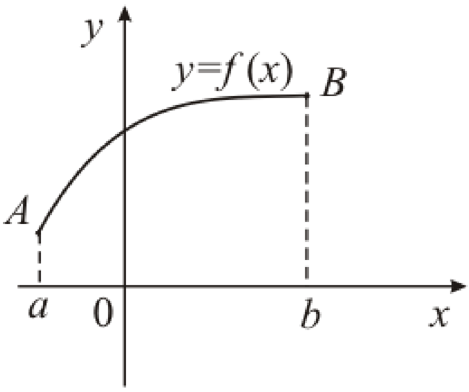


Рис. 4

2. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_0 \le t \le t_1$, и функции $x(t),\ y(t)$ имеют непрерывные производные 1-го порядка при всех $t \in [t_0, t_1]$, то длина дуги AB, соответствующей изменению параметра от t_0 до t_1, вычисляется по формуле:

$$l_{AB} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (11)$$

Пример. Найти длину дуги кривой

а) $y = x^{3/2},\ 0 \le x \le 1;$ б) $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (10). Найдем y': $\qquad y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ и подставим в (10):

$$l_{AB} = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 + \frac{9x}{4}, dt = \frac{9}{4}dx, dx = \frac{4}{9}dt, \\ x = 0 \to t = 1, \\ x = 1 \to t = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4}{9}\int_1^{13/4} t^{\frac{1}{2}}dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{4}{9}\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^{13/4} = \frac{8}{27}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{13/4} = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right) \approx 1{,}440 \ (\text{единиц длины}).$$

б) $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (11). Найдем $x'(t),\ y'(t)$:

$x'(t) = -2\sin t + 2\sin 2t,\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$ и подставим в (11):

$$l_{AB}=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-2\sin t+2\sin 2t\right)^2+\left(2\cos t-2\cos 2t\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 t-8\sin t\sin 2t+4\sin^2 2t+4\cos^2 t-8\cos t\cos 2t+4\cos^2 2t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+4\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)-8\left(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t\right)}\,dt=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем тригонометрические формулы}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\text{ и }\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{matrix}\right\}=\int_0^{2\pi}\sqrt{8-8\cos t}\,dt=$$

$$=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулу}\\ \sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\alpha\right)\Rightarrow\\ \Rightarrow 1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\}=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-8\left(\cos\pi-\cos 0\right)==-8\left(-1-1\right)=16\left(\text{единиц длины}\right).$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f\left(x\right)$, осью *OX* и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V=\pi\int_a^b\left(f\left(x\right)\right)^2dx. \qquad (12)$$

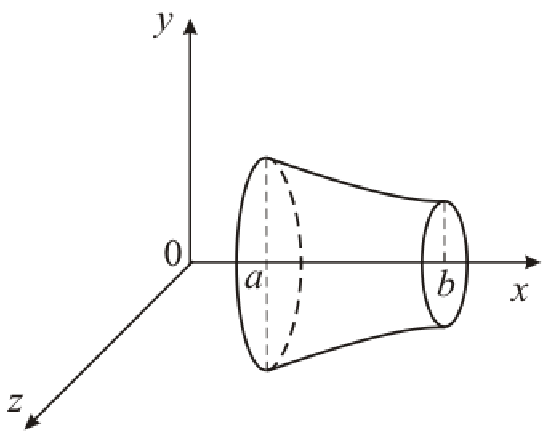


Рис. 5

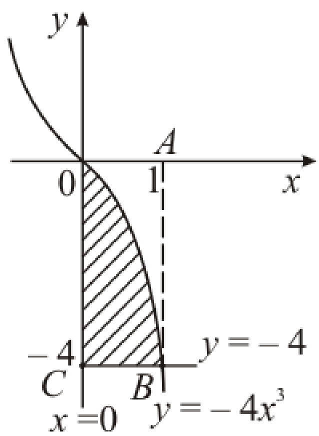


Рис. 6

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями: $y=-4x^3$, $x=0$, $y=-4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры $OABC$, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры OAB. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2: $V_1 = \pi\int\limits_0^1 (-4)^2\, dx = \pi 16x\Big|_0^1 = 16\pi$ (ед. объема);

$$V_2 = \pi\int\limits_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int\limits_0^1 x^6 dx = 16\pi\frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43{,}085 \text{ (ед. объема).}$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$

2) $y = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$

3) $y = 3x^2 + 1,\quad y = 3x + 6$

4) $y = x^2,\ y = x + 1$

5) $y = x^2,\ \ y = 2 - x^2$

6) $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x = 2t - t^2,\quad y = t(t-1),\quad 0 \le t \le 1$

2) $x = t^2 - 1,\quad y = t^3 - t,\quad 0 \le t \le 1$

3) $x = 2\sin t,\quad y = \cos t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

Задание 3. Найти длину дуги кривой.

1) $y = 1 + \ln\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

2) $x = t^2 - 1,\ y = t^3,\ 0 \le t \le 1$

Задание 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2 - y = 0,\quad y = 1$

2) $x^2 + y = 0,\quad y = -1$

Физические приложения определённого интеграла

1. Путь, пройденный телом, перемещающимся со скоростью $V = V(t)$, за промежуток времени $[t_1; t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt.$$

Пример 1 Автобус начинает двигаться с ускорением 1 м/с^2. Какой путь пройдёт автобус за 12 секунд от начала движения?

Решение

Скорость движения автобуса выражается формулой

$V = at$ м/с, то есть $V = t$ м/с.

Согласно формуле (6.26) находим путь, пройденный автобусом от времени $t_1 = 0$ до $t_2 = 12$ секунд:

$$S = \int_0^{12} t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{12} = 72 \text{ м}.$$

2. Работа переменной силы, заданной функцией $F = F(x)$ и направленной вдоль оси $0x$ на отрезке $[a; b]$, равна интегралу

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Пример 2 Сжатие винтовой пружины пропорционально приложенной силе. Найти работу, производимую при сжатии пружины на 3см, если известно, что для сжатия на 0,5см нужно приложить силу в 1Н.

Решение

Сила $F(x)$, требующаяся для сжатия пружины на x м, будет равна kx, где k - коэффициент пропорциональности. При $x = 0{,}005$ м сила $F(x) = k \cdot 0{,}005$. Согласно условию задачи $1 = k \cdot 0{,}005$, следовательно, $k = \dfrac{1}{0{,}005} = 200$.

Значит, $F(x) = 200x$, по формуле (6.27) работа, произведённая силой при сжатии пружины на 3см (0,03 м), равна

$$A = \int_0^{0,03} 200x\,dx = 100x^2\Big|_0^{0,03} = 0{,}09 \text{ Дж}$$

Задания для самостоятельного решения.

6.127 Скорость тела меняется по закону $v = 0{,}03t^2$ м/с. Какой путь пройдёт тело за 10сек? Чему равна средняя скорость движения?

6.128 Скорость автобуса при торможении изменяется по закону $v(t)=(15-3t)$ м/с. Какой путь пройдёт автобус от начала торможения до полной остановки?

6.129 Скорость движения тела задана уравнением $v(t)=\left(12t-3t^2\right)$ м/с. Найти путь, пройденный телом от начала движения до его остановки.

6.130 Скорость движения материальной точки задана уравнением $v(t)=\left(6t^2+4\right)$м/с. Найти путь, пройдённый точкой за пятую секунду.

6.131 Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если сила в 20 Н растягивает пружину на 5 см?

6.132 Для растяжения пружины на 4 см необходимо совершить работу 24 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 150 Дж?

6.133 Вычислить работу, необходимую для того, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила в 1 Н растягивает её на 1 см.

Домашнее задание

Тест

1 Несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\ldots$

1: расходится; 2: $\frac{\pi}{2}$; 3: $-\frac{\pi}{4}$; 4: $\frac{\pi}{4}$.

2 Значение интеграла $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$ равно

1: $\ln 2$; 2: $\ln 4$; 3: $1+\ln 5$; 4: $1+\ln 2$.

3 Значение интеграла $\int_{-1}^{0}(x+1)^4\,dx$ равно

1: $\frac{1}{5}$; 2: $\frac{1}{2}$; 3: 1; 4: $\frac{1}{3}$.

4 Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением

$\rho=3\cos\varphi$, $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$ равна

1: $\frac{\pi}{4}$; 2: $\frac{3}{4}\pi$; 3: $\frac{2}{3}\pi$; 4: $\frac{\pi}{2}$.

5 Несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{3x^5}$ ...

1: расходится; 2: $-\frac{1}{12}$; 3: $\frac{4}{3}$; 4: $\frac{1}{12}$;

6 Площадь фигуры ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ равна

1: $3\frac{3}{4}$; 2: $2\frac{1}{3}$; 3: 2; 4: 1.

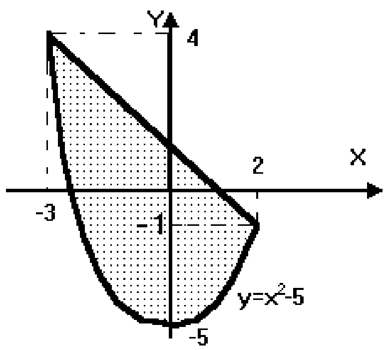
7 Путь, пройденный точкой за промежуток времени от t = 0, до t = 5, если скорость точки меняется по закону $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$ равен…

3: 155м; 4: 150м.

8 Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt{x+1}$ и прямой $2y - x = 1$, равен

1: $\frac{8\pi}{3}$ куб.ед.; 2: $\frac{\pi}{3}$ куб.ед; 3: $\frac{4\pi}{3}$ куб.ед ; 4: 2π куб.ед.

9 Какой из следующих интегралов представляет площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже?



1: $\int\limits_{-3}^{2} [(x^2 - 5) - (x + 1)]dx$; 2: $\int\limits_{-3}^{2} [(1 + x) - (x^2 - 5)]dx$;

3: $\int\limits_{-3}^{2} [(-1 - x) - (x^2 - 5)]dx$; 4: $\int\limits_{-3}^{2} [(1 - x) - (x^2 - 5)]dx$.

10 Пусть кривая AB задана уравнением y=f(x), где f(x) –непрерывная функция, имеющая непрерывную первую производную во всех точках сегмента [a, b].
Тогда дуга AB имеет длину, равную…

1: $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2}dt$; 2: $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi$; 3: $l=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$;

11 Несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$…

1: 2; 2: -2; 3: 1; 4: расходится.

12 Объем тела образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой $y^2=(x+2)^3$ и прямой x = -1 равен

1: $\frac{\pi}{2}$; 2: $\frac{\pi}{4}$; 3: $\frac{\pi}{3}$; 4: π.

13 Вычисление интеграла $I=\int\limits_{0}^{\pi/2}tg\,x\,dx$ приводит к следующему результату

1: расходится; 2: -1; 3: 0; 4: π.

14 Работа, затраченная на растяжение пружины на 0,05м, если сила 100Н растягивает пружину на 0,01м, равна…

1: 12,5 Дж; 2: 1,25 Дж; 3: 0,25 Дж; 4: 125 Дж.

Практическое занятие 14,15,16

Тема: Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородное дифференциальное уравнение.

Цель: Выработать навыки решения дифференциальных уравнений.

Сведения из теории

Основные понятия

Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и её производные или дифференциалы различных порядков называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение. Например, уравнение $y'\sin x + y\cos x = 1$ - первого порядка; $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$ - второго порядка; $y''' = xy$ - третьего порядка и т.д.

Решением дифференциального уравнения называется функция y=y(x), удовлетворяющая этому уравнению. Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Если решение уравнения получено в неявном виде $\varphi(x,y) = 0$, то оно обычно называется интегралом уравнения.

Задача Коши для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1}) \qquad (1)$$

ставится следующим образом. Среди всех решений уравнения (I) требуется найти решение y=y(x), для которого функция y(x) вместе со своими производными до (n-I)-го порядка включительно принимает заданные значения $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{n-1}$, при заданном значении x_0 аргумента x, т.е.

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1} \end{cases} \qquad (2)$$

где $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{n-1}$ - заданные числа.

Условия (2) называются начальными условиями решения *y=y(x)*, а само это решение - частным решением уравнения (I), удовлетворяющим начальным условиям (2).

Общее решение уравнения (I) - это решение вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящее от произвольных постоянных C_1,C_2, …, C_n, которые можно подобрать таким образом, чтобы удовлетворить любой системе начальных условий.

Частное решение уравнения (I) может быть получено из общего решения при некоторых числовых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$

Геометрически общее решение (общий интеграл) изображается семейством интегральных кривых, а частное решение (частный интеграл) - одной из этих интегральных кривых.

6.1 Дифференциальные уравнения I порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } y' = f(x, y)$$

где y - неизвестная функция;   x - независимая переменная.

Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка имеет вид $\varphi(x, C) = 0$ или Ф (x, y, c) = 0 - соответственно. Для получения частного решения (частного интеграла), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x) = y_0$, надо найти соответствующее значение $C = C_0$, подставляя в общее решение (общий интеграл) значения x_0 и y_0 . Будем иметь $y = \varphi(x, C_0)$ или Ф (x, y, c) = 0

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (1)$$

Поделив обе части уравнения (I) на $N_1(y)M_2(x)$ получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 \qquad (2)$$

в котором переменные разделены. Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

Однородные уравнения I порядка

Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется однородным, если P(x,y) и Q(x,y)- однородные функции одного измерения. Функция F(x,y) называется однородной измерения m , если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Оно приводится к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Где $f\left(\frac{y}{x}\right)$ - однородная функция нулевой степени однородности. Однородное уравнение с помощью подстановки $\left(\frac{y}{x}\right) = u$ или $y=ux$, $(y'=u'v+uv')$, приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции u. При этом $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$, или $dy = xdu + udx$.

Интегрируя получившееся уравнение с разделяющимися переменными, и, заменяя затем $u = \left(\frac{y}{x}\right)$, находим искомое общее решение (общий интеграл) данного однородного уравнения.

Линейные уравнения I порядка

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно линейно (т.е. первой степени) относительно искомой функции y и её производной y'. Общий вид линейного уравнения

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (1).$$

Линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными, если искомую функцию y заменить произведением двух вспомогательных функций u и v, т.е. положить $y=uv$. Тогда $\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$ и данное уравнение (1) примет вид

$$v\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+P(x)v\right]=Q(x) \qquad (2)$$

Пользуясь тем, что одну из вспомогательных функций, например v можно выбрать произвольно, подберем ее так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль, т.е. в качестве v возьмем одно из частных решений $v=v(x)$ уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0$$

Подставлял выражение $v=v(x)$ в уравнение (2), получаем уравнение относительно функции u:

$$v\frac{du}{dx}=Q(x), \qquad (3)$$

которое также является уравнением с разделяющимися переменными. Най-дя общее решение уравнения (3) в виде $u=u(x,C)$ получив общее решение линейного уравнения (1):

$$y=u(x,C)\cdot v(x)$$

Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y'+P(x)y=Q(x)y^n$, где P и Q функции, зависящие только от x и n-рациональное число , называется уравнением Бернулли.

При n=0 имеем линейное уравнение. Уравнение Бернулли решается также подстановкой $y=uv$.

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y'=(y+1)ctgx$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx и разделим на множитель *(y+1)*. Получим уравнение с разделенными переменными: $\frac{dy}{y+1} = ctgxdx.$

Интегрируя обе части уравнения и беря произвольную постоянную в вида $\ln C$, получим $\ln|y+1| = \ln|\sin x| + \ln C.$

Потенцируя, находим общее решение: $y = C\sin x - 1.$

Найдем значение С, соответствующее начальным условиями: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $2 = C\sin\frac{\pi}{2} - 1$, откуда С = 3. Подставим С = 3 в формулу общего решения. Получим, $y = 3\sin x - 1$ есть частное решение, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

Решение. Здесь $P = x^2 + 2xy$, $Q = xy$. Функции однородные второго измерения. Введем подставку *y =ux*, тогда $dy = xdu + udx$.

Данное уравнение примет вид: $(x^2 + 2x^2u)dx + ux^2(xdu + udx) = 0$, или $(x^2 + 2x^2u + u^2x^2)dx + ux^3du = 0$.

Разделяя переменные и интегрируя, имеем: $\frac{dx}{x} + \frac{udu}{(u+1)^2} = 0$,

$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{udu}{(u+1)^2} = C$, $\ln|x| + \int\frac{u+1-1}{(u+1)^2}du = C$, $\ln|x| + \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = C$.

Возвращаясь к прежней неизвестной функции *y* заменой "*u*" на $\frac{y}{x}$, получаем $\ln|x| + \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = C$, $\ln\left|x(\frac{y}{x} + 1)\right| + \frac{x}{x+y} = C$.

Пример 3. Решить уравнение $y' - yctgx = \sin x$.

Решение. Данное уравнение является линейным, так как оно содержит искомую функцию *y* и её производную y' в первой степени и не содержит их произведений.

Применяем подстановку $y = uv$, где *u* и *v* - некоторые неизвестные функции аргумента *x*. Если $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид $u'v + uv' - uvctgx = \sin x$ или $u'v + u\left(v' - vctgx\right) = \sin x$.

Так как искомая функция представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию v так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках левой части равенства, обращалось в нуль. Тогда данное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

I) $v' - vctgx = 0$

$$\frac{dv}{dx} = vctgx$$

$$\frac{dv}{v} = ctgxdx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int ctgxdx$$

$$\ell nv = \ell n \sin x$$

$$v = \sin x$$

II) $u'v = \sin x$

$$\frac{du}{dx} \sin x = \sin x$$

$$du = dx$$

$$\int du = \int dx$$

$$u = x + c$$

Т.к. $y = uv$, то $y = (x + c)\sin x$ - общее решение.

Пример 4. Найти общий интеграл уравнения: $x^2y^2y' + xy^3 = 1$

Решение. Разделив обе части уравнения на x^2y^2, убеждаемся, что данное уравнение является уравнением Бернулли: $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^{-2}}{x^2}$

Заменяя функцию y по формуле $y=uv$, имеем $y' = (uv)' = u'v + uv'$,

$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2u^2v^2}$ или $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2u^2v^2}$

Отсюда получаем два уравнения с разделяющимися переменными:

1) $\left(v' + \frac{v}{x}\right) = 0$ и 2) $u'v = \frac{1}{x^2u^2v^2}$

Решая первое уравнение, находим v как простейший частный интеграл этого уравнения: $v = \frac{1}{x}$. Подставляя v во второе уравнение и решая его, находим u как общий интеграл этого уравнения: $\frac{u'}{x} = \frac{1}{u^2}$, $u^2du = xdx$, $\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{3}$, $u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}$. Следовательно, искомый общий интеграл данного уравнения $y = uv = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}$

Задания для самостоятельного решения.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(1+y^2)dx=(1+x^2)dy$

б) $y'=e^{x+y}$

2. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:

а. $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0$, если $y(0)=1$

б) $y'ctgx+y=2$, если $y(0)=-1$

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x+2y)dx-xdy=0$

б) $y^2+x^2y'=xyy'$

4. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:

$(2x-3y)dx+xdy=0$, если $y(1)=-1$

5. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$

б) $ydx+2(x+y)dy=0$

6. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:

а) $y'-2xy=1$, если $y(0)=0$

б) $xy'+y-e^x=0$, если $y(a)=b$

7. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

$y'-2xy=3x^3y^2$

8. Найти частные решение уравнения, удовлетворяющие указанным условиям:

$(1-x^2)y'+2xy=xy^2$, если $y(0)=0{,}5$

Домашнее задание:

Тест

1 Дополнить формулировку:

Уравнение, связывающее неизвестную функцию, аргумент и ... называется дифференциальным.

1: производные;	2: дифференциалы;
3: производные и дифференциалы;	4: определение полное.

2 Дополнить формулировку:
Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка содержит ... произвольных постоянных.

1: две; 2: n-1; 3: n+1; 4; n.

3 Определить вид дифференциального уравнения $xy' - 2y - 2x = 0$

1: линейное; 2: с разделяющимися переменными;
3: уравнение Бернулли; 4: однородное уравнение.

4 Какая из функций не является решением заданного дифференциального уравнения 1-го порядка $x' + 3x = e^{2t}$

1: $x(t) = e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$; 2: $x(t) = Ce^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$;

3: $x(t) = e^{2t} + Ce^{-3t}$; 4: $x(t) = e^{-3t}\left(\frac{1}{5}e^{5t} + C\right)$.

5 Уравнение $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$ является общим решением дифференциального уравнения вида

1: $x + yy' = 0$; 2: $x + 2y = 0$; 3: $2x + 2y' = 0$; 4: $x + yy' = 4$.

6 Частное решение дифференциального уравнения $(x^2+1)y' = 2x(4-y)$ при y(0)=1 имеет вид...

1: $4 - \frac{3}{x^2+1}$; 2: $\frac{4x^2+1}{x^2+1}$; 3: $4 + \frac{1}{x^2+1}$; 4: $-4 + \frac{5}{x^2+1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007
2. Математика: учебное пособие/Т.А.Гулай, А.Ф.Долгополова, В.А.Жукова, С.В.Мелешко, И.А.Невидомская; - Ставрополь, 2019. - 145 с.
3. Математика. Часть 1: учебное пособие. - изд. 3-е, перераб. и доп. /Т.А.Гулай, А.Ф.Долгополова, В.А.Жукова, С.В.Мелешко, И.А.Невидомская. Ставрополь: СЕКВОЙЯ, 2019. - 126 с.
4. Литвин Д.Б., Таволжанская О.Н. Ряды: учебное пособие. – Ставрополь : Сервисшкола, 2016. – 87с.
5. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В./ - М.: Издательский центр «Академия», 2009
6. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
7. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2006
8. Спирина М.С. дискретная математика: учеб. – М.: Издательский центр «Академия», 2006
9. Ряды: учебное пособие / Д.Б. Литвин, Т.А. Гулай, И.И. Мамаев. – Ставрополь : Сервисшкола, 2017. – 88с.
10. Элементы теории вероятностей и математической статистики: учебное пособие/ Т.А.Гулай, А.Ф.Долгополова, В.А.Жукова, С.В.Мелешко, И.А.Невидомская; Ставропольский гос. аграрный ун-т - Изд 3-е, перераб. и доп. - Ставрополь, 2019. - 112 с.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИКА

Методические указания к практическим занятиям по учебной дисциплине ОУП.03У МАТЕМАТИКА

Методические указания составлены в соответствии с программой общеобразовательного учебной дисциплины ОУП.03У «Математика». В методических указаниях приведена структура и содержание практических занятий, предусмотренных рабочей программой предмета.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания предназначены для студентов и служат пособием при работе на практических занятиях, предусмотренных рабочими учебными планами, запланированных в рабочих программах.

Содержание и объем практических занятий общеобразовательного учебного предмета ОУП.03У «Математика» соответствует требованиям ФГОС СПО, реализуемого в пределах ППССЗ с учетом технологического профиля профессионального образования.

Практические задания направлены на подтверждение теоретических положений и формирование учебных умений, они составляют важную часть теоретической подготовки по освоению дисциплины.

Результат выполнения практических заданий оценивается по пятибалльной системе.

В данных методических указаниях приведено 108 часов практических занятий. Каждое практическое занятие содержит тему, цель, сведения из теории, практико-ориентированные задания, вопросы для закрепления, задания для самостоятельного решения, домашнее задание.

Практическое занятие 1

Действия над действительными числами

Цель: повторить действия над действительными числами.

Сведения из теории:

Дроби делятся на обыкновенные и десятичные. Десятичная дробь- это, по существу другая форма записи. В виде десятичной дроби можно представить любую обыкновенную дробь, знаменатель которой является делителем некоторой степени числа 10. Если к десятичной дроби приписать справа нуль или несколько нулей, то получится равная ей дробь. Если десятичная дробь оканчивается одним или несколькими нулями, то эти нули можно отбросить- получится равная ей дробь.

При сложении десятичных дробей надо записать их одну под другой так, чтобы одинаковые разряды были друг под другом, а запятая -под запятой, и сложить дроби так, как складывают натуральные числа. В ответе запятая располагается под запятыми Например,

+	0,	1	2
	1,	0	5
	1,	1	7

.

Аналогично выполняется вычитание десятичных дробей. **При умножении десятичных дробей** достаточно перемножить заданные числа, не обращая внимания на запятые (как натуральные числа), а затем в результате справа отделить запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях суммарно.

	×	2,	1	2
		0,	1	3
		6	3	6
	2	1	2	
0,	2	7	5	6

Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как деление натурального числа на натуральное, а запятую в частном ставят после того, как закончено деление целой части. Для того чтобы **разделить десятичную дробь на десятичную** нужно и в делимом и в делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их имеется в делителе. **Для того чтобы сложить (или вычесть) две обыкновенные дроби с разными знаменателями** нужно предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю, затем сложить (вычесть) числитель первой дроби с числителем второй дроби, а знаменатель оставить тем же.

Например , $\frac{7}{9}+\frac{5}{12}=\frac{28}{36}+\frac{15}{36}=\frac{43}{36}=1\frac{7}{36}$

Произведение двух дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель равен произведению знаменателей. Два числа называются взаимно обратными, если их произведение равно 1.

Например, 3 и $\frac{1}{3}$.

При делении обыкновенной дроби на обыкновенную дробь числитель делимого умножают на знаменатель делителя, а знаменатель делимого- на числитель делителя. Первое произведение служит числителем, а второе знаменателем частного.

Процентом называется сотая часть какого-либо числа.

Самостоятельная работа

1. $\left(\frac{51}{60}\cdot\frac{12}{17}\right):\frac{3}{10}$;

2. $\left(3\frac{1}{12}+1\frac{5}{12}\right):1\frac{1}{2}$;

3. $\frac{\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}3}{0{,}2}$

4.

$$\frac{215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+0{,}5}{0{,}0001:0{,}005}$$

5. Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 26 кг яблок?

6. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за 1 минуту разговора
«Повременный»	Нет	0,35 руб.
«Комбинированный»	140 руб. за 350 мин.	0,3 руб. (сверх 350 мин. в месяц)
«Безлимитный»	200 руб.	—

Абонент выбрал самый дешѐвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составляет 700 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет составлять 700 минут? Ответ дайте в рублях.

7.Стоимость проездного билета на месяц составляет 800 рублей. А стоимость билета на одну поездку 22 рубля. Аня купила проездной и сделала за месяц 45 поездок. Сколько рублей она сэкономила?

8.

$$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\cdot\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}$$

9. В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 6 человек следует взять 2,5 фунта чернослива, ¼ фунта миндаля и 1/3 фунта сливочного масла. Сколько граммов чернослива следует взять для пирога, расчитанного на 9 человек?

Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

***Домашнее задание*:** учебник с. 10 №1. с.15 №7.

Практические занятия 2.
Приближенные вычисления

Цель:

Показать формулы для вычисления границ абсолютной и относительной погрешности суммы, разности, произведения и частного приближенных значений чисел;

Научить вычислять сумму, разность, произведение и частное приближенных значений чисел.

Сведения из теории:

Сложение приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b,$$

где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности сумы вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a+b}=\frac{\Delta(a+b)}{a+b}.$$

Пример 1.

Найти сумму S приближенных значений чисел 6,8±0,05; 4,3±0,05 и 3,575±0,0005.

Решение:

вычислим сумму заданных чисел и сумму их погрешностей:

$$S=6,8+4,3+3,575=14,675;$$

$$\Delta S=0,05+0,05+0,0005=0,1005.$$

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах 0,05<0,1005<0,5. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц S=14,675≈15.

Вычитание приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей:

$$\Delta(a\text{-}b)=\Delta a+\Delta b.$$

Граница относительной погрешности разности вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a\text{-}b}=\frac{\Delta a+\Delta b}{a-b}.$$

Пример 2.

Вычислить разность двух приближенных значений чисел a=5,863±0,0005 и b=2,746±0,0005. Найти $\Delta(a\text{-}b)$ и $\varepsilon_{a\text{-}b}$.

Решение:

вычисляем границу абсолютной погрешности разности a-b:

$\Delta(a\text{-}b)$=0,0005+0,0005=0,001.

В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной, так как $\Delta(a\text{-}b)$>0,0005. Итак, a-b=3,117≈3,12. Абсолютная погрешность разности 0,001. В приближенном числе 3,12 все цифры верные. Находим относительную погрешность разности:

$$\varepsilon_{a\text{-}b}=\frac{0{,}001}{3{,}12}=0{,}00032\approx 0{,}03\%.$$

Умножение приближенных значений чисел

Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного) сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного), а затем границу абсолютной погрешности произведения (частного).

Формулы для границ абсолютной и относительной погрешности некоторых функций приведены в таблице 1.

Таблица 1. Формулы для границ абсолютной и относительной погрешностей.

№ п/п	Функция	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности
1	$y=ab$	$\Delta y=\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$
2	$y=abc$	$\Delta y=\lvert bc\rvert\cdot\Delta a+\lvert ac\rvert\cdot\Delta b+\lvert ab\rvert\cdot\Delta c$	$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}$
3	$y=a^n$	$\Delta y=n\,a^{n-1}\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=n\frac{\Delta a}{a}$
4	$y=a^2$	$\Delta y=2a\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=2\frac{\Delta a}{a}$
5	$y=a^3$	$\Delta y=3a^2\cdot\Delta a$	$\varepsilon_y=3\frac{\Delta a}{a}$

6	$y=\sqrt{a}$	$\Delta y=\dfrac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y=\dfrac{\Delta a}{2a}$
7	$y=\sqrt[3]{a}$	$\Delta y=\dfrac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y=\dfrac{\Delta a}{3a}$
8	$y=\dfrac{a}{b}$	$\Delta y=\dfrac{\lvert b\rvert\cdot\Delta a+\lvert a\rvert\cdot\Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y=\dfrac{\Delta a}{a}+\dfrac{\Delta b}{b}$

Пример 3.

Найти верные цифры произведения приближенных значений чисел a=0,3862 и b=0,8.

Решение:

имеем 0,3862·0,8=0,30896. Границы абсолютной погрешности сомножителей равны 0,00005 и 0,05. По формуле $\varepsilon_{ab}=\dfrac{\Delta a}{a}+\dfrac{\Delta b}{b}$ находим относительную погрешность произведения:

$$\varepsilon_{ab}=\frac{0{,}00005}{0{,}3862}+\frac{0{,}05}{0{,}8}=0{,}063.$$

Находим границу абсолютной погрешности произведения:

$\Delta(ab)$=0,30896·0,063=0,0195;

0,005<0,0195< 0,05.

Полученный результат означает, что в произведении одна верная цифра (в разряде десятых): 0,30896≈0,3.

Пример 4.

Вычислить объем цилиндра $V=\pi R^2H$, если R=45,8 см, H=78,6 см.

Решение:

по формуле объема цилиндра, имеем

$$V=\pi\cdot 45{,}8^2\cdot 78{,}6=517000\ (\text{см}^3).$$

Используя формулу $\varepsilon_y=\dfrac{\Delta a}{a}+\dfrac{\Delta b}{b}+\dfrac{\Delta c}{c}$ и полагая π≈3,14, находим относительную погрешность:

$$\varepsilon_V=\frac{\Delta\pi}{\pi}+\frac{2\Delta R}{R}+\frac{\Delta H}{H}=\frac{0{,}005}{3{,}14}+\frac{2\cdot 0{,}05}{45{,}8}+\frac{0{,}05}{78{,}6}=0{,}0044.$$

Находим границу абсолютной погрешности:

$$\Delta V=V\cdot\varepsilon_V=517\,000\cdot 0{,}0044=2270\ (\text{см}^3).$$

Верными цифрами являются 5 и 1.

Деление приближенных значений чисел

Пример 5.

Найти границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел a=8,36±0,005 и b=3,72±0,004.

Решение:

имеем 8,36:3,72=2,25.

По формуле $\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$ находим относительную погрешность частного:

$$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{0,005}{8,36} + \frac{0,004}{3,72} = 0,002 = 0,2\%.$$

Находим границу абсолютной погрешности частного:

$\Delta(a/b)$=2,25·0,002=0,0045.

Полученный результат означает, что в частном все три цифры верные.

Пример 6.

Вычислить $X=\frac{a}{b+c}$, если известно, что a=7,2±0,05, b=3,46±0,03, c=5,09±0,04.

Решение:

находим $X = \frac{a}{b+c} = \frac{7,2}{3,46+5,09} = 0,844$;

$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b + \Delta c}{b+c} = \frac{0,05}{7,2} + \frac{0,03+0,04}{8,55} = 0,015$;

$\Delta X = X \cdot \varepsilon_X$=0,844·0,015=0,0127; X=0,844±0,0127 или $X \approx$0,84±0,01.

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите сумму, разность, произведение и частное приближенных значений чисел:

1 вариант $\sqrt{13}.\sqrt{5}$ с четырьмя значащими цифрами.	**2 вариант** 0,456±0,0005 и 3,35±0,005.	**3 вариант** $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ с четырьмя значащими цифрами.
4 вариант 8,72 и 2,6532, границы абсолютной погрешности которых соответственно равны 0,005 и 0,00005.	**5 вариант** 6,54±0,005; 16,022±0,0005 и 1,9646±0,00005.	**6 вариант** $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ взяв приближенные значения корней с точностью до 0,001.
7 вариант $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}$ с четырьмя значащими цифрами.	**8 вариант** a=19,8±0,05 и b=48,4±0,03.	**9 вариант** a=68,4±0,02 и b=72,8±0,4.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите действия над приближенными значениями чисел.
2. Перечислите формулы для вычисления границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций.

Домашнее задание: учебник с18 № 4,5; с.22 №2.

Практическое занятие № 3,4

Вычисление и сравнение корней. Расчет по формулам, содержащим радикалы.

Цель:

Показать основные показательные тождества, свойства степеней с действительными показателями; научить вычислять степени с действительными показателями.

Сведения из теории:

Повторим определения *понятия степени* с натуральным, нулевым, целым отрицательным и рациональным показателями:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}};\ a^{-n}=1/(a^n);\ a^0=1,\ a\neq 0;\ a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m},$$

$$m\in\boldsymbol{Z},\ n\in\boldsymbol{N},\ n\geq 2.$$

Степень с действительным показателем

Свойства степеней с действительным показателем:

1. $a^{x/y}=a^{(xk)/(yk)}$, $a>0$, $y, k\in\boldsymbol{N}$, $x\in\boldsymbol{Z}$.

2. $a^x>0$, $a>0$, $x\in\boldsymbol{R}$ (любая степень положительного числа положительна).

3. $a^x>1$ при $a>1$, $x>0$.

4. $a^x<1$ при $a>1$, $x<0$.

5. $1^x=1$ (любая степень единицы равна единице).

6. $a^x<1$ при $0<a<1$, $x>0$.

7. $a^x>1$ при $0<a<1$, $x<0$.

8. Если $a>1$, $a\neq 1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число x такое, что $a^x=b$ при $b>0$.

9. Любая положительная степень нуля равна нулю.

Кроме перечисленных свойств важно отметить три свойства, на которых основано решение простейших показательных уравнении и неравенств:

10. Если $a^x=a^y$, то $x=y$ при $a>0$, $x, y\neq 1$.

11. Если $a^x<a^y$, то $x<y$ при $a>0$.

12. Если $a^x<a^y$, то $x>y$ при $0<a<1$.

Правила действия над степенями с действительным показателем выражаются формулами (тождествами):

Свойства степеней	Свойства корней n-ой степени
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^0 = 1$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 10. $\lvert ab\rvert^{\alpha}=\lvert a\rvert^{\alpha}\lvert b\rvert^{\alpha}$ при $ab>0$. 11. $\lvert a/b\rvert^{\alpha}=\lvert a\rvert^{\alpha}/\lvert b\rvert^{\alpha}$ при $ab>0$.	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$ $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ $\sqrt[n\cdot k]{a^{n\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Пример 1.

Вычислите: $\dfrac{7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} - 64^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2}}{5^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

Решение:

упростим заданное выражение, использую свойства степеней:

$$\frac{7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} - 64^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2}}{5^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{7}\cdot 49^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}{\frac{1}{5}-9^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{7}\sqrt{49}-\sqrt{\frac{1}{64}}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-\sqrt{9}} = \frac{\frac{1}{7}\cdot 7-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}-3} =$$

$$== \frac{1-\frac{1}{72}}{-2\frac{4}{5}} = \frac{\frac{72}{72}-\frac{1}{72}}{-\frac{14}{5}} = \frac{\frac{71}{72}}{\left(-\frac{14}{5}\right)} = \frac{71}{72}\cdot\left(-\frac{5}{14}\right) = -\frac{355}{1008}.$$

Пример2.

Вычислите: $\dfrac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}} - 2^{-1}}{64^{0,25}\cdot 2^{0,5}}$.

Решение:
упростим заданное выражение, использую свойства степеней:

$$\frac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{0,25}\cdot 2^{0,5}}=\frac{\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}{\left(2^6\right)^{0,25}\cdot 2^{0,5}}=\frac{2^{-2}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}}-\frac{1}{2}}{2^{1,5}\cdot 2^{0,5}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{2^2}=\frac{\frac{1}{20}-\frac{1}{2}}{4}=$$

$$=\frac{-\frac{9}{20}}{4}=-\frac{9}{80}.$$

Пример 3.

Вычислите: $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$.

Решение:
используя свойства степеней, имеем:

$$\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}=\sqrt[5]{\left(7-\sqrt{17}\right)\left(7+\sqrt{17}\right)}=\sqrt[5]{7^2-(\sqrt{17})^2}=\sqrt[5]{49-17}=$$

$$=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2.$$

Задания для самостоятельного решения:

1. Найдите значение выражения: $9^{\sqrt{2}+6}\cdot 9^{-1-\sqrt{2}}$
2. Найдите значение выражения: $\frac{x^{15}\cdot x^{-4}}{x^7}$ при $x=8$
3. Найдите значение выражения: $\frac{x^{16}\cdot x^{10}}{x^{23}}$ при $x=8$
4. Вычислить без калькулятора $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}$
5. Вычислить без калькулятора $\sqrt{9\cdot 121\cdot 64}$;

   Вычислить без калькулятора $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$;
6. Вычислить без калькулятора $\sqrt{13^2-12^2}$;
7. Вычислить без калькулятора $\sqrt{313^2-312^2}$;
8. Вычислить без калькулятора $\sqrt{936^2-864^2}$;
9. Вычислить без калькулятора $\sqrt{325^2-300^2}$;
10. Вычислить без калькулятора $\sqrt{35^2-28^2}$;
11. Вычислить без калькулятора $\sqrt{320^2-192^2}$;
12. Вычислить без калькулятора $\sqrt{610^2-272^2}$;
13. Вычислить без калькулятора $\sqrt{0,09}+\sqrt{0,16}$;

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
№1. Вычислите: 1) $2\cdot 2^{-3}$; 2) $\frac{\left(3^{-2}\right)^3\cdot 27^2}{3}$. №2. Упростите: $b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{6}}$.	№1. Вычислите: 1) $5^{-2}\cdot 5$; 2) $\frac{\left(2^{-2}\right)^4\cdot 16^2}{2^3}$. №2. Упростите: $a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{4}}$.	№1. Вычислите: 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 2) $3\sqrt[3]{-27}+0,1\sqrt[4]{81}-\sqrt{1}$. №2. Упростите: $x^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}}$.

4 вариант	5 вариант	6 вариант
№1. Вычислите: 1) $\left(\sqrt{5}\right)^{-8}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. №2. Упростите: $\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^{4} y^{\frac{5}{2}}$.	№1. Вычислите: 1) $5 \cdot 8^{\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-12}$. №2. Упростите: $\frac{c^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{6}}}$.	№1. Вычислите: 1) $36^{\frac{1}{2}} \cdot 2$; 2) $\frac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}$. №2. Упростите: $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} x^{\frac{2}{3}}$.
7 вариант №1. Вычислите: 1) $16^{-\frac{1}{2}}$; 2) $5\sqrt[4]{16} - 0{,}2\sqrt[3]{-0{,}027} + \sqrt[5]{1}$. №2. Упростите: $a^{\frac{7}{2}} \sqrt{a}$.	**8 вариант** №1. Вычислите: 1) $27^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[5]{32 \cdot 0{,}00001}$. №2. Упростите: $y^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{y}$.	**9 вариант** №1. Вычислите: 1) $\sqrt[4]{0{,}0001 \cdot 16}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$. №2. Упростите: $2\sqrt[3]{\sqrt{a}} - \sqrt[6]{ab} : \sqrt[6]{b}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные показательные тождества.
2. Перечислите свойства степеней с действительными показателями.

Домашнее задание: учебник с.36 №1, 2,3.

Практическое занятие № 5

Преобразования рациональных, иррациональных, степенных выражений.

Цель: Повторение, закрепление и систематизация знаний по теме.

Сведения из теории:

Выражениями в алгебре называют записи, состоящие из чисел и букв, соединенных знаками действий.

$\frac{3x}{4x+1}$; $a^2 - b^2 + c$; $\sqrt{x-2} + 9$; x^n – алгебраические выражения.

В зависимости от операций различают рациональные и иррациональные выражения.

Алгебраические выражения называют рациональными, если относительно входящих в него букв a, b, c, … не выполняется никаких других операций, кроме операций сложения, умножения, вычитания, деления и возведения в целую степень.

Алгебраические выражения, содержащие операции извлечения корня из переменной или возведения переменной в рациональную степень, не являющуюся целым числом, называются иррациональными относительно этой переменной.

Тождественным преобразованием данного выражения называется замена одного выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве.

В основе тождественных преобразований рациональных и иррациональных выражений лежат следующие теоретические факты.

1. Свойства степеней с целым показателем:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - множителей}}$, $n \in \mathrm{N}$; $a^1 = a$;

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $n \in \mathrm{N}$, $a \neq 0$; $a^0 = 1$, $a \neq 0$;

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a \neq 0$;

$a^n : a^m = a^{n-m}$, $a \neq 0$;

$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$, $a \neq 0$;

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;

$(ab)^m = a^m b^m$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

2. Формулы сокращенного умножения:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$;

где a, b, c – любые действительные числа;

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $a \neq 0$, x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

3. Основное свойство дроби и действия над дробями:

$\dfrac{a \cdot c}{b \cdot c} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a : c}{b : c}$, где $b \neq 0$, $c \neq 0$;

$\dfrac{a}{c} \pm \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \pm b}{c}$; $\dfrac{a}{c} \pm \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{cd}$;

$\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$; $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$.

4. Определение арифметического корня и его свойства:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$; $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$; $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$,

где a, b – неотрицательные числа, $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$, $m \in \mathrm{N}$, $m \geq 2$.

Практические задания:

1.

$$8^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}-16:16^{\frac{3}{4}}+\left(9^{\frac{1}{7}}\right)^{\frac{7}{2}}=8^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{4}}+9^{\frac{1}{2}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}-\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}+\left(3^2\right)^{\frac{1}{2}}=2^2-2+3=4-2+3=5$$

$$16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^3=8;$$

$$7^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{7^5}=\sqrt[4]{7^4\cdot 7}=7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^{-2}}=\sqrt[3]{3^{-6}}=\sqrt[3]{(3^{-2})^3}=3^{-2}=\frac{1}{9}.$$

2.

1) $7^{\frac{1}{4}}\cdot 7^{\frac{3}{4}}=7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=7;$

2) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3;$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}=16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}}=16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^{4\cdot\frac{3}{4}}=2^3=8;$

4) $24^{\frac{2}{3}}=(2^3\cdot 3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\cdot\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}=4\sqrt[3]{3^2}=4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}=\frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}.$

3.

Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=ab.\ \triangleleft$$

4.

Упростить выражение $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}\cdot a^{4-\sqrt{5}}}.$

Применяя свойства степени с действительным показателем, получаем

$$\frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}\cdot a^{4-\sqrt{5}}}=\frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}}=\frac{a^2}{a}=a.\ \triangleleft$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить: а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}$; в) $150^{\frac{3}{2}}:6^{\frac{3}{2}}$; г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+810000^{0,25}-\left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$

2. Представить в виде степени с рациональным показателем: а) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}$; б) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$;

3. Вычислить: а) $3^{1+2\sqrt[3]{2}}:9^{\sqrt[3]{2}}$; б) $\left(25^{1+\sqrt{2}}-5^{2\sqrt{2}}\right)\cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$;

4. Сравнить числа: а) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}$; в) $0,88^{\frac{1}{6}}$ или $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$ г) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ или $(0,41)^{-\frac{1}{4}}$

5. Упростить выражение: а) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$ **;** б) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{4}{9}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$

Домашнее задание: учебник с. 36 №3 (5,6)

1) Простейшие уравнения, т.е. такие, левую и правую части которых можно привести к одному основанию решаются так:

2) Уравнения вида $2^{x}+2^{x-1}-2^{x-3}=4$ решаются вынесением за скобки степени с наименьшим показателем.

3) Уравнения, вида $7^{2x}-48\cdot 7^{x}=49$ решаются с помощью подстановки $a^{x}=y$, сводится к квадратному.

4) При решения уравнения вида $a^{x}=b^{x}$ обе части уравнения необходимо разделить на b^{x}, т.к. $b^{x}\neq 0$

$$\frac{a^{x}}{b^{x}}=1 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{x}=1 \quad\Rightarrow\quad x=0.$$

Решение показательных неравенств сводится к решению простейших неравенств вида $a^{x}\succ a^{b}$

или $a^{x}\prec a^{в}$

Если $a>1$ и $a^{x}\succ a^{b}$, то $x>b$

Если $0<a<1$ и $a^{x}\succ a^{b}$, то $x<b$

3.Практические задания:

1. Найти значения выражений: $7^{9}\cdot 3^{11}:21^{8}$, $24^{7}:3^{6}:16^{5}$, $30^{6}:6^{5}:25^{2}$.

Решение. Разложим все основания степеней на простые множители: $7^{9}\cdot 3^{11}:21^{8}=7^{9}\cdot 3^{11}:(7\cdot 3)^{8}=7^{9}\cdot 3^{11}:(7^{8}\cdot 3^{8})=7^{9}\cdot 3^{11}:7^{8}:3^{8}=7\cdot 3^{3}=189$.

$24^{7}:3^{6}:16^{5}=(3\cdot 2^{3})^{7}:3^{6}:(2^{4})^{5}=3^{7}\cdot 2^{21}:3^{6}:2^{20}=3\cdot 2=6$.

$30^6 : 6^5 : 25^2 =$ $(5 \cdot 3 \cdot 2)^6 : (3 \cdot 2)^5 : (5^2)^2 =$ $5^6 \cdot 3^6 \cdot 2^6 : 3^5 : 2^5 : 5^4 =$ $5^2 \cdot 3 \cdot 2 = 150.$
Ответ: 189; 6; 150

2. $5^x = 625 \Rightarrow 5^x = 5^4 \Rightarrow x = 4.$ *Ответ*$: x = 4$

3. Решить уравнение: $5^{2x+1} - 26 \bullet 5^x + 5 = 0$

Решение:

$5^x = y,$
$5y^2 - 26y + 5 = 0,$
$D = 169 - 25 = 144,$
$y_1 = 5$ $y_2 = 1/5$
$5^x = 5$
$x - 1,$
$5^x = 1/5$
$x = -1$

Ответ: $x = 1$ и $x = -1$

4. Решить неравенство: $(\sqrt{5})^{4-x} \geq \frac{1}{125}$

Решение:

$5^{(4-x)/2} \geq 5^{-3}$, $a = 5$, сравним показатели $(4 - x)/2 \geq -3$, $4 - x \geq -6$, $-x \geq -10$, $x \leq 10$

Ответ: $x \leq 10$

5. Упростите: $\frac{2a^3b^8c^4}{6a^4b^{-3}c^5}$.

Решение:

используя свойства степеней, имеем:

$$\frac{2a^3b^8c^4}{6a^4b^{-3}c^5} = \frac{a^{3-4}b^{8-(-3)}c^{4-5}}{3} = \frac{a^{-1}b^{11}c^{-1}}{3} = \frac{b^{11}}{3ac}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25$; б) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$; в) $0{,}2^{\,x^2+4x-5} = 1$

г) $4^x + 2^x - 20 = 0$; д) $\left(\sqrt{10}\right)^x = 10^{x^2-x}$

2. Решить неравенство:

а) $7^{x-2} > 49$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^x > 1\frac{1}{3}$; в) $9^x - 3^x - 6 > 0$; г) $\left(\sqrt{5}\right)^{x-6} < \frac{1}{5}$;

д) $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geq 1$.

---

3. Вычислите:

$$\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}+\sqrt[4]{\frac{16}{625}}-\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}.$$

4 . Упростите:

$$\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{b}}+2\sqrt{\sqrt{a}}.$$

Домашнее задание: учебник с.33 №5 (1,3)

Практическое занятие № 6

Нахождение логарифма по заданному основанию. Вычисление логарифмов с использованием основных свойств логарифмирования.

Цель: Знать определение логарифма числа, основное логарифмическое тождество, свойства логарифмов.

Сведения из теории

Логарифмом числа b по основанию a, где $a > 0$, а $\neq$ 1, называется показатель степени, в которую надо возвести число а, чтобы получить число b.

Определение логарифма можно записать так $a^{\log_a b}=b$. Его называют основным логарифмическим тождеством.

При преобразовании и вычислении значений логарифмических выражений применяют свойства логарифмов.

<u>Свойства</u>

1. $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$
2. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$
3. $\log_a b^r=r\cdot\log_a b$
4. $\log_{a^p} b=\frac{1}{p}\cdot\log_a b$

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $lg\ b$ вместо $log_{10} b$

$log_{10} b= lg\ b$

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e - иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут $ln\ b$ вместо $log_e b$, т.е. $log_e b = ln\ b$

Практические задания:

1.

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2;$

2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1;$

3) $\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}\log_3 3 = \frac{1}{7}.$

2.

Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50.$

Применяя формулы (1) — (3), находим

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3}\cdot 50}{\sqrt{12}} =$$

$$= \log_5 25 = 2. \quad \triangleleft$$

3. Найти значения выражений:

$\log_6 270 - \log_6 7{,}5$

$\log_9\log_2 \sqrt[27]{2}$

Решение. Первое выражение преобразуется как разность логарифмов:

$\log_6 270 - \log_6 7{,}5 = \log_6 (270 : 7{,}5) = \log_6 36 = 2$;Для вычисления второго выражения придется выделять степени - как в основании, так и в аргументе. Для начала найдем внутренний логарифм:

$$\log_2 \sqrt[27]{2} = \log_2\left(2^{\frac{1}{27}}\right) = \frac{1}{27}\log_2 2 = \frac{1}{27}$$

Затем — внешний:

$$\log_9 \frac{1}{27} = \log_{3^2} 3^{-3} = \frac{-3}{2}\log_2 2 = -1{,}5$$

Ответ: 2; 3; −1,5

Конструкции вида $\log_a \log_b x$ многим кажутся сложными и непонятыми. А между тем, это всего лишь логарифм от логарифма, т.е. $\log_a (\log_b x)$. Сначала вычисляется внутренний логарифм (положим $\log_b x = c$), а затем внешний: $\log_a c$.

4. Найти значения выражений:

$5 \cdot 49^{\log_7 3}$; $3^{\log_3 11} + 2^{\log_8 125}$; $\frac{33}{5^{\log_{25} 121}}$

Решение. Будем действовать по схеме. Для первого выражения все очевидно:

$$5 \cdot 49^{\log_7 3} = 5 \cdot 7^{2\log_7 3} = 5 \cdot 7^{\log_7 (3^2)} = 5 \cdot 3^2 = 45$$

Для второго выражения заметим, что

$$2^{\log_8 125} = 2^{\log_{(2^3)}(5^3)} = 2^{\log_2 5} = 5$$

Поэтому имеем:

$$2^{\log_2 11} + 2^{\log_8 125} = 11 + 2^{\log_{2^3} 5^3} = 11 + 2^{\frac{1}{3}\log_2 5^3} = 11 + 5 = 16$$

Аналогично поступим с третьим выражением:

$$5^{\log_{25} 121} = 5^{\log_{(5^2)}(11^2)} = 5^{\log_5 11} = 11$$

В результате получим:

$$\frac{33}{5^{\log_{25}121}} = \frac{33}{11} = 3$$

Ответ: 45; 16; 3

Задания для самостоятельного решения:

1. Вычислить: а) $9^{2\log_3 5}$; б) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$; в) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$

Домашнее задание: учебник с 39 № 1(2,3)

Преобразование логарифмических выражений

Цель:

выучить определение логарифма числа, формулы основного логарифмического тождества, логарифма произведения, частного, степени, перехода от одной системы логарифмов к другой; научиться вычислять значения несложных логарифмических выражений.

Сведения из теории:

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени (x), в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b, т.е. $log_a b=x \rightarrow a^x=b$.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1. $a^{logab}=b$ (где $b>0$, $a>0$ и $a\neq0$) называют *основным логарифмическим тождеством*.

При любом $a>0$ ($a\neq0$) и любых положительных x и y выполняются равенства:

2. $log_a 1=0$.

3. $log_a a=1$.

4. Логарифм произведения равен сумме логарифмов: $log_a xy=log_a x+log_a y$.

5. Логарифм частного равен разности логарифмов: $log_a(x/y)=log_a x-log_a y$.

6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $log_a x^k=klog_a x$.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула перехода к новому основанию: $log_a x=log_b x/log_b a$. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при $x>0$, $a>0$ и $a\neq 0$, $b>0$ и $b\neq 1$).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$log_b x=log_b(a^{log_a x})$, откуда $log_b x=log_a x\cdot log_b a$. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

Пример 1.

Вычислите, используя определение логарифма числа $\log_{13}\sqrt[5]{169}+\log_{11}\sqrt[3]{121}$.

Решение:

вычислим отдельно каждый логарифм:

$$\log_{13}\sqrt[5]{169}=x, \qquad \log_{11}\sqrt[3]{121}=x,$$

$$13^x=\sqrt[5]{169}, \qquad 11^x=\sqrt[3]{121},$$

$$13^x=\sqrt[5]{13^2}, \qquad 11^x=\sqrt[3]{11^2},$$

$$13^x=13^{\frac{2}{5}}, \qquad 11^x=11^{\frac{2}{3}},$$

$$x=\frac{2}{5}. \qquad x=\frac{2}{3}.$$

Вернемся в пример: $\log_{13}\sqrt[5]{169}+\log_{11}\sqrt[3]{121}=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{6+10}{15}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15.}$

Пример 2.

Вычислите, используя основное логарифмическое тождество: $10^{3\lg 2-1}$.

Решение:

используя свойство степени, разложим данное выражение на множители:

$$10^{3\lg 2-1}=10^{3\lg 2}\cdot 10^{-1}.$$

Используя 6 свойство логарифма степени, имеем:

$$10^{3\lg 2-1}=10^{3\lg 2}\cdot 10^{-1}=10^{\lg 2^3}\cdot\frac{1}{10}.$$

Используя основное логарифмическое тождество, имеем:

$$10^{3\lg 2-1}=10^{3\lg 2}\cdot 10^{-1}=10^{\lg 2^3}\cdot\frac{1}{10}=2^3\cdot\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=0{,}8.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\log_{16}0{,}5$;	1) $\log_{64}(1/16)$;	1) $\log_4 8^7$;
2) $100^{\lg\sqrt{5}}$;	2) $5^{-6\log_5 2}$;	2) $36^{0{,}5-\log_6\sqrt{5}}$;

3) $\dfrac{\lg 4}{\lg 64-\lg 8}$.	3) $\dfrac{\lg 4}{\lg 16-\lg 8}$.	3) $\dfrac{\lg 3+\lg 27}{\lg 9}$.
4 вариант 1) $\log_{0.2}0{,}08$; 2) $49^{\frac{1}{2}+\log_7 2}$; 3) $\dfrac{\lg^2 7-1}{\lg 70}$.	**5 вариант** 1) $\lg 0{,}01$; 2) $4^{\log_2 3+2\log_4\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{1-\lg^2 3}{\lg 30}$.	**6 вариант** 1) $\log_5 0{,}04$; 2) $0{,}01^{\lg\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{\log_2 64}{\log_2\sqrt{16}}$.
7 вариант 1) $\log_{\sqrt{2}} 8$; 2) $25^{\log_5 3-\log_{25} 27}$; 3) $\dfrac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$.	**8 вариант** 1) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27$; 2) $100^{\lg\sqrt{5}+\lg 10}$; 3) $\dfrac{\log_3 16}{\log_3 4}$.	**9 вариант** 1) $\log_3 \dfrac{1}{243}$; 2) $1000^{\lg 10-\lg\sqrt{5}}$; 3) $\dfrac{\log_3 8}{\log_3 16}+\dfrac{\log_5 27}{\log_5 9}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение логарифма числа.
2. Перечислите свойства логарифмов.

Домашнее задание: учебник с 39 №2 (4,6)

Практическое занятие № 7

Решение логарифмических уравнений. Выполнение преобразований выражений, применений формул, связанных со свойствами степеней и логарифмов

Цель: Знать методы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, уметь применять их при решении соответствующих заданий.

Сведения из теории:

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, называются логарифмическими.

Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то и равны их логарифмы при данном основании и обратно, если логарифмы чисел равны, то равны и соответствующие им числа. Во всех случаях полученные решения необходимо проверить подстановкой их в данное уравнение и исключить посторонний корень. Часто используется формула перехода от одного основания к другому $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

При решении простейших логарифмических неравенств типа $\log_a x \succ \log_a b$ необходимо использовать следующее правило:

Если $a > 1$, то знак неравенства не меняется , т.е. $x > b$

Если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется на противоположный, т.е. $x < b$.

При решении логарифмических неравенств необходимо проверить, входит ли полученное решение в область определения неравенства.

Практические задания:

1. Решить уравнение $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$

Решение

$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3 \qquad 3=\log_2 8$

$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=\log_2 8$

$(x+1)\cdot(x+3)=8$

$x^2+4x+3=8$

$x^2+4x-5=0$

$x_1=1, \quad x_2=-5$

Проверка

$x=1 \qquad \log_2(1+1)+\log_2(1+3)=\log_2 2+\log_2 4=1+2=3$ - левая часть

3=3 $\Rightarrow$ $x = 1$ – корень уравнения

$x=-5 \qquad \log_2(-5+1)+\log_2(-5+3)=\log_2(-4)+\log_2(-2)$ - левая часть не имеет смысла $\Rightarrow$

x = -5 не является корнем

Ответ: $x = 1$

2. Решить неравенство $\lg(x+1)\le 2$

Решение

$\lg(x+1)\le 2 \qquad 2=\lg 100$

$\lg(x+1)\le \lg 100$

$a=10, \quad a\succ 1 \quad \Rightarrow \quad x+1\le 100$

$x\le 99$

Область определения: $x + 1 > 0$

$x > -1$

Общее решение: $\begin{cases} x\le 99, \\ x\succ -1 \end{cases} \Rightarrow$

$-1\prec x\le 99$

Ответ: $-1\prec x\le 99$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение:

а) $\log_5(2x-1)=2$; *б*) $\lg(x-1)+\lg x=0$; *в*) $\log_5\dfrac{1-2x}{x+3}=1$; *г*) $\log_8 x+\log_{\sqrt{2}} x=14$

2. Решить неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(x-5) > 1$ в) $\log_{\frac{1}{6}}(10-x) + \log_{\frac{1}{6}}(x-3) \ge -1$;

г) $\log_8(x^2-4x+3) < 1$

Домашнее задание: учебник с.48 №1(1-6), с 49№3 (1-6)

Практическое занятие № 8

Преобразование алгебраических выражений Приближенные вычисления и решения прикладных задач.

Цель: Закрепить и систематизировать знания по теме.

Сведения из теории:

Свойства

1. $\log_a(b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$ 2. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ 3. $\log_a b^r = r\cdot\log_a b$ 4. $\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\cdot\log_a b$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; 2. $a^n / a^m = a^{n-m}$; 3. $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$; 4. $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; 5. $(a : b)^n = a^n : b^n$.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула перехода к новому основанию: $\log_a x = \log_b x / \log_b a$. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при $x>0$, $a>0$ и $a\neq 0$, $b>0$ и $b\neq 1$).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$\log_b x = \log_b(a^{\log a x})$, откуда $\log_b x = \log_a x\cdot\log_b a$. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

Практические задания:

1. *Вычислить* $\log_{64} 128$.

Обозначим $\log_{64} 128 = x$. По определению логарифма $64^x = 128$. Так как $64 = 2^6, 128 = 2^7$, то $2^{6x} = 2^7$, откуда $6x = 7, x = \frac{7}{6}$.

2. Вычислить $3^{-2\log_3 5}$.

Используя свойства степени и основное логарифмическое тождество, находим $3^{-2\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.

3. Решить уравнение $\log_3(1-x) = 2$.

По определению логарифма $3^2 = 1 - x$, откуда $x = -8$.

4. При каких значениях *x* существует $\log_5 \frac{x-1}{2-x}$?

Так как основание логарифма 5>0, и $5 \neq 1$, то данный логарифм существует только тогда, когда $\frac{x-1}{2-x} > 0$. Решая это неравенство, находим $1 < x < 2$.

5. Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$.

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3} \cdot 50}{\sqrt{12}} = \log_5 25 = 2.$$

6. Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

$\log_7 25$; 2) $\log_9 0{,}75$.

7. Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

$\log_7 5$; 2) $\log_{1,1} 0{,}23$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить:

а) $(\log_7 15 + \log_7 4 - \log_7 6) \cdot \lg 7$;

б) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$

2. Решить уравнение.

$\log_3 x + 2\log_9 x + 3\log_{27} x + 4\log_{81} x = 8$

Контрольные вопросы:

1. Что называется показательным уравнением?
2. Запишите свойство, которое используют при решении показательных уравнений.
3. Что называется логарифмическим уравнением?
4. Перечислите способы решения уравнений, содержащих переменную под знаком логарифма или в основании логарифма

Домашнее задание: учебник с.39 №3 (8-12)

Практическое занятие № 9

Изображение углов вращения на окружности, соотнесение величины углов с его расположением.

Цель:

повторить единицы измерения угловых величин, геометрический смысл числа **π** и его значение: рассмотреть понятие «числовая окружность», закрепить изученное в ходе выполнения упражнений.

Сведения из теории:

Радианная мера

Угол в 1 радиан – это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности.

Радианная и градусная меры связаны между собой зависимостью$180^0=\pi$ радиан; угол в $n^0=\dfrac{\pi n}{180^0}$ радиан.

Значения тригонометрических функций могут быть найдены так, как это делалось в курсе геометрии, из прямоугольного треугольника с гипотенузой равной 1 и по очереди задаваемых углов: 30^0, 45^0, 60^0.

Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям:

Номер координатной четверти	I	II	III	IV
sinα	+	+	–	–
cosα	+	–	–	+
tgα	+	–	+	–
ctgα	+	–	+	–

Единственная четная функция – косинус

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Все остальные основные тригонометрические функции нечетные:

$$\sin(-\alpha)= -\sin\alpha;$$
$$tg(-\alpha)= -tg\alpha;$$
$$ctg(-\alpha)= -ctg\alpha.$$

Таблица 2. Значения основных тригонометрических функций

Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Градусная мера угла	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
*sin*α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
*cos*α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
*tg*α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
*ctg*α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Радианная мера угла	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Градусная мера угла	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
*sin*α	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
*cos*α	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
*tg*α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
*ctg*α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Пример1.

Вычислите: $\sin 405^0$.

Решение:

полный круг – 360^0 можно «отбросить»:

$$\sin 405^0=\sin(405^0-360^0)=\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2.

Выразите в радианной мере значение угла 36^0.

Решение:

чтобы «перевести» градусную меру угла в радианную, необходимо заданное значение умножить на $\frac{\pi}{180^0}$, т.о. получим

$$36^0=\frac{36^0\pi}{180^0}=\frac{\pi}{5}.$$

Пример 3.

Выразите в градусной мере значение угла $\frac{2\pi}{5}$.

Решение:

чтобы «перевести» радианную меру угла в градусную, необходимо заданное значение умножить на $\frac{180^0}{\pi}$, т. о. получим

$$\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{180^0}{\pi}=\frac{360^0}{5}=72^0.$$

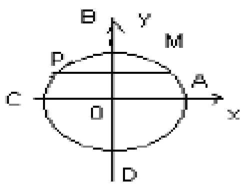
Практические задания:

1.

$$P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right): \frac{45\pi}{4} = 10\pi + \frac{5\pi}{4} = 2\pi \cdot 5 + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

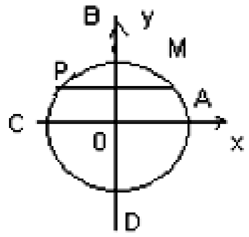
.

Пример 2. Точка $M\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\kappa\right)$, $\kappa \in z$



Точка $P\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in z$. Две серии значений.

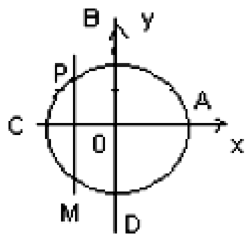
3.



$$y \succ \frac{1}{2}; \ \frac{\pi}{6} + 2\pi\kappa \prec t \prec \frac{5\pi}{6} + 2\pi\kappa, \ \kappa \in Z;$$

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi\kappa \prec t \prec \frac{\pi}{6} + 2\pi\kappa; \quad \kappa \in Z, \quad y \prec \frac{1}{2}.$$

4.



$$t > -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad -\frac{3\pi}{4} + 2\pi\kappa < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi\kappa; \ \ \kappa \in Z;$$

$$t < -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi\kappa < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi\kappa; \ \ \kappa \in Z;;$$

Задания для самостоятельного решения:

1) Чему равна точная радианная мера дуг: 1) 240 о; 300о.?
2) Чему равна точная градусная мера дуг: 1) 7 π⁄6; 2) 5 π⁄4?
3) Колесо R = 0,65, повернулось на угол 1,4 рад.. Найти длину пути, пройденного точкой обода колеса.

4). Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 60^0; $\frac{\pi}{6}$.

5). Вычислите:

$$\sin 2010^0 + 4tg(-855^0) +$$
$$+\sqrt{3}\cos(-1590^0).$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется углом в 1 радиан?

2. В каких единицах измеряются углы?
3. Перечислите значения некоторых тригонометрических функций.
4. Определение синуса угла;
5. Определение косинуса угла;
6. Определение тангенса (котангенса) угла;
7. Таблица значений тригонометрических функций;
8. Знаки синуса и косинуса, тангенса.

5.Домашнее задание: учебник с. 98 №2-4

Практическое занятие № 10

Применение основных тригонометрических тождеств для вычисления значений функций. Применение формул приведения. Применение формул сложения.

Цель:

Выработать навыки применения основных тригонометрических тождеств и формул приведения для преобразования тригонометрических выражений.

Сведения из теории:

Основные формулы тригонометрии

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса следуют *основные тригонометрические тождества*:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1;$$

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Основой для остальных формул являются *формулы сложения*:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

Из формул сложения, полагая $\beta = \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, получаем *формулы приведения* преобразования выражений вида:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ \cos\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Для запоминания этих формул удобно пользоваться мнемоническим правилом:

1. Перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в соответствующей координатной четверти:

2. Функция меняется на «кофункцию», если n нечетно; функция не меняется, если n четно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс, тангенс).

Пример 1.

Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,4 и 0,7.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, имеем:

$$0{,}4^2+0{,}7^2=0{,}16+0{,}49=0{,}65.$$

Т.к. $0{,}65\neq1$ значения синуса и косинуса одного и того же числа не могут быть равными соответственно: 0,4 и 0,7.

Пример 2.

Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin\alpha=-0{,}8$ и $\pi<\alpha<1{,}5\pi$.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, имеем:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,\ \text{тогда}\ \cos^2\alpha=1-(-0{,}8)^2=1-0{,}64=0{,}36.$$

Т. к. $\pi<\alpha<1{,}5\pi$ (III координатная четверть), то $\cos\alpha=-0{,}6$.

По формуле $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ вычисляем $tg\alpha = \frac{-0{,}8}{-0{,}6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

По формуле $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$ вычисляем $\mathrm{ctg}\alpha=1:\frac{4}{3}=\frac{3}{4}$.

3. Доказать тождество: $\cos^2\alpha = (1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)$

<u>*Доказательство:*</u> $(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha) = 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ - правая часть

$$\cos^2\alpha = \cos^2\alpha$$

4. Доказать тождество: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\varepsilon}{\cos\alpha}$

Доказательство: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\varepsilon}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=0$

5. Найти значение выражения, если ctgα = 8:

$$\frac{\sin\left(\frac{13}{2}\pi-\alpha\right)-\operatorname{ctg}(6\pi+\alpha)}{1+\sin(2\pi-\alpha)}$$

Решение: Применив формулы приведения, получим:

$$\sin\left(\frac{13}{2}\pi-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(6\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

С учетом этих упрощений имеем:

$$\frac{\sin\left(\frac{13}{2}\pi-\alpha\right)-\operatorname{ctg}(6\pi+\alpha)}{1+\sin(2\pi-\alpha)}=\frac{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{1-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1-\sin\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1-\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha(1-\sin\alpha)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha=-8$$

Ответ: - 8.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,5 и 0,5. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.	**2 вариант** 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,2 и - 0,8. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.	**3 вариант** 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,6 и - 0,8. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos\alpha=\frac{15}{17}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.
4 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{7}{25}$ и $\frac{24}{25}$. 2) Найдите значения	**5 вариант** 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 2) Найдите значения	**6 вариант** 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. 2) Найдите значения

других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=0,5 и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.	других трех основных тригонометрических функций, если: cosα=0,4 и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.	других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=$\frac{\sqrt{3}}{5}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.
7 вариант 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{5}{3}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: cosα=$\frac{\sqrt{2}}{5}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.	**8 вариант** 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: 2,4 и $-\frac{5}{12}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=0,7 и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.	**9 вариант** 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: cosα=0,9 и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные тригонометрические тождества.
2. Сформулируйте мнемоническое правило.

Домашнее задание: учебник с. 103-108.

Применение формулы удвоения и формулы половинного угла. Преобразование простейших тригонометрических выражений.

Цель:

Использование тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений.

Сведения из теории:

Формулы двойного угла тригонометрических функций:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha},$$

$$ctg\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}.$$

Подставляя в формулы cos2t=1-2sin^2t и cos2t=2cos^2t-1 значение $t=\frac{\alpha}{2}$, получаем формулы *половинного аргумента*:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Разделив $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ на $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ получаем формулу

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Пример 1.

Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла, sin42^0.

Решение:

используя формулу $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, имеем

$$\sin 42^0=\sin(2\cdot 21^0)=2\sin 21^0\cos 21^0.$$

Пример2.

Вычислите 2sin15^{0}cos15^0.

Решение:

используя формулу $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, имеем

$$2\sin 15^0\cos 15^0=\sin(2\cdot 15^0)=\sin 30^0=0{,}5.$$

Пример 3.

Вычислите sin(π/12).

Решение:

по формуле $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, имеем

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\approx 0{,}068.$$

4. Вычислить: $\frac{1-2\sin^2\alpha}{2tg(45^\circ-\alpha)\cos^2(45^\circ-\alpha)}$

Решение: В числителе – формула двойного угла, в знаменателе после сокращения на косинус – тоже формула двойного угла.

5. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}6$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

По формуле $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ находим $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot(-0{,}6)\cos\alpha=$ $=-1{,}2\cos\alpha$.

Так как $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}36}=-0{,}8.$

Следовательно, $\sin 2\alpha=-1{,}2\cdot(-0{,}8)=0{,}96.$

6. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

Используя формулу $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ и основное тригонометрическое тождество, получаем

Задания для самостоятельного решения:

1. Упростить выражение: $3\cos^2\alpha - 6 + 3\sin^2\alpha$
2. Найти значение выражения: $4\cos^2 x + 2$, если $\sin^2 x = 0{,}6$
3. Упростить выражение: $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$
4. Найти значение выражения: $\sin\frac{7\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$
5. Найти значение выражения: $2\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 10^\circ \sin 50^\circ - \sin 100^\circ \cos 50^\circ}{\sin 25^\circ \cos 20^\circ + \sin 115^\circ \sin 20^\circ}$
6. Доказать, что верно равенство: $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \cos 10^\circ = 0$
7. Найти значение выражения $169\sin 2x$, если $\cos x = -\frac{5}{13}$, $-\pi < x < 0$

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы двойного угла тригонометрических функций.
2. Запишите формулы половинного аргумента тригонометрических функций.

Домашнее задание: учебник с. 109 № 2 (1-3)

Практическое занятие № 11

Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму и применение при вычислении значения тригонометрического выражения и упрощения его.

Цель: Выработать навыки применения тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений.

Сведения из теории:

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \;\; \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, \;\; \beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k.$$

Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму применяются формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 1.

Преобразуйте в алгебраическую сумму $\sin 5x \sin 3x$.

Решение:

по формуле $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ имеем

$$\sin 5x\sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(5x-3x)-\cos(5x+3x)) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x.$$

Пример 2.

Вычислите: $\sin 40^0+\sin 20^0$.

Решение:

по формуле $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ имеем

$$\sin 40^0 + \sin 20^0 = 2\sin\frac{40^0+20^0}{2}\cos\frac{40^0-20^0}{2} = 2\sin 30^0\cos 10^0 = 2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}98 \approx 0{,}98.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Упростите: $\frac{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha+\cos^2\alpha}$. 2) Вычислите: $\sin 75^0+\sin 15^0$. 3) Вычислите: $\sin 52^0 30' \cdot \cos 7^0 30'$.	**2 вариант** 1) Упростите: $\frac{1-\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-3\alpha)-\sin(-\alpha)}$. 2) Вычислите: $\sin 75^0+\sin 105^0$. 3) Вычислите: $\sin 37^0 30' \cdot \sin 7^0 30'$.	**3 вариант** 1) Упростите: $\frac{\cos(2\pi-2\alpha)}{ctg^2\alpha-1}-\sin^2\alpha$. 2) Вычислите: $\cos 75^0+\cos 15^0$. 3) Вычислите: $8\cos 7\alpha\cdot\cos 3\alpha$.
4 вариант 1) Упростите: $\frac{2\sin^2\alpha}{1+\cos(\pi-2\alpha)}-\sin^2\alpha$. 2) Вычислите:	**5 вариант** 1) Упростите: $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$. 2) Вычислите: $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{7\pi}{12}$.	**6 вариант** 1) Упростите: $\frac{2\cos^2\alpha}{1-\sin(1{,}5\pi+2\alpha)}-\cos^2\alpha$. 2) Вычислите:

$\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$. 3) Вычислите: $cos75^0 \cdot cos105^0$.	3) Вычислите: $2\, sin(x+\alpha) \cdot cos(x-\alpha)$.	$\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$. 3) Вычислите: $12\, sin(-9\alpha) \cdot sin4\alpha$.
7 вариант 1) Упростите: $\frac{\sin\alpha-0{,}5\sin(\pi+2\alpha)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$. 2) Вычислите: $tg22^0 30'-tg67^0 30'$. 3) Вычислите: $4\, sin16\alpha \cdot sin4\alpha$.	**8 вариант** 1) Упростите: $\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha)}{1-tg^2\alpha}-\cos^2\alpha$. 2) Вычислите: $tg13^0 30'+tg76^0 30'$. 3) Вычислите: $4\, cos(\alpha+\beta) \cdot cos(\alpha-\beta)$.	**9 вариант** 1) Упростите: $\frac{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha+\cos^2\alpha}$. 2) Вычислите: $tg30^0+tg60^0$. 3) Вычислите: $4\, cos15^0 sin20^0 sin40^0$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные тригонометрические тождества.
2. Перечислите формулы двойного угла тригонометрических функций.
3. Какие есть формулы для преобразования суммы тригонометрических функций?

Домашнее задание: учебник с 108 №1 (6,7), с. 109 №2 (4,5)

Практическое занятие № 12
Решение тригонометрических уравнений

Цель: Знать формулы для решения тригонометрических уравнений в общем виде и частные случаи решения;

Уметь решать простейшие тригонометрические уравнения.

Сведения из теории:

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение $cos\, t=a$

Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $cos\, t=a$ не имеет решений, т.к. $|cos\, t|\le 1$ для любого t.

Пусть $|a|\le 1$. Надо найти все такие числа t, что $cos\, t=a$. На отрезке $[0; \pi]$ существует только одно решение уравнения $cos\, t=a$ – это число $arccos\, a$.

Косинус – четная функция, и, значит на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение также имеет единственное решение – это число $-arccos\, a$.

Итак, уравнение $cos\, t=a$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π имеет два решения $t=\pm arccos\, a$ (совпадающие при $a=1$).

Вследствие периодичности функции косинус все остальные решения отличаются от найденных на $2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$), т.е. формула корней уравнения $\cos t = a$ имеет вид:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n,\ (n \in \mathbf{Z}).$$

Пример 1.

Решите уравнение: $\cos t = 1/2$.

Решение:

по формуле $t = \pm \arccos (1/2) + 2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Поскольку $\arccos (1/2) = \pi/3$ приходим к ответу $t = \pm\ \pi/3 + 2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Пример 2.

Решите уравнение: $\cos t = -0{,}2756$.

Решение:

по формуле $t = \pm \arccos (-0{,}2756) + 2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Значение $\arccos (-0{,}2756)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,85.

Итак, приходим к ответу $t = \pm 1{,}85 + 2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Пример 3.

Решите уравнение: $\cos (2x - \pi/4) = 1/2$.

Решение:

по формуле

$2x - \pi/4 = \pm \arccos (1/2) + 2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Поскольку $\arccos (1/2) = \pi/3$ получаем

$2x - \pi/4 = \pm\ \pi/3 + 2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$)

$2x = \pi/4 \pm\ \pi/3 + 2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Разделив обе части уравнения на 2 получим ответ: $x = \pi/8 \pm \pi/6 + \pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Уравнение $\sin t = a$

Очевидно, что если $|a| > 1$, то уравнение $\sin t = a$ не имеет решений, т.к. $|\sin t| \le 1$ для любого t.

При $|a| \le 1$ на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ уравнение $\sin t = a$ имеет одно решение $t_1 = \arcsin a$. На отрезке $[\pi/2;\ 3\pi/2]$ функция синус убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение и на этом отрезке имеет одно решение.

Это решение есть число $t_2 = \pi - \arcsin a$, т.к. $\sin t_2 = \sin (\pi - t_1) = \sin t_1 = a$.

Кроме того, поскольку $-\pi/2 \le t_1 \le \pi/2$,

имеем $-\pi/2 \le -t_1 \le \pi/2$

и $\pi - \pi/2 \le \pi - t_1 \le \pi + \pi/2$,

т.е. $\pi/2 \le t_2 \le 3\pi/2$, $t_2 \in [\pi/2;\ 3\pi/2]$.

Итак, уравнение $\sin t = a$ на отрезке $[\pi/2;\ 3\pi/2]$ имеет два решения $t_1 = \arcsin a$ и $t_2 = \pi - \arcsin a$ (совпадающие при $a = 1$). Учитывая, что период синуса равен 2π, получаем формулу для решения уравнения $\sin t = a$:

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 4.

Решите уравнение: $sin\ t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

по формуле $t=(-1)^k arcsin\ (\frac{\sqrt{2}}{2})+\pi k$, ($k \in \boldsymbol{Z}$).

Поскольку $arcsin\ (\frac{\sqrt{2}}{2})=\pi/4$ приходим к ответу $t=(-1)^k\ \pi/4+\pi k$, ($k \in \boldsymbol{Z}$).

Пример 5.

Решите уравнение: $sin\ t=0{,}3714$.

Решение:

по формуле $t=(-1)^k arcsin\ (0{,}3714)+\pi k$, ($k \in \boldsymbol{Z}$).

Значение $arcsin$ (0,3714) находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 0,3805.

Итак, приходим $t= (-1)^k 0{,}3805+\pi k$, ($k \in \boldsymbol{Z}$).

Пример 6.

Решите уравнение: $sin\ \left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

функция синус нечетная, поэтому $sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=-sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда по формуле: $\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, ($k \in \boldsymbol{Z}$).

Т.к. $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, имеем

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k(-\frac{\pi}{4})+\pi k,\ (k \in \boldsymbol{Z})$$

или

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{10}+(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,\ (k \in \boldsymbol{Z}).$$

Умножив обе части уравнения на 2, получим ответ:

$$x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k,\ (k \in \boldsymbol{Z}).$$

Уравнение tg x=a

При любом a на интервале $(-\pi/2;\ \pi/2)$ существует одно число t , что $tgt=a$, – это $arctg\ a$. Поэтому уравнение $tg\ x=a$ имеет на интервале $(-\pi/2;\ \pi/2)$ длиной π единственный корень.

Функция тангенс имеет период π. Следовательно, остальные корни уравнения $tg\ t=a$ отличаются от найденного на πn, ($n \in \boldsymbol{Z}$), т.е.

$$t=arctg\ a+\pi n,\ (n \in \boldsymbol{Z}).$$

Пример 7.

Решите уравнение: *tg t*=$\sqrt{3}$.

Решение:

по формуле *t=arctg*($\sqrt{3}$)+π*n*, (*n* Є ***Z***).

Поскольку *arctg*($\sqrt{3}$)=$\frac{\pi}{3}$ приходим к ответу *t*=$\frac{\pi}{3}$+π*n*, (*n* Є ***Z***).

Пример 8.

Решите уравнение: *tg t*=5,177.

Решение:

по формуле *t=arctg*(5,177)+π*n*, (*n* Є ***Z***).

Значение *arctg*(5,177) находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,38.

Итак, приходим *t*=1,38+π*n*, (*n* Є ***Z***).

Сводная таблица решения простейших тригонометрических уравнений

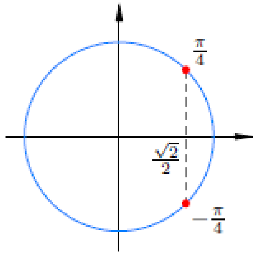
Уравнение	Решение
sin$x$=a	$x=(-1)^k \arcsin a+\pi k, k \in Z$
cos$x$=a	$x=\pm\arccos a+2\pi k, k \in Z$
tg$x$=a	$x=arctga+\pi k, k \in Z$
ctg$x$=a	$x=arcctga+\pi k, k \in Z$

Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Частные случаи		
	a=-1	a=0	a=1
sin$x$=a	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in Z$	$x=\pi k, k \in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in Z$
cos$x$=a	$x=\pi+2\pi k, k \in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$	$x=2\pi k, k \in Z$
tg$x$=a	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$	$x=\pi k, k \in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$
ctg$x$=a	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi k, k \in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$

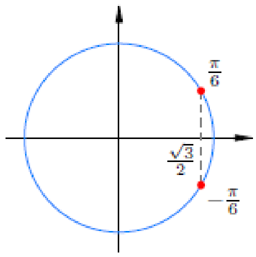
Решение по тригонометрическому кругу

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



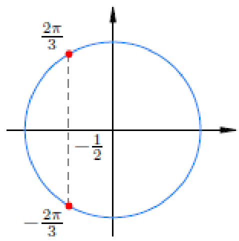
$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



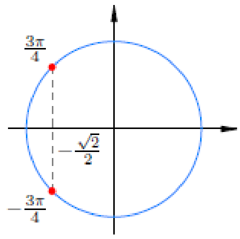
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$.



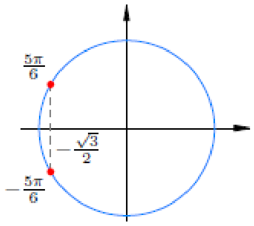
$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



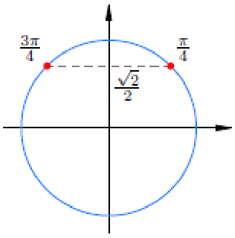
$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

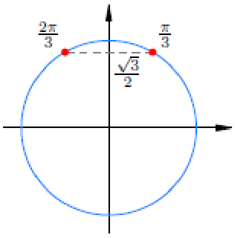
$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

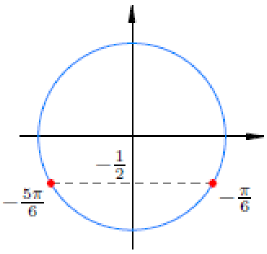
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

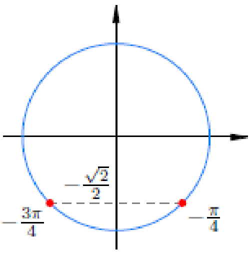
$$\sin x = -\frac{1}{2}.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

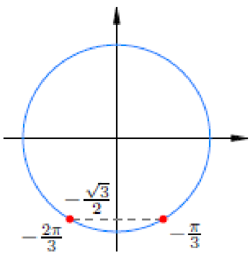
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите уравнения:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$; 2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; 3) $tg2x=\sqrt{3}$.	1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $tg2x=-\sqrt{3}$.	1) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; 2) $2\cos x=\sqrt{2}$; 3) $tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
4 вариант	**5 вариант**	**6 вариант**
1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{4}=\frac{4}{5}$; 3) $tg\left(2x-\frac{\pi}{10}\right)=0$.	1) $\sin x=\frac{3}{5}$; 2) $\cos(1-x)=\frac{1}{2}$; 3) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=3$.	1) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; 2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$; 3) $ctg\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$.
7 вариант	**8 вариант**	**9 вариант**
1) $2\sin x=-\sqrt{2}$; 2) $\cos 3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $3tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$.	1) $2\sin 2x=-1$; 2) $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$; 3) $ctg\frac{x}{2}=\sqrt{3}$.	1) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$; 2) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $ctg\left(2x+45^0\right)=-1$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.
2. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.

Домашнее задание: учебник с.114-119 № 1-7

Практическое занятие № 13

Решение тригонометрических уравнений, применяя общие методы в решения уравнений.

Цель: Знать методы решения тригонометрических уравнений, формулы для нахождения корней, уметь использовать полученные знания при решении уравнений повышенной сложности.

Сведения из теории

I. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи

$\sin x = a$	при $\lvert a\rvert \le 1$ $x=(-1)^k \arcsin a+\pi k$, $k\in z$ при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$\sin x=0$; $x=\pi k$, $k\in z$ $\sin x=1$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in z$ $\sin x=-1$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in z$
$\cos x = a$	при $\lvert a\rvert \le 1$ $x=\pm\arccos a+2\pi n$, $n\in z$ при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in z$ $\cos x=1$; $x=2\pi n$, $n\in z$ $\cos x=-1$; $x=\pi+2\pi n$, $n\in z$
$tgx=a$	a - любое число $x=arctga+\pi k$, $k\in z$	-
$ctgx=a$	a - любое число $x=arcctga+\pi k$, $k\in z$	-

II. Тригонометрические уравнения.

Уравнение	Способ решения	Формулы
. Уравнение содержит только синусы или косинусы (синусы и косинусы) вида $a\sin^2 f(x)+b\sin f(x)+c=0$ $a\cos^2 f(x)+b\cos f(x)+c=0$ и т.д.	Уравнение сводится к квадратному (биквадратному) относительно синуса (косинуса)	$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ $ax^2+bx+c=0$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
. Однородное уравнение I степени вида $a\sin x+b\cos x=0$ $(a\ne 0,\quad b\ne 0)$	Деление обеих частей на $\cos x\ne 0$. Получаем: $atgx+b=0$	$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha$
. Однородное уравнение II степени вида $a\sin^2 f(x)+b\sin f(x)\cdot$ $\cdot\cos f(x)+k\cos^2 f(x)=0$	Деление обеих частей на $\cos^2 x\ne 0$. Получаем: $atg^2 f(x)+btgx+k=0$	$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$
. Уравнение вида $atgx+bctgx+c=0$	Уравнение сводится к квадратному относительно тангенса заменой $ctgx=\frac{1}{tgx}$	$tgx\cdot ctgx=1$ $ctgx=\frac{1}{tgx}$

Практические задания:

1.

Решить уравнение $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем

$$2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0, \text{ или}$$
$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0.$$

Обозначая $\sin x = y$, получаем $2y^2 + 5y - 3 = 0$, откуда $y_1 = -3$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

1) $\sin x = -3$ — уравнение не имеет корней, так как $|-3| > 1$;

2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

2.

Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2\operatorname{tg} x - 3 = 0$, $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$, $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

3.

Решить уравнение $2\sin x + \cos x = 2$.

Используя формулы $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2\cdot 1 = 2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$, получаем

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2},$$
$$3\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Поделив это уравнение на $\cos^2\frac{x}{2}$, получим равносильное уравнение $3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0$. Обозначая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$, получаем уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

4. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители

Пример

$\sin 2x - \sin x = 0$

$2\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$ Общий множитель *sin x* выносится за скобки.

$\sin x \cdot (2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$ *или* $2\cos x - 1 = 0$

$x = \pi n, n \in Z$ $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

<u>*Ответ:*</u> $x = \pi n,\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in Z$

5.

Решить уравнение $\sin 7x + \sin 3x = 3\cos 2x$.
Применяя формулу для суммы синусов, запишем уравнение в виде

$$2\sin 5x\cos 2x = 3\cos 2x,$$
$$2\sin 5x\cos 2x - 3\cos 2x = 0,$$

откуда $\cos 2x\left(\sin 5x - \frac{3}{2}\right) = 0.$

Уравнение $\cos 2x = 0$ **имеет корни** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, **а уравнение** $\sin 5x = \frac{3}{2}$ **не имеет корней.**

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$ ◁

Задания для самостоятельного решения:

1. $\sin 6x + \cos 6x = 1 - 2\sin 3x$;
2. $29 - 36\sin^2(x-2) - 36\cos(x-2) = 0$;
3. $2\sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$;
4. $\sin 4x = 2\cos^2 x - 1$;
5. $\sin x(\sin x + \cos x) = 1$;
6. $\frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sin^2 x} = \frac{16}{11}$.

Домашнее задание: учебник с. 120 №10 (1-4)

Практическое занятие № 14
Решение тригонометрических неравенств

Цель: Знать формулы для решения простейших тригонометрических неравенств;

Уметь решать простейшие тригонометрические неравенства.

Сведения из теории:

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства

$\sin x<m$, $\sin x>m$, $\cos x<m$, $\cos x>m$, $\operatorname{tg} x<m$, $\operatorname{tg} x>m$, $\operatorname{ctg} x<m$, $\operatorname{ctg} x>m$, где m – данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Если точка P_α единичной окружности (рис.1) получена при повороте точки $P_0\,(1;\,0)$ на угол α, то ордината точки P_α – *синус* угла α (обозначается $\sin\alpha$), а абсцисса – *косинус* угла α (обозначается $\cos\alpha$). *Тангенсом* угла α называется отношение $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. *Котангенсом* угла α называется отношение $\cos\alpha$ к $\sin\alpha$: $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

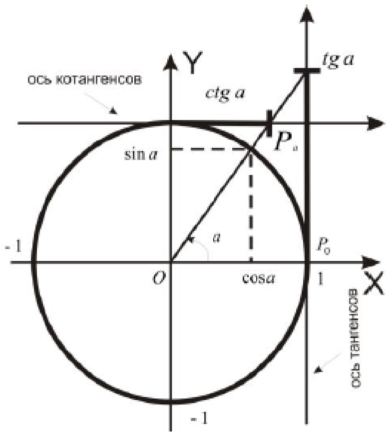


Рис.1

Величина, обратная $\cos\alpha$, называется *секансом,* а обратная $\sin\alpha$ – *косекансом* угла α; они обозначаются $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Отрезок $[-1;1]$ оси ординат называют *линией синусов*; отрезок $[-1;1]$ оси абсцисс – *линией косинусов*; прямую $x=1$ – *осью (линией) тангенсов*; прямую $y=1$ – *осью (линией) котангенсов.*

Пример 1, 2

Решить неравенство: 1) $\sin x>\dfrac{1}{2}$; 2) $\cos x>-\dfrac{1}{2}$.

Решение:

2) решение иллюстрируется рисунком 1 слева: здесь точке M_1 соответствует угол $\dfrac{\pi}{6}$, M_2 – угол $\dfrac{5\pi}{6}$, M_3 – угол $\dfrac{\pi}{6}+\pi$, M_4 – угол $\dfrac{5\pi}{6}+\pi$.

Неравенство выполняется для $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}+\pi<x<\frac{5\pi}{6}+\pi$. Общим решением служит неравенство:

$$\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Данное неравенство иллюстрируется рисунком 1 справа: здесь точке M_1 соответствует угол $\frac{2\pi}{3}$, M_2 – угол $-\frac{2\pi}{3}$. Общим решением неравенства является

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

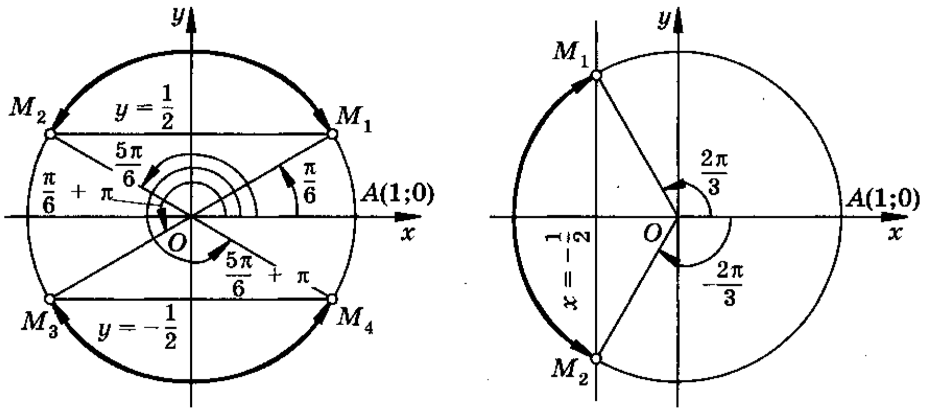
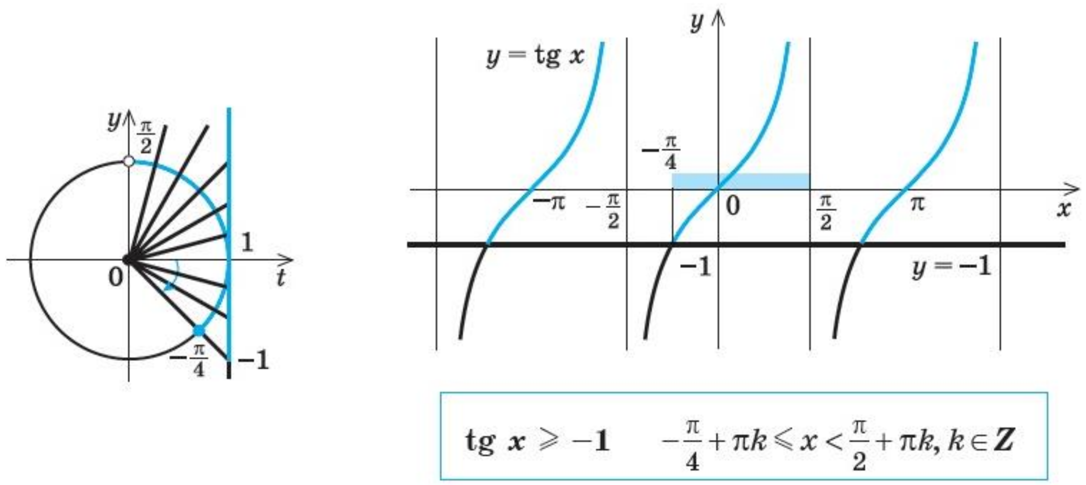


Рисунок 1. Решение тригонометрического неравенства.

Пример 3



Пример 4. $\sin x \le \frac{1}{3}$.

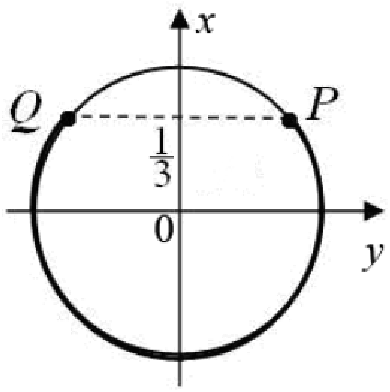


Рис.22

Решение: На тригонометрической окружности множество решений неравенства изобразится дугой PQ, отмеченной на рис.22. Нам нужно выбрать на числовой оси какой-нибудь отрезок, соответствующий этой дуге, и тогда останется только прибавить к его границам $2\pi n$. Выберем какое-нибудь число, соответствующее одному из концов дуги. Очевидно, точке P соответствует $\arcsin\frac{1}{3}$. Раз это число выбрано, выбор числа, соответствующего другому концу, уже предопределен. Чтобы найти это число, надо сдвинуться из точки $\arcsin\frac{1}{3}$ на числовой оси в отрицательном направлении на расстояние, равное длине дуги PQ. Точке O на окружности соответствует ноль, точке B – число $-\pi$, а точке Q – число, расположенное еще на $\arcsin\frac{1}{3}$ левее, то есть $-\pi-\arcsin\frac{1}{3}$. Стало быть, один из отрезков, соответствующих дуге PQ, будет $\left[-\pi-\arcsin\frac{1}{3};\arcsin\frac{1}{3}\right]$, а ответом к неравенству $\sin x \le \frac{1}{3}$ будет объединение отрезков $\left[-\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k;\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\right]$ ($k \in Z$).

Задания для самостоятельного решения:

Решить неравенство:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\sin(2x)<1$;	1) $2\sin 2x > -1$;	1) $2\sin x < -\sqrt{2}$;

2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>-1$; 3) $ctg\,\frac{x}{2}\le-\sqrt{3}$.	2) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)<-\frac{1}{2}$; 3) $ctg\,\frac{x}{2}\ge\sqrt{3}$.	2) $\cos 3x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $3tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\ge-\sqrt{3}$.
4 вариант 1) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)>\sqrt{3}$; 2) $\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $ctg\left(2x+45^0\right)\le-1$.	**5 вариант** 1) $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos 3x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $tg\,2x>-\sqrt{3}$.	**6 вариант** 1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)>0$; 2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<1$; 3) $tg\,2x\ge\sqrt{3}$.
7 вариант 1) $\sin 2x>\frac{1}{2}$; 2) $2\cos x<\sqrt{2}$; 3) $tg(3x)\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$.	**8 вариант** 1) $\sin x\le\frac{3}{5}$; 2) $\cos(1-x)>\frac{1}{2}$; 3) $tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<3$.	**9 вариант** 1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{4}<\frac{4}{5}$; 3) $tg\left(2x-\frac{\pi}{10}\right)\ge0$.

Контрольные вопросы:
Что называется простейшими тригонометрическими неравенствами?
Проиллюстрируйте решение неравенства $\sin x>m$ на окружности.

Домашнее задание: учебник с.120 №10(5-7).

Практическое занятие № 15
Построение графиков элементарных функций. Промежутки возрастания, убывания, наибольшее, наименьшее значения функции. Точки экстремума

Цель: Знать элементарные функции, что является их графиками; определения возрастающей (убывающей) функции; определения точки максимума (минимума) функции
Уметь строить графики элементарных функций. находить промежутки монотонности функции; вычислять точки экстремума функции.

Сведения из теории:
Числовая функция

Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, зависящее от x.

Функции обычно обозначают латинскими буквами. Рассмотрим произвольную функцию f. Независимую переменную x называют аргументом функции. Число y, соответствующее числу x, называют значением функции f в точке x и обозначают $f(x)$. Область определения функции f обозначают $D(f)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, таких, что x принадлежит области определения функции f, называют областью значений функции и обозначают $E(f)$.

Графиком функции f называют множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости, где $y=f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции f.

График линейной функции

Линейная функция задается уравнением $y=ax+b$. Графиком линейной функций является прямая. Чтобы построить прямую достаточно две точки.

График квадратичной, кубической функции

Парабола. График квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим канонический случай: $y=x^2$. Область определения – любое действительное число. Функция $y=x^2$ является чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси Оy.

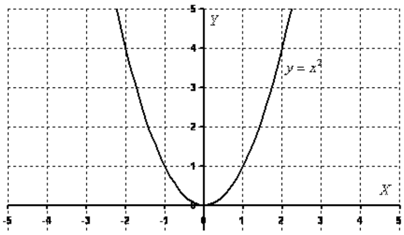


Рисунок 4. График функции $y=x^2$

Пример 2.

Построить график функции $y=-x^2+2x$.

Решение:

сначала находим вершину параболы: $x_в = -\dfrac{b}{2a}$, $x_в = -\dfrac{2}{-2} = 1$. Рассчитываем соответствующее значение «игрек»: $y=-1^2+2\cdot 1=-1+2=1$. Таким образом, вершина находится в точке (1; 1).

Теперь находим другие точки, при этом пользуемся симметричностью параболы.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-3	0	1	0	-3	-8

Выполним чертеж:

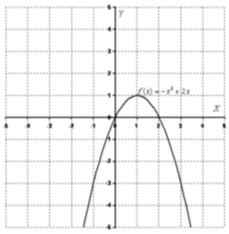


Рисунок 5. График функции $y=-x^2+2x$

Для квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) справедливо следующее: Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз.

Кубическая парабола

Кубическая парабола задается функцией $y=x^3$. Область определения, область значений – любое действительное число. Функция является нечётной. График строим по точкам:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

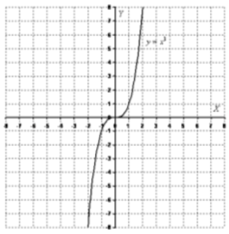


Рисунок 6. График функции $y=x^3$

График функции $y=\sqrt{x}$.

Область определения: $D(y)$: $[0; +\infty)$. Область значений: $E(y)$: $[0; +\infty)$. То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти. При построении подбираем такие значения «икс», чтобы корень извлекался нацело:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Строим график:

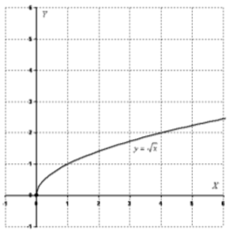


Рисунок 7. График функции $y=\sqrt{x}$

Гипербола

Общий вид $y = \dfrac{1}{x}$. Область определения: $D(y)$: (-∞; 0) и (0; +∞). Область значений: $E(y)$: (-∞; 0) и (0; +∞). Функция является нечётной, гипербола симметрична относительно начала координат.
Выполним чертеж:

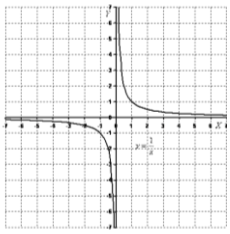


Рисунок 8. График функции $y = \dfrac{1}{x}$

График функции вида $y = \dfrac{a}{x}$ ($a \neq 0$) представляют собой две ветви гиперболы.
Если $a>0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях. Если $a<0$, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях.
Пример 3.

Построить правую ветвь гиперболы $y = \dfrac{6}{x}$.

Решение:
значения x выгодно подбираем так, чтобы делилось нацело:

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Выполним чертеж:

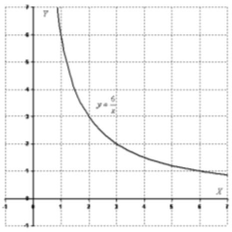


Рисунок 9. График функции $y = \dfrac{6}{x}$

Задания для самостоятельного решения:

Построить графики функций:
1) $y=x^2+2x+3$;
2) $y=2\sqrt{x}$;
3) $y=-\dfrac{6}{x}$.

Возрастание и убывание функций

Функция f возрастает на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.

Функция f убывает на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2)<f(x_1)$.

Иными словами, функция f называется возрастающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция f называется убывающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.

Пример 1.

Докажите, что функция $f(x)=1/x$ является убывающей.

Решение:

область определения функции: $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. Рассмотрим поведение функции на каждом интервале:

$(-\infty;\ 0)$: $x_1=-8$, $x_2=-4$, т.е. $x_2>x_1$, тогда $f(-8)=-0{,}125$, $f(-4)=-0{,}25$, т.е $f(x_2)<f(x_1)$, а значит функция $f(x)=1/x$ является убывающей на интервале $(-\infty;\ 0)$.

$(0;\ +\infty)$: $x_1=4$, $x_2=8$, т.е. $x_2>x_1$, тогда $f(4)=0{,}\ 25$, $f(8)=0{,}125$, т.е. т.е $f(x_2)<f(x_1)$, а значит функция $f(x)=1/x$ является убывающей на интервале $(0;\ +\infty)$.

Однако эта функция не является убывающей на объединении этих промежутков. Например, $1>-1$, но $f(1)<f(-1)$.

При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и убывания максимальной длины, включая концы (если, конечно, они входят в эти промежутки). Так, можно было сказать, что функция $f(x)=1/x$ является убывающей на отрезке $[2;\ 500]$. Это верно, но такой ответ неполон.

При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки удобно пользоваться понятием окрестности.

Окрестностью точки а называется любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервал $(2;\ 6)$ – одна из окрестностей точки 3, интервал $(-3{,}3;\ -2{,}7)$ – окрестность точки -3.

Экстремумы

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x)\geq f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

По определениям значение функции f в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности x_0, как правило, имеет вид гладкого «холма» или заостренного «пика». В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой или заостренной.
Для точек максимума и минимума функции принято общее название – их называют *точками экстремума*.
Значение функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции (общее название – экстремум функции). Точки максимума обозначают x_{max}, а точки минимума x_{min}. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно y_{max}, y_{min}.

Пример 2.
Начертите эскиз графика функции f, если известно, что f возрастает на промежутке (-∞; 2] и убывает на промежутке [2; +∞). Какой будет точка x=2?
Решение:
схематично график можно изобразить в виде:

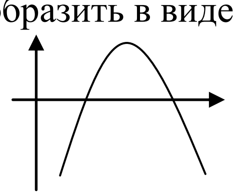


Рисунок 10. Эскиз графика

График имеет вид гладкого «холма», а значит точка x=2 – точка максимума.

Задания для самостоятельного решения:
Начертите эскиз графика функции f, определите вид точек, если:
f возрастает на промежутках (-∞; -5] и [1; 5], убывает на промежутках [-5; 1] [5; +∞).

Контрольные вопросы:
Что называется функцией?
Что является графиком линейной, квадратичной функций?
Какая функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке?
Дайте определение точке максимума (минимума) функции.

Домашнее задание: выполнить с.р. №7 задание 2,3

Практическое занятие № 16
Построение графика обратной функции. Исследование функций по схеме. Арифметические операции над функциями.

Цель: Знать графики элементарных функций; свойства функций;
схему исследования функции;
уметь строить график функции как композицию двух функции,
строить графики функций
Сведения из теории:
Четные и нечетные функции
Рассмотрим функции области определения которых симметричны относительно начала координат, т.е. для любого x из области определения функции число ($-x$) также принадлежит области определения. Среди таких функций выделяют четные и нечетные.
Функция f называется четной, если для любого x из области определения $f(-x)=f(x)$.
Функция f называется нечетной, если для любого x из области определения $f(-x)=-f(x)$.
Свойства графиков:
1. График четной функции симметричен относительно оси ординат.
2. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.
Из этих двух правил вытекает следующее: при построении графика четной или нечетной функции достаточно построить его часть для неотрицательных x, а затем отразить полученный график относительно оси ординат (в случае четной функции) или начала координат (в случае нечетной).
Ранее мы строили графики функций «по точкам». Во многих случаях этот метод дает хорошие результаты, если, конечно, отметить достаточно большое число точек. Однако при этом приходится составлять большие таблицы значений функции, а главное, можно не заметить существенных особенностей функции и в итоге ошибиться при построении графика.
Для того чтобы избежать ошибок, надо научиться выявлять характерные особенности функции, т.е. предварительно провести ее исследование.
Схема исследования функций:
Найти область определения и область значений данной функции.
Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование, т.е. является ли функция четной (нечетной), периодической.
Вычислить координаты графика функции с осями координат.
Найти промежутки знакопостоянства функции.
Выяснить, на каких промежутках функция убывает, а на каких возрастает.

Найти точки экстремума, вид экстремума (минимум или максимум) и вычислить значения функции в этих точках.
Исследовать поведение функции в окрестности характерных точек, не входящих в область определения (например, точка x=0 для функции $f(x)=1/x$), и при больших (по модулю) значениях, аргумента.
Необходимо заметить, что этот план имеет примерный характер.

Построение графика суммы (произведения) двух функций производится сложением (умножением) ординат точек графиков с одинаковыми абсциссами.

Пример 1.
Определите какая из функций является четной (нечетной): $y=x^4$, $y=x^3$.
Решение:
функция $y=x^4$ четная, т.к. $x^4=(-x)^4$, т.е. $y(-x)=y(x)$, а функция $y=x^3$ является нечетной, т.к. $x^3=(-x)^3=-x^3$, т.е. $y(-x)=-y(x)$.

Пример 2.
Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^3-x}$ четная.
Решение:
вычислим $f(-x)$:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3+(-x)}{(-x)^3-(-x)}=\frac{-x^3-x}{-x^3+x}=\frac{-(x^3+x)}{-(x^3-x)}=-\frac{x^3+x}{x^3-x}=f(x),$$

т.е. $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^3-x}$ – четная по определению.

Пример 3.
Пусть даны графики функций $y=x$ и $y=\sin x$. Построить $y=x+\sin x$ и $y=x\sin x$, являющихся соответственно суммой и произведением заданных графиков.
Решение:
графики функций $y=x+\sin x$ и $y=x\sin x$:

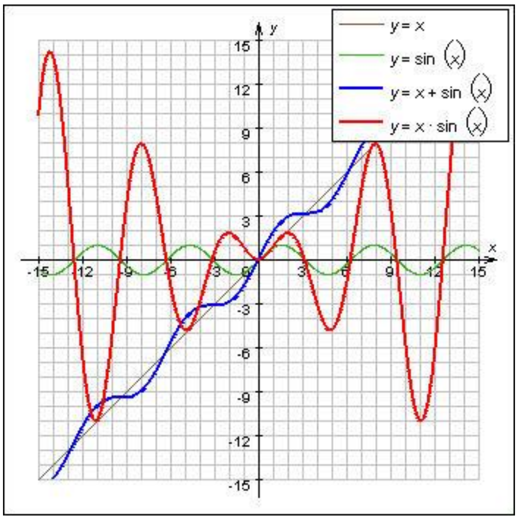


Рисунок 11. Графики функций $y=x$, $y=\sin x$, $y=x+\sin x$, $y=x\sin x$

Пусть известен график $y=f(x)$ и нужно построить график функции $y=|f(x)|$. По определению, $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & x\geq 0 \\ -f(x), & x<0 \end{cases}$.

Значит, часть графика, лежащую в верхней координатной полуплоскости, изменять не надо, а часть графика, лежащую в нижней координатной полуплоскости, нужно отобразить симметрично относительно оси Оx.

Пусть известен график $y=f(x)$ и нужно построить график функции $y=f(|x|)$. Заметим, что при $x\geq 0$ $f(|x|)=f(x)$, а функция $y=f(|x|)$ четная. Поэтому, чтобы построить график функции $y=f(|x|)$, нужно часть графика функции $y=f(x)$, лежащую в левой координатной полуплоскости, отбросить, а часть графика, лежащую в правой координатной полуплоскости, отобразить симметрично относительно оси Оy.

Задания для самостоятельного решения:

1. Построить графики функций:

1) $y=x+\cos x;$

2) $y=|x^2+2x+3|$.

2. Построить график функции f, если известны ее свойства:

1.	Свойство функции	
	Область определения Область значений	[-6; 6] [-2; 5]
2		
	а) с осью Оx	(-4; 0), (-2; 0)
	б) с осью Оy	(0; 2,5)
3		
	а) $f(x)>0$	[-6; -4),

		(-2; 6]
	б) $f(x)<0$	(-4; -2)
4		
	а) возрастания	[-3; 1], [4; 6]
	б) убывания	[-6; -3], [1; 4]
5.1	Точки максимума, максимум функции	$x_{max}=1$ $y_{max}=3$
5.2	Точки минимума, минимум функции	$x_{min1}=-3$, $y_{min1}=-2$; $x_{min2}=4$ $y_{min2}=1$
6	Дополнительные точки графика	(-6; 3), (6; 5)

Контрольные вопросы:
Как построить сумму (произведение) двух функций?
Как построить модуль функции, модуль аргумента?
Перечислите свойства функций.
Перечислите основные этапы исследования функции.

Домашнее задание: выполнить с.р. №7 задание 4

Практическое занятие № 17

Применение свойств функций для решения тригонометрических уравнений. Обратные тригонометрические функции

Цель: Знать определение и свойства тригонометрических функций;
Уметь строить графики тригонометрических функций;

Сведения из теории:
Функции синус и косинус
Числовые функции, заданные формулами $y=\sin x$ и $y=\cos x$, называют соответственно синусом и косинусом (и обозначают $\sin$ и $\cos$).
Область определения этих функций – множество всех действительных чисел. Областью значений функций синус и косинус является отрезок [-1; 1]. Т.е. $D(\sin)=D(\cos)=R$; $E(\sin)=E(\cos)=[-1; 1]$.

Свойства функций синус и косинус:
для любого x справедливы равенства:
1) $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$;
2) $\sin(x+2\pi n)=\sin x$, $\cos(x+2\pi n)=\cos x$, где n – произвольное целое число.

Синусоида

Построим график функции синус на отрезке [0; 2π]. Для этого отметим на оси ординат точки (0; -1) и (0; 1), а на оси абсцисс точку с абсциссой 2π (длина отрезка [0; 2π] шесть клеток ~ 6,28). Далее пользуясь вычисленными значениями синуса построим график функции на отрезке [0; 2π]. Вне этого отрезка заметим, что $sin(x+2\pi n)=sin\,x$ и с помощью параллельных переносов вдоль оси Оx влево и вправо достроим график функции на отрезках [-4π; -2π], [-2π; 0], [2π; 4π]. График синуса называется синусоидой.

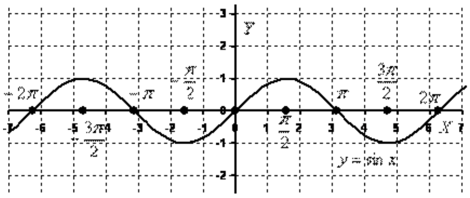


Рисунок 19. График функции $y=sin\,x$

Для построения графика косинуса необходимо воспользоваться формулой $cos\,x=sin(x+\pi/2)$. Это означает, что график косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на расстояние π/2 влево вдоль оси Оx. Поэтому график функции $y=cos\,x$ также является синусоидой.

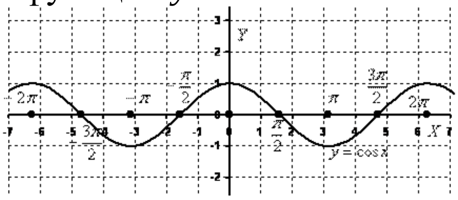


Рисунок 20. График функции $y=cos\,x$

Сведем известные свойства функций в таблицу (всюду полагая, что n – произвольное целое число).

	Функция	
	$y=sin\,x$	$y=cos\,x$
1.1 Область определения	R	R
1.2 Область значений	[-1; 1]	[-1; 1]
2.1 Четность (нечетность)	Нечетная	Четная
2.2 Наименьший положительный период	2π	2π
3.1 Координаты точек пересечения графика с осью Ох	$(\pi n; 0)$	$(\pi/2+\pi n; 0)$
3.2 Координаты точек пересечения графика с осью Оy	(0; 0)	(0; 1)
4.1 Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	$(2\pi n; \pi+2\pi n)$	$(-\pi/2+2\pi n; \pi/2+2\pi n)$

4.2 Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	$(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$	$(\pi/2+2\pi n;\ 3\pi/2+2\pi n)$
5.1 Промежутки возрастания	$[-\pi/2+2\pi n;\ \pi/2+2\pi n]$	$[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$
5.2 Промежутки убывания	$[\pi/2+2\pi n;\ 3\pi/2+2\pi n]$	$[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$
6.1 Точки минимума	$-\pi/2+2\pi n$	$\pi+2\pi n$
6.2 Минимумы функции	-1	-1
6.3 Точки максимума	$\pi/2+2\pi n$	$2\pi n$
6.4 Максимумы функции	1	1

Числовые функции, заданные формулами $y=tg\,x$ и $y=ctg\,x$, называют соответственно тангенсом и котангенсом (и обозначают tg и ctg).
Областью определения функции тангенс является множество всех чисел x, для которых $cos\,x\neq0$, т.е. все числа $x\neq\pi/2+\pi n$, где n - произвольное целое число. Областью определения функции котангенс является множество всех чисел x, для которых $sin\,x\neq0$, т.е. все числа $x\neq\pi n$, где n - произвольное целое число.
Область значений тангенса (котангенса) – вся числовая прямая.

Свойства функций тангенс и котангенс:
для любого x справедливы равенства:
1) $tg\,(-x)=-tg\,x$, $ctg\,(-x)=-ctg\,x$;
2) $tg\,(x+\pi n)=tg\,x$, $ctg\,(x+\pi n)=ctg\,x$, где n – произвольное целое число.
Построение графика тангенса на интервале $(-\pi/2;\ \pi/2)$ аналогично построению синуса. Вследствие тождества $tg\,(x+\pi n)=tg\,x$ график тангенса на всей области определения получается из графика на интервале $(-\pi/2;\ \pi/2)$ параллельным переносом вдоль оси Оx влево и вправо на π, 2π и т.д. График функции тангенс называют тангенсоидой.

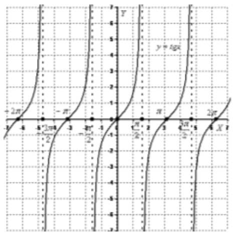


Рисунок 21. График функции $y=tg\,x$

Для построения графика $y=ctg\,x$ воспользуемся тождеством $ctg\,x=-tg\,(x+\pi/2)$. Из этого тождества следует, что для построения графика котангенса необходимо сдвинуть график тангенса на $\pi/2$ влево вдоль оси Оx и отразить полученную кривую относительно оси Оx.

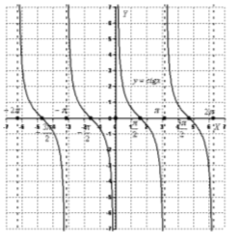


Рисунок 22. График функции $y=ctg\ x$

Сведем известные свойства функций в таблицу (всюду полагая, что n – произвольное целое число).

	Функция	
	$y=tg\ x$	$y=ctg\ x$
1.1 Область определения	$(-\pi/2+\pi n;\ \pi/2+\pi n)$	$(\pi n;\ \pi+\pi n)$
1.2 Область значений	R	R
2.1 Четность (нечетность)	Нечетная	Нечетная
2.2 Наименьший положительный период	π	π
3.1 Координаты точек пересечения графика с осью Ox	$(\pi n;\ 0)$	$(\pi/2+\pi n;\ 0)$
3.2 Координаты точек пересечения графика с осью Oy	(0; 0)	Нет
4.1 Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	$(\pi n;\ \pi/2+\pi n)$	$(\pi n;\ \pi/2+\pi n)$
4.2 Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	$(-\pi/2+\pi n;\ \pi n)$	$(-\pi/2+\pi n;\ \pi n)$
5.1 Промежутки возрастания	$(-\pi/2+\pi n;\ \pi/2+\pi n)$	Нет
5.2 Промежутки убывания	Нет	$(\pi n;\ \pi+\pi n)$
6.1 Точки минимума	Нет	Нет
6.2 Точки максимума	Нет	Нет

Задания для самостоятельного решения:

№1. Построить схематически косинусоиду на интервале $[-3\pi;\ 3\pi]$ и выполнить следующие упражнения:

1) Проиллюстрировать по графику, что:

а) функция $\cos x$ не может принимать значений, превосходящих по абсолютной величине единицу, т. е. $-1\le\cos x\le 1$;

б) каждому действительному значению x соответствует только одно значение $\cos x$ (свойство однозначности косинуса);

в) при замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$ значение функции не изменяется, т. е. $\cos(-x)=\cos x$ (свойство четности косинуса). Как можно использовать свойство четности косинуса при построении его графика;

г) при изменении произвольного значения аргумента на число, кратное числу 2π, значение функции $\cos x$ не изменяется, т. е. $\cos(x+2\pi k)=\cos x$ (свойство периодичности косинуса). Как можно использовать периодичность косинуса при построении его графика;
д) при изменении произвольного знамения аргумента на число π значение функции y заменяется противоположным ему значением $-y$, т. е. $\cos(x\pm\pi)=-\cos x$;
е) уравнение $\cos x=0{,}5$ имеет бесчисленное множество решений. Назвать несколько частных решений этого уравнения.
2) Указать интервалы, в которых функция $y=\cos x$ принимает:
а) положительные значения;
б) отрицательные значения.
Какие четверти единичной окружности соответствуют этим интервалам.
3) Выделить на оси абсцисс и на единичной окружности интервалы, в которых функция $y=\cos x$:
а) возрастает;
б) убывает.
Проиллюстрировать на графике, что в любом интервале монотонности косинус последовательно принимает все свои возможные значения, каждому из которых соответствует только одно значение аргумента в рассматриваемом интервале.
№2. Пользуясь схематическим графиком функции $y=\operatorname{tg} x$ выполнить следующие упражнения:
1) Указать интервалы, в которых функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения.
2) Определить, при каких значениях x на интервале $(-3\pi/2;\ 3\pi/2)$ функция $y=\operatorname{tg} x$: а) убывает; б) возрастает; в) принимает значение, равное нулю; г) теряет смысл.
Выразить формулой множество таких значений x, при которых $y=\operatorname{tg} x$ теряет смысл.
3) Убедиться, что каждому допустимому значению аргумента x соответствует только одно значение функции.
4) Проиллюстрировать на графике, что функция $y=\operatorname{tg} x$ есть периодическая функция с периодом π, т. е. $\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x$.
5) Показать, что каждому значению функции y соответствует бесчисленное множество определенных значений аргумента x.
6) Решить неравенства: а) $\operatorname{tg} x>-1$; б) $|\operatorname{tg} x|<1$.
Контрольные вопросы:
Какие функции называют синусом и косинусом?
Что является графиком функций синус и косинус?
Перечислите свойства функций синус и косинус.
Какие функции называют тангенсом и котангенсом?
Что является графиком функций тангенс и котангенс?

Перечислите свойства функций тангенс и котангенс

Домашнее задание: выполнить задание 2.

Практическое занятие № 18,19

Применение свойств функций к решению показательных и логарифмических уравнений.

Цель: Знать свойства степенной функции с различными показателями степени; уметь строить график степенной функции с различными показателями степени.

Сведения из теории:

Степенная функция с натуральным показателем

Функция $y=x^n$, где n – натуральное число, называется степенной функцией с натуральным показателем. При $n=1$ получаем функцию $y=x$.

Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y=kx^n$, где число k называется коэффициентом пропорциональности.

Перечислим свойства функции $y=kx$:

1. Область определения функции – множество всех действительных чисел.
2. $y=kx$ – нечетная функция, т.к. $f(-x)=k(-x)=-kx=-k(x)=-f(x)$.
3. При $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ убывает на всей числовой прямой.

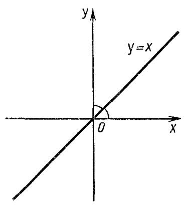


Рисунок 12. График функции $y=kx$

При $n=2$ получаем функцию $y=x^2$. Перечислим свойства функции $y=x^2$:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. $y=x^2$ – четная функция, т.к. $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.
3. На промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает.
4. Графиком функции $y=x^2$ является парабола.

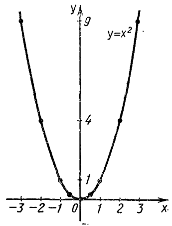


Рисунок 13. График функции $y=x^2$

При n = 3 получаем функцию $y=x^3$, ее свойства:
1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. $y=x^3$ – нечетная функция, т.к. $f(-x)=(-x)^3 =-x^3=-f(x)$.
3. Функция $y=x^3$ возрастает на всей числовой прямой.
4. График функции $y=x^3$ называется кубической параболой.

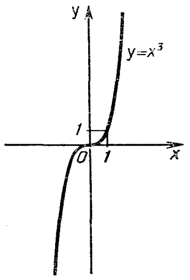


Рисунок 14. График функции $y=x^3$

Пусть n – произвольное четное натуральное число, большее двух: n=4, 6, 8,... .
В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^2$. График такой функции напоминает параболу $y=x^2$, только ветви графика при $|n|>1$ круче идут вверх, чем больше n, а при $|n|<1$ «теснее прижимаются» к оси x, чем больше n.
Пусть n – произвольное нечетное число, большее трех: n=5, 7, 9, ...
В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу (только ветви графика тем круче идут вверх, вниз, чем больше n). Отметим также, что на промежутке (0; 1) график степенной функции $y=x^n$ тем медленнее отдаляется от оси Оx с ростом x, чем больше n.

Степенная функция с целым отрицательным показателем.
Рассмотрим функцию $y=x^{-n}$, где n – натуральное число. При n=2 получаем $y=x^{-2}$ или $y=\frac{1}{x^2}$. Свойства этой функции:
1. Функция определена при всех $x\neq 0$.
2. $y=\frac{1}{x^2}$ – четная функция.

3. $y=\frac{1}{x^2}$ – убывает на (0; +∞) и возрастает на (-∞; 0).

Теми же свойствами обладают любые функции вида $y=x^{-n}$ при четном n, большем двух.

Функции вида $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[n]{x}$ обладают теми же свойствами, как и функция $y=x^n$.

Степенная функция с положительным дробным показателем

Рассмотрим функцию $y=x^r$, где r – положительная несократимая дробь. Перечислим некоторые свойства этой функции:

1. Область определения – луч [0; +∞).
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Функция $y = x^r$ возрастает на [0; +∞).

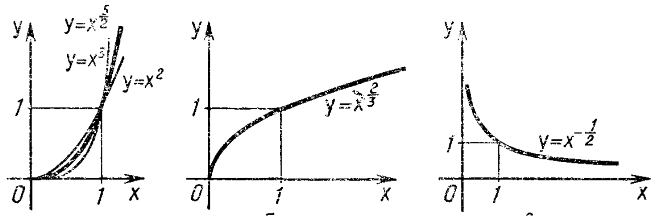


Рисунок 15. Графики степенных функций

На рисунке слева изображен график функции $y=x^{\frac{5}{2}}$. Он заключен между графиками функций $y=x^2$ и $y=x^3$, заданных на промежутке [0; +∞). Подобный вид имеет график любой функции вида $y=x^r$, где $r>1$.

На том же рисунке посередине изображен график функции $y=x^{\frac{2}{3}}$. Подобный вид имеет график любой степенной функции $y=x^r$, где $0<r<1$.

Степенная функция с отрицательным дробным показателем

Рассмотрим функцию $y=x^{-r}$, где r – положительная несократимая дробь. Перечислим свойства этой функции:

1. Область определения – промежуток (0; +∞).
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Функция $y=x^{-r}$ убывает на (0; +∞).

Пример

Построить график функции $y=x^{-\frac{1}{2}}$.

Решение:

построим таблицу значений данной функции:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9

y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой:

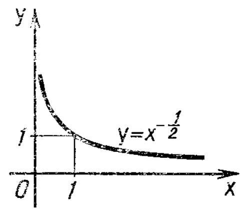


Рисунок 16. График функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$

Подобный вид имеет график любой функции y=x^{-r}, где r – отрицательная дробь.

Задания для самостоятельного решения:

Постройте график функции и опишите ее свойства:

1 вариант $y = 2\sqrt{x+1}$.	**2 вариант** $y = 2 - \sqrt[4]{x}$.	**3 вариант** $y = 1 + \left\|\sqrt[3]{x}\right\|$.
4 вариант $y = 3x^{-2}$.	**5 вариант** $y = \sqrt{x} - 4$.	**6 вариант** $y = 1 - \sqrt[3]{x}$.
7 вариант $y = \sqrt{x} + 3$.	**8 вариант** $y = \sqrt[5]{x^4} + 1$.	**9 вариант** $y = \sqrt{x-2} + 1$.

Контрольные вопросы:

Что называется степенной функцией?

Перечислите виды степенных функций.

Перечислите свойства функции для различных показателей степени.

Домашнее задание: учебник с.44-45 №1,4

Логарифмическая функция, ее график и свойства. Решение логарифмических уравнений графически.

Цель:

Знать основные свойства логарифмов;

Уметь строить график логарифмической функции с разными основаниями.

Сведения из теории:

Пусть a – положительное число, $a \neq 1$.

Функцию, заданную формулой $y=log_a x$ называют *логарифмической функцией с основанием а*.

Перечислим основные свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел $\boldsymbol{R}_+$, т.е. $D(log_a)=(0; +\infty)$.

2. Область значений – множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, т.е. $E(log_a)=(-\infty; +\infty)$.

3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при $a>1$ или убывает при $0<a<1$.

Для построения графика заметим, что значение 0 логарифмическая функция принимает в точке 1; $log_a 1=0$ при любом $a>1$, т.к. $a^0=1$.

Вследствие возрастания функции при $a>1$ получаем, что при $x>1$ логарифмическая функция принимает положительные значения, а при $0<x<1$ – отрицательные.

Если $0<a<1$,то логарифмическая функция убывает на $\boldsymbol{R}_+$, поэтому функция принимает положительные значения при $0<x<1$, а при $x>1$ – отрицательные.

Опираясь на все вышесказанное строим графики логарифмической функции $y=log_a x$ при $a>1$ и при $0<a<1$.

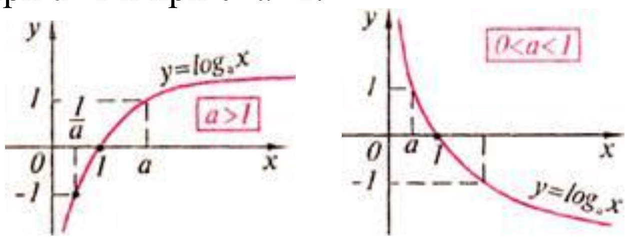


Рисунок 17. График логарифмической функции

Справедливо следующее утверждение: графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y=x$.

Пример

Решить графически уравнение $\log_2 x=-x+1$.

Решение:

построим графики функций $y=\log_2 x$ и $y=-x+1$ в одной координатной плоскости:

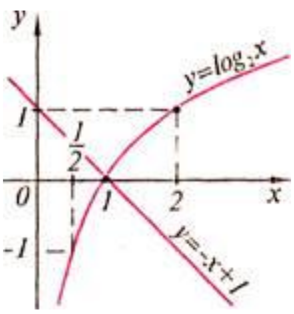


Рисунок 18. Графики функций $y=\log_2 x$ и $y=-x+1$

Графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой x=1.
Проверка показывает, что x=1 – корень данного уравнения.

Задания для самостоятельного решения:
Решите графически уравнение:

1 вариант $\log_4(x+3)=x-1$.	**2 вариант** $\lg(1-x)=x^2-1$.	**3 вариант** $\frac{1}{2}\log_2(x+1)=x$.
4 вариант $1+\log_2(x+2)=2-x$.	**5 вариант** $\log_{\frac{1}{2}} x=x-3$.	**6 вариант** $\log_2 x=2^{5-x}$.
7 вариант $\left\|\log_{\frac{1}{2}} x\right\|=1-x$.	**8 вариант** $\log_{\frac{1}{3}} x=2x-7$.	**9 вариант** $\lg(1-x)=5-x$.

Контрольные вопросы:
Что называется логарифмической функцией?
Перечислите свойства логарифмической функции.

Домашнее задание:с.р.№7 задание 5,6

Практическое занятие № 20, 21
Решение задач на вычисление членов числовой последовательности. Вычисление суммы числового ряда

Цель: Знать способы задания последовательностей; свойства числовых последовательностей;
Уметь вычислять члены последовательностей по общему члену; задавать формулой общий член последовательности, находить сумму числового ряда.

Сведения из теории:
Числовая последовательность – функция вида $y=f(x)$, $x\in \boldsymbol{N}$, где $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел (или функция натурального аргумента), обозначается $y=f(n)$ или $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$.
Значения y_1, y_2, y_3,…называют соответственно первым, вторым, третьим, … членами последовательности.
Пример
Вычислить первые три значения для функции $y=n^2$.
Решение:

подставляя в $y=n^2$ значения $n=1$, $n=2$, $n=3$ получим первые три значения функции:

$$y_1=1^2=1;$$
$$y_2=2^2=4;$$
$$y_3=3^2=9.$$

Способы задания последовательностей

Последовательности можно задавать различными способами, среди которых особенно важны три: аналитический, описательный и рекуррентный.

1. Последовательность задана аналитически, если задана формула ее n-го члена: $y_n=f(n)$.

Например, $y_n=2n-1$ – последовательность нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, …

2. Описательный способ задания числовой последовательности состоит в том, что объясняется, из каких элементов строится последовательность.

Например, «Все члены последовательности равны 1». Это значит, речь идет о стационарной последовательности 1, 1, 1, …, 1, ….

Или, например, «Последовательность состоит из всех простых чисел в порядке возрастания». Таким образом, задана последовательность 2, 3, 5, 7, 11, …. При таком способе задания последовательности в данном примере трудно ответить, чему равен, скажем, 1000-й элемент последовательности.

3. Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывается правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.

Например, $y_1=3$; $y_n=y_n-1+4$, если $n=2, 3, 4,…$.

Здесь $y_1=3$; $y_2=3+4=7$; $y_3=7+4=11$; ….

Можно видеть, что полученная в этом примере последовательность, может быть задана и аналитически: $y_n=4n-1$.

Пример

Вычислить следующие четыре члена последовательности $y_1=1$; $y_2=1$; $y_n=y_n-2+y_n-1$.

Решение:

из формулы $y_n=y_n-2+y_n-1$ видно, что каждый следующий член последовательности равен сумме двух предыдущих, поэтому:

$$y_1=1;\ y_2=1;\ y_3=1+1=2;\ y_4=1+2=3;\ y_5=2+3=5;\ y_6=3+5=8.$$

Последовательность, составленную в этом примере, специально изучают в математике, поскольку она обладает рядом интересных свойств и приложений. Ее называют последовательностью Фибоначчи – по имени итальянского математика 13в. Задать формулой последовательность Фибоначчи рекуррентно очень легко, а аналитически – очень трудно. n-е число Фибоначчи выражается через его порядковый номер следующей формулой:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Свойства числовых последовательностей

Числовая последовательность – частный случай числовой функции, поэтому ряд свойств функций рассматриваются и для последовательностей.

Последовательность $\{y_n\}$ называют *возрастающей*, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего:

$$y_1<y_2<y_3< \ldots <y_n<y_n+1< \ldots.$$

Последовательность $\{y_n\}$ называют *убывающей*, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_n > y_n+1 > \ldots.$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – *монотонные последовательности*.

Например, $y_1=1$; $y_n=n^2$ – возрастающая последовательность, а $y_1=1$; $y=\frac{1}{n}$ – убывающая последовательность.

Последовательность называется *периодической*, если существует такое натуральное число T, что начиная с некоторого n, выполняется равенство $y_n=y_n+T$. Число T называется длиной периода.

Например, последовательность $y_n=(-1)^n$ периодична с длиной периода $T=2$.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n=\frac{n}{n+1}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$	**2 вариант** 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\ldots$	**3 вариант** 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n=\frac{1}{(3n-1)(2n+1)}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{4}-\frac{4}{9}+\frac{6}{16}-\frac{8}{25}+\ldots$
4 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и	**5 вариант** 1) Найдите первые пять членов последовательности, и	**6 вариант** 1) Найдите первые пять членов последовательности, и

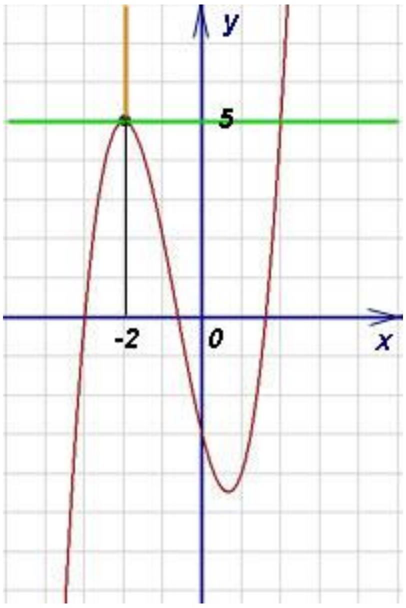
определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{2n}{2n+1}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\sqrt[3]{3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots$	определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{(n+1)!}{2n}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{7\cdot 10}+\dots$	определите ее вид по его заданному общему члену: $\mathrm{u}_{\mathrm{n}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}+\frac{4}{11}-\frac{5}{14}+\dots$
7 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{2^n+3}{2^{n+1}}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{9}-\frac{1\cdot 2}{25}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{49}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{81}+\dots$	**8 вариант** 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{1}+\frac{4}{4}+\frac{8}{9}+\frac{16}{16}+\dots$	**9 вариант** 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{3^{-n}}{(2n+1)^2}$ 2) Найдите n-й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{2}+\frac{3}{4}-\frac{4}{8}+\frac{5}{16}-\dots$

Контрольные вопросы:
Что называется числовой последовательностью?
Перечислите способы задания последовательностей.
Перечислите свойства числовых последовательностей.

Домашнее задание: учебник с. 165 – 171 №1-2.

Практическая работа *№22*
Уравнение касательной к графику
***Цель*:** Отработка навыков нахождения уравнения касательной к графику ф ункции.
Сведения из теории:
Уравнение касательной к графику функции имеет вид
$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$

причем угловой коэффициент **этой касательной равен производной функции в этой точке:** $k=f'\left(x_0\right)$.
Другими словами, **производная функции в точке x_0 равняется тангенсу** угла наклона касательной к графику функции в этой точке. Уравнение прямой, проходящей через точку (a; b), задается формулой
y = k (x – a) + b.
Пример1.
Найти уравнение касательной к графику функции $y=\cos x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{6}$.
Решение. Найдем значение функции $y(x_0)$. Для этого вместо x подставим (x_0).
$y(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдем $y'(x_0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$. Найдём уравнение касательной $y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.
Пример 2. Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y=x^3+2x^2-4x-3$, если абсцисса точки касания $x_0=-2$.
Решение. Найдём ординату точки касания:
$y_0=y(-2)=-8+2\bullet4-4\bullet(-2)-3=5$.
Найдём производную функции:
$f'(x)=y'=3x^2+4x-4$.
Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной:
$f'(x_0)=y'(-2)=12-8-4=0$.
Теперь у нас есть всё, что требуется подставить в приведённую в теоретической справке запись, чтобы получить уравнение касательной. Получаем
$y-5=0(x+2)$
$y-5=0$
В этом примере нам повезло: угловой коэффициент оказался равным нулю, поэтому отдельно приводить уравнение к общему виду не понадобилось. Теперь можем составить и уравнение нормали:
$x+2+0(y-5)=0$
$x+2=0$.
На рисунке ниже: график функции бордового цвета, касательная зелёного цвета, нормаль оранжевого цвета.



Пример 3.
Найдите угловой коэффициент наклона касательной, проведѐнной к графику функции $y = e^x - 5x - 10$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$
Ответ: -4

<u>Задания для самостоятельного решения:</u>

1. Найдите угловой коэффициент наклона касательной, проведённой к графику функции $y = e^x - x - 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$
2. Найдите угловой коэффициент наклона касательной, проведённой к графику функции $y = \sin x + \cos x$ в его точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$
3. Найдите угловой коэффициент наклона касательной,

3

проведённой к графику функции $y = lnx + \frac{x}{3}$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$
4. Найдите угловой коэффициент наклона касательной, проведённой к графику функции $y = 3x^2 - 5x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$
абсциссой $x_0 = 3$
5. Укажите абсциссу точки графика функции $y = -2x^2 - x + 4$, в которой угловой коэффициент равен нулю.
6. Написать уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = (2x+1)^3$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$

Домашнее задание: учебник с.174-176 № 1-4.

Применение правил дифференцирования. Вычисление производных основных элементарных функций

Цель: Знать систему и определение производной, табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций; правила дифференцирования функций;
Уметь находить производную функции; находить дифференциал функции, дифференцировать элементарные функции.

Сведения из теории:

Правила вычисления производных:

$$1.\ (x \pm y)' = x' \pm y',$$

$$2.\ (xy)' = x'y + xy',$$

$$3.\ \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy'}{y^2}.$$

Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(kx+b)' = k$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a$		
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$		
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$		

Пример1.

Вычислите производную функции $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x$.

Решение:
воспользуемся формулами и правилом 1 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x\right)' = -2 \cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} + 5 \cdot 1x^{1-1} = -4x - x^2 + 5.$$

Пример 2.
Вычислите производную функции $f(x) = \sqrt{x}(x-3)$.
Решение:

воспользуемся формулами и правилом 2 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}(x-3)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'(x-3) + \sqrt{x}(x-3)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x}\cdot 1.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} = \frac{x-3+2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите производную функции:

1 вариант 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; 2) $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$; 4) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)(x+3)}{15}$.	**2 вариант** 1) $f(x) = 3x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 4x$; 2) $f(x) = (x-2)\sqrt{3x}$; 3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}$; 4) $f(x) = (x^2+3)(x-4)$.
3 вариант 1) $f(x) = 2x^2\sqrt{x} - 4x + 11 + \dfrac{1}{x}$; 2) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{x}$; 4) $f(x) = \ln x(x+3)$.	**4 вариант** 1) $f(x) = 3x\sqrt[3]{x} - 2x + 5 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = \sqrt{x+1}(x^3-5)$; 3) $f(x) = \dfrac{9x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x+3}$.
5 вариант 1) $f(x) = 3x^3\sqrt{x} - 2x + 2 + \dfrac{2}{x^2\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = 0{,}5(x+1)^2$; 3) $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$; 4) $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-5)}{12}$.	**6 вариант** 1) $f(x) = \dfrac{3x^3}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{x}} + 5$; 2) $f(x) = (x^3+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^3-3x}{x+2}$; 4) $f(x) = (x^2-1)(x+3)$.
7 вариант 1) $f(x) = \dfrac{-2x^3}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{3x^2}{\sqrt{x}} + 5x - 1$; 2) $f(x) = (x^3-2)\sqrt{x+1}$; 3) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 2}{4x}$; 4) $f(x) = \ln x(e^x-1)$.	**8 вариант** 1) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{4}x^4 - 0{,}5x^2 - 5$; 2) $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - x)$; 3) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$.
9 вариант	3) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$;

1) $f(x)=2x^3-4x^2-5x+3$;	4) $f(x)=(x^3-1)(x^2+1)$.
2) $f(x)=(x-1)\sqrt{x+1}$;	

Контрольные вопросы:
Перечислите значения производных некоторых табличных функций.
Сформулируйте правила вычисления производных.

Домашнее задание: выучить таблицу производных, учебник с.182 №1-5

Практическое занятие № 23
Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Цель**:** освоить навыки нахождения наименьшего и наибольшего значения функции с помощью производной

Сведения из теории
Схема нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции
Найти область определения функции.
Найти производную функции.
Найти критические точки.
В каждом из интервалов, а которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции.
Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.
Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Найти производную функции.
Найти критические точки функции и выбрать те, которые принадлежат данному отрезку.
Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.
Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

Пример 1. Найти точку максимума функции $y=x^3-48x+17$.

Решение.

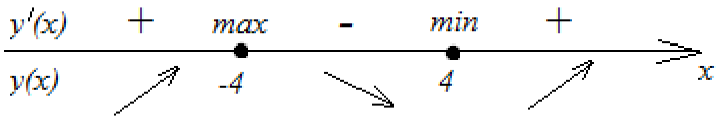
1. $D(y)=R$

2. Найдем производную функции: $y'=\left(x^3-48x+17\right)'=3x^2-48$.

3. Критические точки:

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4 \end{array}\right. .$$

Производная существует во всех точках области определения функции.
4. Отметим найденные точки на числовой оси и определим знак производной справа и слева от этих точек:



При переходе через точку $x = -4$ знак производной меняет свой знак с плюса на минус, следовательно, в силу теоремы 10.4, $x = -4$ - точка максимума.

Ответ: -4.

Пример 2. Найти наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0,4]$.

Решение. Воспользуемся схемой нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке, представленной выше.

1. Найдем производную функции: $y' = 3x^2 - 27 = 3(x-3)(x+3)$.
2. Критические точки:

$$3(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 3,\ x = -3.$$

Отрезку $[0,4]$ принадлежит только точка $x = 3$.

3. Вычислим значения функции в критической точке и на концах отрезка:

$$y(0) = 0, \quad y(4) = -44, \quad y(3) = -54.$$

4. Наименьшее значение $y_{наим} = y(3) = -54$.

Ответ: -54.

Задания для самостоятельного решения:

1) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1; 4]$
2) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 48x + 48$ на отрезке $[-1; 4]$
3) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 21x + 21$ на отрезке $[-3; 4]$
4) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 - 26x + 26$ на отрезке $[-2; 4]$
5) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 2x^2 - 30x + 30$ на отрезке $[-1; 4]$
6) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 15x + 15$ на отрезке $[-1; 4]$
7) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 16x + 16$ на отрезке $[0; 15]$

8) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 24x + 24$ на отрезке $[-1; 7]$

9) Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 - 12x + 12$ на отрезке $[-1; 5]$

Контрольные вопросы:

Сформулируйте правила вычисления наименьшего и наибольшего значения функции на промежутке.

Домашнее задание: учебник с 187 №1,2

Практическое занятие № 32

Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком

Цель: *Уметь применять определение производной и ее механический смысл к решению прикладных задач*.

Сведения из теории

Физический смысл первой производной.

Физический смысл производной заключается в том, что мгновенная скорость движения $\vartheta(t)$ в момент времени t есть производная пути по времени, т.е.

$$\vartheta(t) = \frac{dS(t)}{dt} = S'(t)$$

Физический смысл второй производной.

Ускорение прямолинейного движения в данный момент времени есть первая производная скорости по времени или вторая производная пути по времени.

$$a(t) = \vartheta'(t) = S''(t)$$

<u>Пример.</u>

1. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением

$$S = t^3 - 6t^2 - 12t + 3.$$

В какой момент времени ускорение движения точки будет равно 24 м/с^2?

Решение.

а) Найдем скорость движения точки по формуле: $\vartheta(t) = S'(t)$

$$\vartheta(t) = \left(t^3 - 6t^2 - 12t + 3\right)' = 3t^2 - 12t - 12$$

б) Найти ускорение движения точки по формуле: $a(t) = \vartheta'(t)$

$$a(t) = \left(3t^2 - 12t - 12\right)' = 6t - 12$$

в) Из условия $a = 24$ м/с^2, найти момент времени:

$6t - 12 = 24$

$6t = 36$

$t = 6$ с

Ответ: 6 с.

Правила дифференцирования и таблица производных основных функций.

Правила.

1. $C' = 0$
2. $x' = 0$
3. $(U \pm \vartheta)' = U' \pm \vartheta'$
4. $(U \cdot \vartheta)' = U' \cdot \vartheta + U \cdot \vartheta'$
5. $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$
6. $\left(\dfrac{U}{\vartheta}\right)' = \dfrac{U' \cdot \vartheta - U \cdot \vartheta'}{\vartheta^2}$

Производные основных элементарных функций.

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \neq 0$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Задания для самостоятельного решения

1. Тело движется вверх по закону $S(t) = \upsilon_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$ с начальной скоростью $\upsilon_0 = 30 м/с$, $g = 9{,}8 м/с^2$. Через сколько секунд скорость станет равной $10 м/с$?

2. Найдите силу, действующую на тело массой $5кг$, движущееся по закону $S(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - 2t + 1$ в момент времени $t = 3c$.

3. Определить кинетическую энергию точки, массой $m = 2кг$, движущейся по закону $S(t) = 3t^2 + 4$ в момент времени $t = 2c$.

4.Точка движется по прямой по закону $S(t) = 2t^2 - 3t - 1$. Найти ускорение точки в момент времени $t = 2c$.

Домашнее задание: выполнить с.р. № 8 вариант 2.

Практическое занятие № 24

Решение практических задач с использованием понятия второй производной.

Цель: Знать систему и определение производной, второй производной и производных высших порядков, табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций, правила вычисления производной сложной функции;
Уметь находить производную сложной функции, находить вторую производную и производную высших порядков.

Сведения из теории:

Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $z = f(x)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, которая вычисляется по формуле:

$$z'(x_0) = (f(g(x_0))' = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Пример 1.

Вычислите производную функции $y = (x^2 + 3x + 10)^2$.

Решение:

представим заданную функцию как композицию квадратичной функции и степенной

$$y = (x^2 + 3x + 10)^2;$$

$$g(x) = x^2 + 3x + 10;$$

$$f(x) = (g(x))^2;$$

$$f'(x) = ((g(x))^2)' = 2g(x) \cdot (g(x))';$$

$$y' = 2(x^2 + 3x + 10) \cdot (x^2 + 3x + 10)' = 2(x^2 + 3x + 10)(2x + 3).$$

Производные высших порядков

Вторая производная это производная от первой производной, т.е. $y'' = (y')'$, и т.д.

Производные высших порядков обозначаются римскими цифрами.

Вторая производная, ее механический смысл.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всей области ее определения. Производная $y' = f'(x)$ называется производной первого порядка. Пусть первая производная $y' = f'(x)$ так же является дифференцируемой функцией от x. Производная от первой производной называется второй производной или производной второго порядка. Обозначение: $y'', f'', \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Механический смысл второй производной. Пусть материальная точка движется по закону $s = f(t)$. Скорость движения материальной точки определяется по формуле: $v(t) = s'(t) = \dfrac{ds}{dt}$.

Скорость $v(t)$ так же функция времени t. Тогда производная

$$v'(t) = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

если она существует, определяет скорость изменения скорости материальной точки, движущейся по закону $s = f(t)$.

Скорость изменения скорости называется ускорением и обозначается $a(t)$.

Ускорение $a(t)$ прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени.

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Пример 2. Тело движется прямолинейно по закону $s = 1 - 2t + t^3$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.

$v(t) = s'(t) = -2 + 3t^2$ $\qquad v(3) = -2 + 3 \cdot 3^2 = 25$ м/с.

$a(t) = v'(t) = 6t$ $\qquad a(3) = 6 \cdot 3 = 18$ м/с^2

Пример 3.

Найти четвертую производную $y = x^6 + 4x + 12$.

Решение:

вычисляем последовательно производные:

$$y' = 6x^5 + 4;$$

$$y'' = 30x^4;$$

$$y''' = 120x^3;$$

$$y^{IV} = 360x^2.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите значение «сложной» производной в указанной точке:

1 вариант 1) $f(x) = \sin^2 x;\ \ f'(\pi/4);$ 2) $f(x) = \ln\cos x;\ \ f'(-\pi/3);$ 3) $f(x) = \sin 2x - \cos^2 x;\ \ f'(0);$ 4) $f(x) = \ln tgx;\ \ f'(\pi/4);$ 5) $f(x) = e^{\sin x};\ \ f'(0).$	**2 вариант** 1) $f(x) = \cos^2 x;\ \ f'(-\pi/4);$ 2) $f(x) = \ln\sin x;\ \ f'(\pi/6);$ 3) $f(x) = \sin^2 x + \cos 2x;\ \ f'(0);$ 4) $f(x) = \ln ctgx;\ \ f'(-\pi/4);$ 5) $f(x) = e^{\cos 2x}; f'(\pi/4).$
3 вариант 1) $f(x) = \ln\sin^2 x;\ \ f'(\pi/4);$ 2) $f(x) = \cos^2 x^2;\ \ f'(\sqrt{\pi}/2);$	**4 вариант** 1) $f(x) = -2\sin^2 x;\ \ f'(-\pi/4);$ 2) $f(x) = \ln\cos x;\ \ f'(\pi/3);$ 3) $f(x) = 2\sin 2x + 3\cos 3x;\ \ f'(0);$

3) $f(x)=2\sin^2 x\cos x;\ \ f'(\pi/2);$ 4) $f(x)=tg^2 3x;\ \ f'(0);$ 5) $f(x)=e^{\sin 2x}-3e^{\cos 2x};\ f'(0).$	4) $f(x)=\ln tgx;\ \ f'(\pi/4);$ 5) $f(x)=e^{-2\sin x};\ \ f'(0).$
5 вариант 1) $f(x)=\ln\cos^2 2x;\ \ f'(\pi/8);$ 2) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x;\ f'(\pi/4);$ 3) $f(x)=\ln\sqrt{\cos 2x};\ \ f'(\pi/8);$ 4) $f(x)=\ln tg2x;\ \ f'(\pi/8);$ 5) $f(x)=e^{\cos 2x}-2e^{\sin 2x};\ f'(\pi/4).$	**6 вариант** 1) $f(x)=\ln tg^2 2x;\ \ f'(\pi/24);$ 2) $f(x)=\cos^3 x;\ f'(\pi/4);$ 3) $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x;\ \ f'(\pi/4);$ 4) $f(x)=e^{-\sin x}-e^{-\cos x};\ f'(\pi/2);$ 5) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x};\ f'(\pi/4).$
7 вариант 1) $f(x)=\ln\cos^2 4x;\ \ f'(\pi/16);$ 2) $f(x)=4\cos^2 x;\ f'(\pi/4);$ 3) $f(x)=4\sin^5 2x;\ \ f'(\pi/8);$ 4) $f(x)=\ln tg3x;\ \ f'(\pi/12);$ 5) $f(x)=e^{\sin x}+e^{\cos x};\ f'(\pi/2).$	**8 вариант** 1) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x};\ \ f'(\pi/8);$ 2) $f(x)=\cos^4 3x;\ \ f'(\pi/6);$ 3) $f(x)=\ln\sqrt{tg3x};\ \ f'(\pi/12);$ 4) $f(x)=\arcsin 4x+e^{3x};\ \ f'(0);$ 5) $f(x)=5\arccos\sqrt{x};\ f'(1/2).$
9 вариант 1) $f(x)=\ln\sqrt{\cos 2x};\ \ f'(-\pi/8);$ 3) $f(x)=\ln\sqrt{ctg3x};\ \ f'(-\pi/12);$ 5) $f(x)=5arccos\sqrt{1-x};\ f'(1/2).$	 2) $f(x)=\sin^4 6x;\ f'(\pi/3);$ 4) $f(x)=arctg\sqrt{x};\ \ f'(1/4);$

Контрольные вопросы:
Сформулируйте правила вычисления производных сложной функции.
Что называется второй производной данной функции?
Домашнее задание:

Практическое занятие № 25
Установление связи свойств функции и производной по их графикам. Проведение с помощью производной исследования функции, заданной формулой.

Цель: Знать общую схему построения графиков функций;
Уметь исследовать функцию с помощью первой, второй производной, строить графики функций.

Сведения из теории:
Общая схема построения графиков функций:
найти область определения функции;
найти точки пересечения графика функции с осями координат;
найти промежутки монотонности функции и экстремумы функции;
найти промежутки выпуклости и точки перегиба;

построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример 1.

Исследовать функцию $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ и построить ее график.

Решение:

1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых x. Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.

2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат: график функции $y=(x+1)\cdot(x–2)^2$ пересекает ось Оx при y=0, т. е.

$$(x+1)\cdot(x-2)^2=0;$$
$$x+1=0 \text{ или } (x-2)^2=0;$$
$$x=-1 \text{ или } x=2.$$

График функции $y=(x+1)\cdot(x–2)^2$ пересекает ось Оy при x=0, т. е.

$$y=(0+1)\cdot(0-2)^2=1\cdot4=4.$$

Т.о. мы получили три точки: (–1; 0), (2; 0), (0; 4).

3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой производной:

$$y'=((x+1)\cdot(x-2)^2)'=3x\cdot(x-2).$$

Из уравнения y'=0 найдем критические точки:

$$3x\cdot(x-2)=0;$$
$$x_1=0,\ x_2=2.$$

Результаты решения занесем в таблицу:

x	(–∞, 0)	0	(0; 2)	2	(2; +∞)
y'	+	0	–	0	+
y	↗	4	↘	0	↗
	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах (–∞, 0) и (2, +∞), убывает на интервале (0; 2), имеет максимум при x=0 и минимум при x=2: $y_{\max}=y(0)=4$; $y_{\min}=y(2)=0$.

4) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной:

$$y''=(3x\cdot(x-2))'=6\cdot(x-1).$$

Кривая выпукла там, где $y''<0$, т. е.

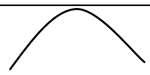
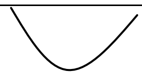
$$6\cdot(x-1)<0,$$
$$x<1.$$

Кривая вогнута там, где $y''>0$, т. е. $x>1$.

На интервале (–∞, 1) кривая выпукла; на интервале (1, +∞) – вогнута.

Точку перегиба найдем из уравнения $y''=0$. Т. о., $x=1$ – абсцисса точки перегиба, т.к. эта точка разделяет интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Ордината точки перегиба: $y(1)=2$.

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+
y		2	
	выпукла	перегиб	вогнута

5) По полученным точкам строим график:

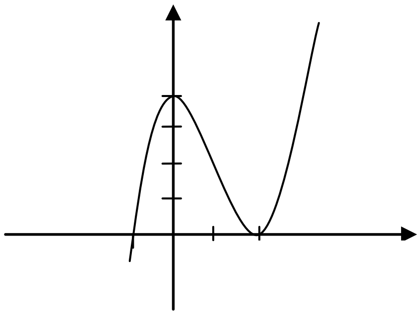


Рисунок 23. График функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$

Задания для самостоятельного решения:

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

1 вариант $y=-x^4+8x^2+9$.	**2 вариант** $y=x^3-3x$.	**3 вариант** $y=x^3+6x^2+9x+8$.
4 вариант $y=x^4-5x^2+4$.	**5 вариант** $y=x^3-6x^2+9x-3$.	**6 вариант** $y=x^3-12x+4$.
7 вариант $y=-x^3+x$.	**8 вариант** $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$.	**9 вариант** $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$.

Контрольные вопросы:

Что называется областью определения и областью значений функции?

Приведите примеры применения первой производной к исследованию функции.

Приведите примеры применения второй производной к исследованию функции.

Расскажите общую схему исследования и построения графика функции.

Домашнее задание: выполнить с.р №9

Практическое занятие № 26

Решение задач на связь первообразной и ее производной. Правила нахождения первообразных

Цель: *закрепить знания, умения и навыки интегрирования функций*

Теоретический материал:

Определение: **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

F(x) + C. Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$- есть некоторая первообразная функции $f(x)$ на этом промежутке, С – const. При этом знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ - подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменная интегрирования, С-постоянная интегрирования.

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется интегрированием данной функции.

Интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования. У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределенный интеграл.

Таблица неопределенных интегралов

$\int dx = x + C$	$\int sinxdx = -cosx + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int cosxdx = sinx + C$	$\int tgxdx = -ln\|cosx\| + C$
$\int \frac{dx}{x} = ln\|x\| + C$	$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$	$\int ctgxdx = ln\|x\| + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$	$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \ell^x dx = \ell^x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$

Свойства неопределенного интеграла:

$\int dF(x) = F(x) + C;$

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C;$

<u>Пример 1</u>

Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 2x^2dx$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Непосредственное интегрирование

Найти интегралы и проверить правильность интегрирования дифференцированием.

1) $\int x^3dx$, 2) $\int\sqrt[5]{x^4}dx$, 3) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2}}$, 4) $\int 10xdx$, 8) $\int -\frac{dx}{3}$.

Решение.

1) $\int x^3dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+c=\frac{x^4}{4}+c, \quad (\frac{x^4}{4}+c)'=x^3$ - интеграл вычислен, верно.

2) $\int\sqrt[5]{x^4}dx=\int x^{\frac{4}{5}}dx=\frac{x^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}}+c=\frac{5x\sqrt[5]{x^4}}{9}+c$,

$$(\frac{5x\sqrt[5]{x^4}}{9}+c)'=\frac{5}{9}(x^{\frac{9}{5}}+c)'=\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{5}x^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{x^4}$$

3) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2}}=\int x^{\frac{-5}{3}}dx=\frac{x^{\frac{-2}{3}}}{\frac{-2}{3}}+c=-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+c$,

$$(-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}+c)'=-\frac{3}{2}(x^{-\frac{2}{3}}+c)'=-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{2}{3})x^{-\frac{5}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

4) $\int 10xdx=10\int xdx=10\frac{x^2}{2}+c=5x^2+c$,

$(5x^2+c)'=5\cdot 2\cdot x=10x$,

5) $\int-\frac{dx}{3}=-\frac{1}{3}\int dx=-\frac{x}{3}+c, \quad (-\frac{x}{3}+c)'=-\frac{1}{3}$.

№ 285 Найти интегралы.

1) $\int(2x^2-3x-7)dx,$ 2) $\int(\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{2\sqrt{x}})dx,$ 3) $\int\frac{3x^2(2+x^2)}{2}dx,$

4) $\int\frac{3+2t-t^2}{t^4}dt,$ 5) $\int\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

Решение.

1) $\int(2x^2-3x-7)dx=\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-7x+c$,

2) $\int(\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{2\sqrt{x}})dx=2\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}+c.$

3) $\int\frac{3x^2(2+x^2)}{2}dx=\frac{1}{2}\int(6x^2+3x^4)=\frac{1}{2}(2x^3+\frac{3x^5}{5})+c.$

4) $\int\frac{3+2t-t^2}{t^4}dt=\int(3t^{-4}+2t^{-3}-t^{-2})dt=-t^{-3}-t^{-2}+t^{-1}+c=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+c.$

При вычислении интеграла предварительно числитель подынтегральной функции почленно разделили на знаменатель.

5) $\int \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int (2x^{-\frac{1}{2}}+1)dx = 4\sqrt{x}+x+c.$

№288(1,2) Найти интегралы.

1) $\int (2^x - \frac{1}{1+x^2})dx,$ 2) $\int (\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 7\cos x)dx$.

Решение:

1) $\int (2^x - \frac{1}{1+x^2})dx = \frac{2^x}{\ln 2} - arctgx + c,$

2) $\int (\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 7\cos x)dx = 3\arcsin x - 7\sin x + c.$

Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки)

Во многих случаях, удаётся введением вместо переменной интегрирования x новой переменной t свести данной интеграл $\int f(x)dx$ к новому интегралу, который или содержится в таблице основных интегралов, или легко вычисляется другим способом. Этот метод интегрирования получил название метода замены переменной или метода интегрирования подстановкой.

В основе метода подстановки вычисления неопределённых интегра-лов лежит следующее утверждение, являющееся следствием правила дифференцирования сложной функции:

Пусть даны функции $f(x), \quad x \in (a;b), \quad и \quad \varphi(t), \quad t \in (c;d),$ и пусть существует сложная функция $f(\varphi(t)), \quad t \in (c;d)$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, а функция $\varphi(t)$ дифференцируема, то функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in (c;d),$ и поэтому

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c.$$

№292 Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sin^2 6x},$ 2) $\int \frac{dx}{1+25x^2},$ 3) $\int \cos\frac{x}{2}dx,$ 5) $\int 3^{-x}dx.$

Решение:

1) *1 способ*

$$\int \frac{dx}{\sin^2 6x} = \left| \begin{matrix} t = 6x \\ dt = 6dx \\ \frac{1}{6}dt = dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{6}ctgt + c = -\frac{1}{6}ctg6x + c,$$

2 способ

$$\int \frac{dx}{\sin^2 6x} = \frac{1}{6}\int \frac{d(6x)}{\sin^2 6x} = -\frac{1}{6}ctg6x + c,$$

2) $\int \frac{dx}{1+25x^2} = \frac{1}{5}arctg5x + c,$ 3) $\int \cos\frac{x}{2}dx = 2\sin\frac{x}{2} + c,$ 4) $\int 3^{-x}dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + c.$

№294(1,2,4,6) Найти интегралы.

1) $\int \frac{dx}{(x-8)^9},$ 2) $\int \frac{dx}{9-x},$ 4) $\int (4x+3)^{17}dx,$ 6) $\int \sin(3x-1).$

Решение:

1) $\int \frac{dx}{(x-8)^9} = -\frac{1}{8(x-8)^8} + c,$ 2) $\int \frac{dx}{9-x} = -\ln(9-x) + c$,

4) $\int (4x+3)^{17}dx = \frac{(4x+3)^{18}}{72} + c,$ 6) $\int \sin(3x-1). = -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + c.$

№296 Найти интегралы.

1) $\int 2x\cos x^2 dx,$ 2) $\int (3x^2 - x + 2)(6x-1)dx,$ 3) $\int e^{x^2+5x-1}(2x+5)dx,$

4) $\int x\sqrt[3]{5x^2+1}dx,$ 5) $\int \frac{7x}{1-x^2}dx,$ 6) $\int \frac{2x^2dx}{\sqrt{x^3+1}},$ 7) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^6}}.$

Решение:

1) $\int 2x\cos x^2 dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{matrix} \right| = \int \cos tdt = \sin t + c = \sin x^2 + c,$

2) $\int (3x^2 - x + 2)(6x-1)dx = \left| \begin{matrix} t = 3x^2 - x + 2 \\ dt = (6x-1)dx \end{matrix} \right| = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(3x^2-x+2)^2}{2} + c,$

3) $\int e^{x^2+5x-1}(2x+5)dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 + 5x - 1 \\ dt = (2x+5)dx \end{matrix} \right| = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2+5x-1} + c,$

4)

$$\int x\sqrt[3]{5x^2+1}dx = \left| \begin{array}{l} t^3 = 5x^2+1 \\ 3t^2dt = 10xdx \\ \frac{3}{10}t^2dt = xdx \end{array} \right| = \frac{3}{10}\int t\cdot t^2dt = \frac{3}{10}\int t^3dt = \frac{3}{10}\frac{t^4}{4} + c = \frac{3}{40}(5x^2+1)^4 + c,$$

5) $$\int \frac{7x}{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \\ -\frac{1}{2}dt = xdx \end{array} \right| = -7\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = -\frac{7}{2}\ln|t| + c = -\frac{7}{2}\ln(1-x^2) + c,$$

6) $$\int \frac{2x^2dx}{\sqrt{x^3+1}} = \left| \begin{array}{l} t^2 = x^3+1 \\ 2tdt = 3x^2dx \\ \frac{2}{3}tdt = x^2dx \end{array} \right| = 2\cdot\frac{2}{3}\int\frac{tdt}{t} = \frac{4}{3}t + c = \frac{4}{3}\sqrt{x^3+1} + c,$$

7) $$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^6}} = \left| \begin{array}{l} t^2 = 1-x^6 \\ 2tdt = -6x^5dx \\ -\frac{1}{3}tdt = x^5dx \end{array} \right| = -\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{t} = -\frac{1}{3}t + c = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^6} + c.$$

Задания для самостоятельного решения

1.

В-1. 1) $\int\frac{3x^2-x+4}{\sqrt{x}}dx$, 2) $\int\frac{dx}{4x+7,}$ 3) $\int e^{\cos x}\sin xdx$.

В-2. 1) $\int\frac{2x^3-\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, 2) $\int e^{3x-6}dx$, 3) $\int\frac{xdx}{2-3x^2}$.

В-3. 1) $\int\frac{5x^4+\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{4x}dx$, 2) $\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{3}}$, 3) $\int\frac{xdx}{\sqrt{3+x^2}}$.

В-4. 1) $\int\frac{7-x^3+\sqrt[3]{x}}{x}dx$, 2) $\int\frac{dx}{1+4x^2}$, 3) $\int x^2\sqrt[3]{x^3-8}dx$.

В-5 1) $\int\frac{1-4x^4+x}{\sqrt[3]{x}}dx$, 2) $\int 5^{2-6x}dx$, 3) $\int\frac{e^{\ln x}}{x}dx$.

В-6 1) $\int\frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx$, 2) $\int(7-5x)^4dx$, 3) $\int 6x\cdot\sin(3x^2)dx$.

В-7 1) $\int \frac{7x-8\sqrt{x}+x^3}{x}dx$, 2) $\int \frac{4dx}{7-3x}$, 3) $\int e^{x^2+5x}(2x+5)dx$.

В-8 1) $\int \frac{9+x^2-\sqrt[3]{x^2}}{x^2}dx$, 2) $\int e^{8-5x}dx$, 3) $\int x\sqrt{3-x^2}dx$.

В-9 1) $\int \frac{x+\sqrt{x}-2x^3}{x^4}dx$, 2) $\int 7^{5-4x}dx$, 3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-3}}$.

В-10 1) $\int \frac{6x-x^4+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$, 2) $\int (3x-5)^5dx$, 3) $\int 6^{x^2+3}\cdot xdx$.

2.

Уровень	1 - Вариант	2 - Вариант
1 - 2	1. Что такое интеграл ? 2. Верно ли, что $\int_1^6 dx = 5$	1. Напишите формулу Ньютона – Лейбница. 2. Верно ли, что $\int_1^4 dx = 3$
3 - 6	Вычислите интегралы $\int_{-1}^{2} xdx, \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx, \int_1^2 x^{-4}dx, \int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{x}{3}dx$	Вычислите интегралы $\int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{x}{6}dx, \int_1^4 5dx, \int_1^2 x^{-3}dx, \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}$
7 - 10	Вычислите интегралы $\int_0^1 (3-4x)^4 dx$ $\int_1^4 (x^2-6x+9)dx,$ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2(x+\frac{\pi}{3})-\sin^2(x+\frac{\pi}{3})dx$	Вычислите интегралы $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 xdx$ $\int_{-5}^{1} (x^2+8x+16)dx$ $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} 12\sin(\frac{\pi}{8}-x)\cos(\frac{\pi}{8}-x)dx$

Контрольные вопросы

Какая функция называется первообразной для функции *f(x)*, при $x \in (a; b)$?

Что называется неопределенным интегралом?

Перечислите основные формулы интегрирования.

Сформулируйте суть метода непосредственного интегрирования.

Сформулируйте суть метода замены переменной.

Домашнее задание: Выучить таблицу интегралов, учебник с. 194

Практическое занятие № 27

Вычисление площади криволинейной трапеции

Цель: *закрепить знания, умения и навыки нахождения площади криволинейной трапеции с помощью интеграла.*

Сведения из теории

-*вычисление площадей плоских фигур.*

Как, известно, определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции. На этом основано его применение к вычислению площадей плоских фигур.

Рассмотрим криволинейную трапецию $aABb$, ограниченную графи-ком неотрицательной непрерывной функции $y = f(x), x \in [a,b]$, отрезком $[a,b]$ оси Ox, отрезками прямых: $x = a, x = b (a < b)$ (рис.1). В этом случае площадь криволинейной трапеции, как известно, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad (2.8)$$

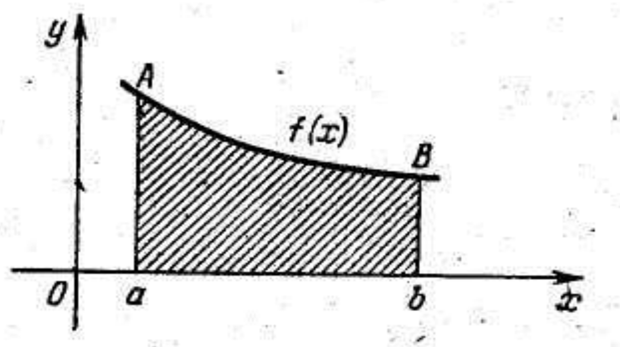


Рис. 1

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = f(x) = (x-1)^2 + 1, x = -1, x = 2$ и отрезком $[-1;2]$ оси Ox.

Решение: данная плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (2.8):

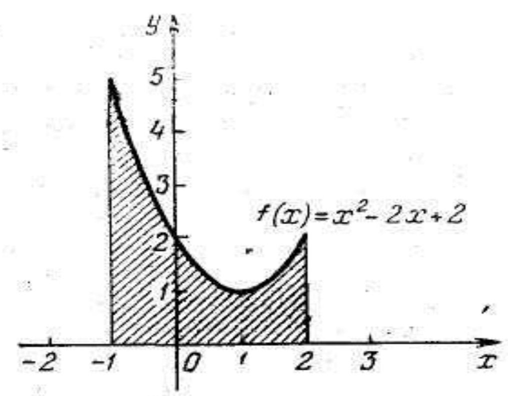


Рис.2

$$S=\int_{-1}^{2}((x-1)^2-1)dx=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx=(\frac{x^3}{3}-x^2+2x)\Big|_{-1}^{2}=6\text{ кв.ед.}$$

Пусть теперь функция $y=f(x), x\in[a,b]$ - неположительная непрерывная функция (т.е. $f(x)\le 0, x\in[a,b]$). Криволинейная трапеция с основанием $[a,b]$, ограниченная снизу кривой $y=f(x)$, лежит ниже оси *Ox.* Из соображений симметрии заключаем, что её площадь S равна площади другой криволинейной трапеции, имеющеё то же основание, но ограниченной сверху кривой $y=-f(x)$. Так как по условию $f(x)<0,\quad -f(x)>0$ и, приме-няя формулу (2.8), найдём

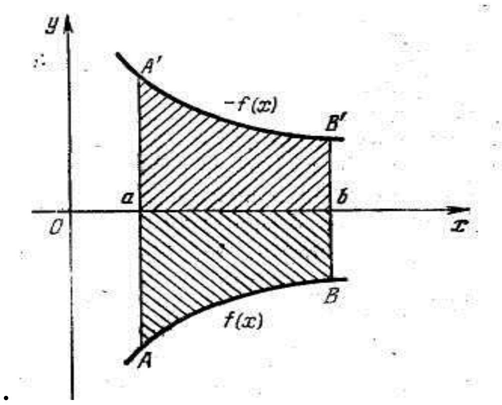


Рис.3

$$S=\int_{a}^{b}(-f(x))dx=-\int_{a}^{b}f(x)dx \quad \textbf{(2.9)}$$

Так выражается площадь криволинейной трапеции в случае отрицательной подынтегральной функции.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=f(x)=\sqrt[3]{x},\ x=-1$ и осью *Ox.*

Решение: График $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x\in[-1;0]$**,** расположен под осью *Ox.*, поэто-му для вычисления площади плоской фигуры применим формулу (2.9)

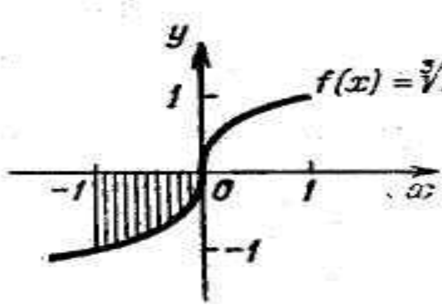


Рис.4

$$S=-\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}dx=-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{0}=\frac{3}{4}\text{кв.ед.}$$

Формулы (2.8) и (2.9) можно объединить в одну:

$$S=\int_{a}^{b}\left|\ f(x)\ \right|dx \quad (2.10)$$

Эта формула остаётся справедливой также и в том случае, когда функция $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ меняет знак, т.е. принимает на этом отрез-ке как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\cos x$, осями координат и прямой $x=\pi$.

Решение: Так как функция $y=\cos x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ положительна, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ отрицательна, то

$$|\cos x|=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \pi/2\\ -\cos x, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi.\end{cases}$$

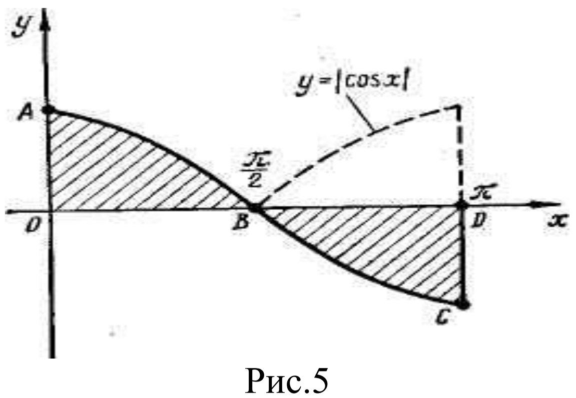


Рис.5

Поэтому по формуле (2.10)

$$S=\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2\text{кв.ед.}$$

Вычислим теперь площадь фигуры, ограниченной сверху кривой $y=f_1(x)$, снизу кривой $y=f_2(x)\left[f_1(x)\geq f_2(x)\right]$ и двумя прямыми $x=a, x=b(a<b)$. Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций $aABb$ и $aMNb$, то с учётом формулы (2.8) получим

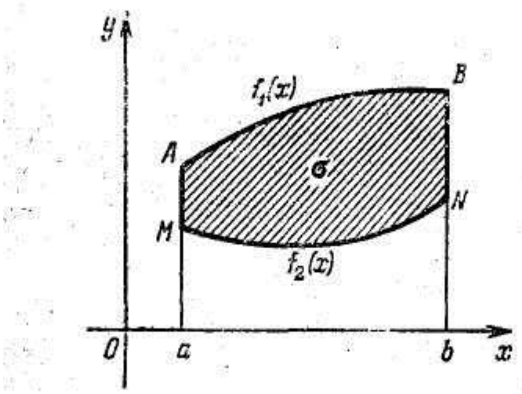


Рис.6

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b(f_1(x)-f_2(x))dx \quad \textbf{(2.11)}$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=f_1(x)=x+3$ и $y=f_2(x)=x^2+1$.

Решение: Решая уравнение

$$x+3=x^2+1$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_1=-1, x_2=2.$$

Используя формулу (2.11), вычислим площадь фигуры:

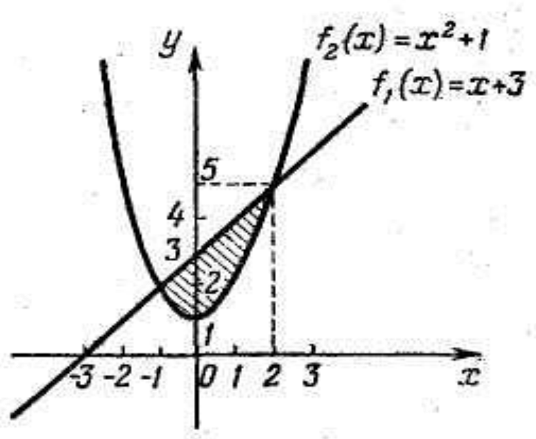


Рис.7

$$S=\int_{-1}^{2}(x+3-x^2-1)dx=(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}\text{кв.ед.}$$

Задания для самостоятельного решения

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1.1 $f(x)=16-x^2,\ \ f(x)=0.$

1.2. $f(x)=1+x^2,\ \ \ y=\ 2.$

1.3. $f(x)=(x-1)^2,\ \ y=0,\ \ \ x=3.$

1.4. $f(x)=5cosx,\ \ \ f(x)=3cosx.$

1.5. $f(x)=x^2+2,\ \ \ \ \ f(x)=3x+2.$

Домашнее задание: с.р.№11 вариант 2

Практическое занятие № 28, 29

Решение с помощью интеграла задач практического геометрического и физического содержания. Примеры применения интеграла в физике и геометрии

Цель: Знать таблицу значений неопределенных интегралов, способы вычисления определенных интегралов;

Уметь решать прикладные задачи с помощью определенного интеграла.

Сведения из теории:

Физические приложения определенных интегралов

Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $V=f\ (t)>0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле $S=\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt$.

Пример 1.

Скорость движения точки изменяется по закону $V=(3t^2+2t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10с от начала движения.

Решение:

согласно условию, $f\ (t)\ =3t^2+2t+1$, $t_1=0$, $t_2=10$. По формуле $S=\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt$

находим

$$S=\int_{0}^{10}(3t^2+2t+1)dt=\left(\frac{3t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^{10}=\left(t^3+t^2+t\right)\Big|_0^{10}=10^3+10^2+10=1110\ (м).$$

Вычисление работы силы

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси Оx материальной точки от $x=a$ до $x=b$, находится по формуле:

$$A=\int_a^b f(x)dx.$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука: $F=kx$, где F-сила, H; x – абсолютное удлинение пружины, $м$, вызванное силой F, а k – коэффициент пропорциональности, $H/м$.

Пример 2.

Сжатие x винтовой пружины, пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение:

т.к. $x=0{,}01м$ при $F=10H$, то, подставляя эти значения в равенство $F=kx$, получим $10=0{,}01k$, откуда $k=1000\ H/м$.

Подставив теперь в это же равенство значение k, находим $F=1000x$, т.е. $f(x)=1000x$. Искомую работу найдем по формуле $A=\int_a^b f(x)dx$, полагая $a=0$, $b=0{,}04$:

$$A=\int_0^{0,04}1000xdx=\left.\left(\frac{1000x^2}{2}\right)\right|_0^{0,04}=500x^2\Big|_0^{0,04}=500\cdot 0{,}04^2=0{,}8\ \ (Дж).$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант Скорость движения точки изменяется по закону $V=(-3t^2+12t)\ м/с$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.	**2 вариант** Под действием силы $80H$ пружина растягивается на $0{,}02м$. Первоначальная длина пружины равна $0{,}15м$. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её до $0{,}2м$?	**3 вариант** Пружина в спокойном состоянии имеет длину $0{,}2м$. Сила в $50H$ растягивает пружину на $0{,}01м$. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,22 до 0,32 $м$?
4 вариант При сжатии пружины на $0{,}05м$ затрачивается работа $25Дж$. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на $0{,}1м$?	**5 вариант** Скорость движения точки $V=(6t^2+4)\ м/с$. Найти путь, пройденный точкой за 5 $с$ от начала движения.	**6 вариант** Скорость движения точки $V=(-3t^2+18t)\ м/с$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.
7 вариант Скорость движения	**8 вариант** Пружина растягивается	**9 вариант** Скорость движения

точки V=($8t^{-2}$+$2t$) *м/с*. Найти путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.	на 0,02*м* под действием силы 60*Н*. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12*м*?	точки изменяется по закону V=($9t^2$-$8t$) *м/с*. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

Контрольные вопросы:
Приведите примеры приложения определенных интегралов.

Домашнее задание: учебник с.199-201

Практическое занятие № 30, 31
Основные приемы решения уравнений и систем.

Цель: Знать способы решения уравнений;
Уметь решать уравнения различными способами.

Сведения из теории:
Метод разложения на множители
Суть данного метода в том, чтобы путем равносильных преобразований представить левую часть исходного уравнения, содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух выражений, содержащих неизвестную величину в меньшей степени. При этом справа от знака равенства должен оказаться ноль. Проще всего уяснить эту идею на конкретном примере.
Пример.
Решите уравнение методом разложения на множители: $2{,}5x^2+4x=0$.
Решение:
осуществим разложение на множители (представим исходное выражение в виде произведения). Для этого вынесем переменную x за скобки:

$$x(2{,}5x+4)=0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.
Следовательно,

$$x=0 \text{ или } 2{,}5x+4=0.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$2{,}5x=-4 \text{ или } x=-1{,}6.$$

Ответ: $x=0$ и $x=-1{,}6$.
Задача для самостоятельного решения №1. Решите уравнение методом разложения на множители: $3x^2+1{,}5x=0$.

Метод замены переменной

Суть данного метода в том, чтобы удачным образом заменить сложное выражение, содержащее неизвестную величину, новой переменной, в результате чего уравнение принимает более простой вид. Далее полученное уравнение решается относительно новой переменной, после чего происходит возврат к исходной переменной. Все эти идеи проще осознать на конкретном примере.

Пример .

Решите уравнение методом замены переменной: $x^4+4x^2-5=0$.

Решение:

такие уравнения называются биквадратными. Перепишем его в виде:

$$\left(x^2\right)^2+4x^2-5=0.$$

Введем новую переменную $t=x^2$.Тогда исходное уравнение примет следующий простой вид:

$$t^2+4t-5=0.$$

Решая полученное квадратичное уравнение, получаем, что:

$$t=-5 \text{ или } t=1.$$

Возвращаемся теперь к старой переменной (обратная замена):

$$x^2=-5 \text{ или } x^2=1.$$

Решений у первого уравнения нет, поскольку не существует такого действительного числа, квадрат которого был бы отрицателен. Второе уравнение имеет два корня ± 1.

Ответ: ± 1.

Задача для самостоятельного решения №2. Решите уравнение методом замены переменной: $9x^4-24x^2+7=0$.

Пример 85.

Решите уравнение методом замены переменной: $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

Решение:

обращаем внимание на то, что $x=0$ не является корнем данного уравнения. Следовательно, без потери или приобретения лишних корней можно разделить числитель и знаменатель обеих дробей на x. Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1.$$

Введем новую переменную: $t=4x+\dfrac{7}{x}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{4}{t-8}+\frac{3}{t-10}=1.$$

Выполнив элементарные преобразования: приведем дроби к общему знаменателю, приведем подобные слагаемые, получим:

$$\frac{t^2-25t+144}{(t-8)(t-10)}=0.$$

Дробь равна нулю, если нулю равен ее числитель, а знаменатель при этом не равен нулю. То есть уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} t^2-25t+144=0 \\ t\neq 8 \\ t\neq 10 \end{cases}.$$

Решив первое уравнение системы, имеем: t=16 или t=9.
Переходя к обратной подстановке, получаем:

1. $4x+\frac{7}{x}=16$, что при $x\neq 0$ равносильно уравнению $4x^2-16x+7=0$, решая которое, получаем $x=\frac{1}{2}$ или $x=\frac{7}{2}$.

2. $4x+\frac{7}{x}=9$ что при $x\neq 0$ равносильно уравнению $4x^2-9x+7=0$, у которого решений нет, поскольку его дискриминант отрицателен.

Ответ: $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}$.

Задача для самостоятельного решения №3. Решите уравнение методом разложения на множители: $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=0$.

Решение рациональных и иррациональных уравнений.
<u>Опр.</u>
Уравнения, в которых неизвестная содержится в знаменателе дроби, называются рациональными.

<u>Рациональные уравнения решают следующим образом, надо</u>:
найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
заменить данное уравнение целым, умножив обе части на общий знаменатель;
решить получившееся уравнение;
исключить из него те корни, которые обращают в нуль общий знаменатель

<u>Пример</u>

$$\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}$$

$$\left.\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}\right|\cdot(4x-3)\cdot(7-x)$$

$$\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}\Bigg|\cdot(4x-3)\cdot(7-x)$$

$$(5+2x)\cdot(7-x)=(3x+3)\cdot(4x-3)$$

$$-14x^2+6x+44=0$$

$$14x^2-6x-44=0$$

$x_1=2 \quad x_2=-5{,}5$

Проверка:

x= 2 $\quad 4\cdot 2-3=5\neq 0 \qquad 7-2=5\neq 0$

x = - 5,5 $\quad 4\cdot(-5{,}5)-3=-25\neq 0 \quad 7-(-5{,}5)=7+5{,}5=12{,}5$

Ответ: $x_1=2 \quad x_2=-5{,}5$

Опр.

Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются иррациональными.

Для решения иррационального уравнения надо левую и правую части уравнения возвести в *n*-ую степень, равную показателю корня

Пример

1. *Решение уравнения* $\sqrt{1+3x}$ = 1 – *x методом возведения в квадрат обеих частей уравнения.*

$$(\sqrt{1+3x})^2=(1-x)^2;$$

$1+3x=x^2-2x+1;$

$x^2-5x=0.$

Решив это уравнение, находим корни $x_1=0,\ x_2=5$.

Проверка: если $x=0$, то $\sqrt{1+3\cdot 0}=1-0$, 1 = 1 – верно;

если $x=5$, то $\sqrt{1+3\cdot 5}=1-5$, 4 = 4 – неверно.

Ответ: x = 0.

Задача для самостоятельного решения

Задание 1. Решить уравнение: а) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$; б) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$

Задание 2. Решить уравнение: а) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$; б) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$

Контрольные вопросы:

В чем суть решения уравнения методом разложения на множители?

В чем суть решения уравнения методом замены переменной?

Домашнее задание: учебник с. 233-237.

Практическое занятие № 32,33

Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств. Решение уравнений с применением всех приемов

Цель: Знать этапы решения уравнений графическим методом, правила решения простых, дробно-рациональных неравенств с одной переменной; Уметь строить графики элементарных функций ,решать уравнения различными способами, решать неравенства методом интервалов.

Сведения из теории:

Метод оценки области значений

Суть данного метода в сравнении областей значений выражений, входящих в уравнение. Часто такой анализ позволяет легко решать сложные уравнения, содержащие различные выражения (рациональные, тригонометрические, логарифмические, показательные и др.). Разберем это на конкретном примере.

Пример 1.

Решите уравнение, используя метода оценки области значений: $\cos^2 x = x^2 + 1$.

Решение:

рассмотрим функцию $f(x) = \cos^2 x$. Известно, что $-1 \le \cos x \le 1$, поэтому $0 \le \cos^2 x \le 1$. Итак, функция $f(x) = \cos^2 x$ может принимать значения только из промежутка [0; 1].

Рассмотрим теперь функцию $g(x) = x^2 + 1$. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина расположена в точке (0; 1).

Т.е. область значений данной функции (те значения, которые может принимать переменная *y*) представляет собой промежуток [1; +∞).

Т.о. выражения, стоящие справа и слева от знака равенства в исходном уравнении, могут оказаться равными, только если их значения окажутся равными 1, причем при одном и том же значении *x.* Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это условие выполняется при $x = 0$.

Действительно, $f(0) = \cos^2 0 = 1$ и $g(0) = 0^2 + 1 = 1$. При всех остальных значениях *x* функция $g(x) = x^2 + 1$больше 1. Значит $x = 0$ – единственный корень уравнения.

Ответ: 0.

Задача для самостоятельного решения №1. Решите уравнение с использованием метода оценки области значений: $\sin^2 x = \left| x - \frac{\pi}{2} \right| + 1$.

Пример 2.

Решите уравнение: $\sqrt{2x - x^2 + 8} + \sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{-x-2} + 1$.

Решение:
определим область допустимых значений (те значения, которые может принимать переменная x в данном уравнении). Исходим из того, что подкоренное выражение не может быть отрицательным:

$$\begin{cases} 2x - x^2 + 8 \geq 0, \\ x^2 - 4x \geq 0, \\ -x - 2 \geq 0 \end{cases}.$$

Решая систему методом интервалов, получаем:

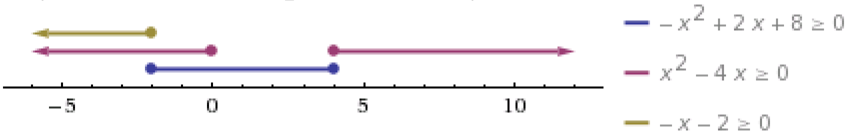


Рисунок 24. Изображение решений системы неравенств на числовой прямой

Т.о. область допустимых значений содержит одно единственное значение x=-2. Является ли это значение корнем уравнения, проще всего проверить прямой подстановкой:

$$\sqrt{2(-2)-(-2)^2+8} + \sqrt{(-2)^2 - 4(-2)} = \sqrt{-(-2)-2} + 1,$$

$$\sqrt{12} \neq 1.$$

Т.е. x=-2 не является корнем уравнения.
Ответ: корней нет.
Задача для самостоятельного решения №2. Решите уравнение: $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{x} - 1$.

Пример 3.
Решите уравнение: $\sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 + 2x} = 2 - x$.
Решение:
помножим уравнение на $\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x}$.
Вообще говоря, это преобразование не является равносильным, даже в области допустимых значений. Ведь могут найтись такие значения x при которых это выражение обратится в нуль. При таком преобразовании могут появиться посторонние корни, поэтому полученные ответы нужно будет проверить непосредственной подстановкой. Но главное, что в результате такого преобразования не произойдет потери корней.
Итак,

$$x^2 + 3x - 2 - x^2 - 2x = (2 - x)(\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x})$$

$$(x-2) + (x-2)(\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x}) = 0,$$

$$(x-2)(1 + \sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x}) = 0.$$

Выражение во вторых скобках не может быть равно нулю. Действительно, оба корня, по крайней мере, неотрицательны, поэтому если к их сумме прибавить 1, получится положительное выражение. То есть остается, что

$$x-2=0 \text{ или } x=2.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это корень данного уравнения:

$$\sqrt{2^2+3\cdot 2-2}-\sqrt{2^2+2\cdot 2}=2-2,\ 0=0.$$

Ответ: 2.

Задача для самостоятельного решения №3. Решите уравнение: $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}=\sqrt{x+10}-4$.

Метод интервалов

Пусть заданное неравенство имеет вид: $\dfrac{f(x)}{g(x)}\vee 0$. Для решения этого неравенства используется так называемый *метод интервалов,* который состоит в следующем.

1. На числовую ось наносят точки x_1, , x_n разбивающие ее на промежутки, в которых выражение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ определено и сохраняет знак («плюс» или «минус»). Такими точками могут быть корни уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$. Соответствующие этим корням точки отмечают на числовой оси: закрашенными кружками – точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а светлыми кружками – не удовлетворяющие ему.

2. Определяют и отмечают на числовой оси знак выражения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ для значений, принадлежащих каждому из полученных промежутков. Достаточно определить знак функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в любом таком промежутке, а в остальных промежутках знаки «плюс» и «минус» будут чередоваться.

Изменение знаков удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (*кривой знаков*), проведенной через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в рассматриваемом промежутке. Промежутки, которые содержат точки, удовлетворяющие данному неравенству, иногда покрывают штрихами. Заштрихованная область в совокупности с полученными точками будет являться ответом к неравенству:

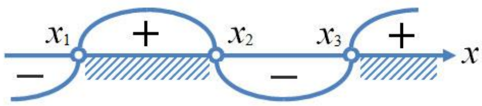


Рисунок 25. Кривая знаков

Пример 1.

Решите неравенство: $\frac{1}{x^2-5x+6} \le \frac{1}{2}$.

Решение:

упрощаем неравенство путем равносильных преобразований: при умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{2} \le 0.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2-(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6} \le 0,$$

$$\frac{-x^2+5x-4}{x^2-5x+6} \le 0,$$

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} \ge 0.$$

Выражения, стоящие в числителе и знаменателе, можно разложить на множители, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-3)} \ge 0.$$

Далее находим корни уравнений $(x-4)(x-1)=0$ и $(x-2)(x-3)=0$.

Из первого получаем x_1=4, x_2=1. Из второго получаем x_3=2, x_4=3.

Наносим на числовую прямую получившиеся точки, причем точки x_1, x_2 обозначаем закрашенными кружочками (для них неравенство выполняется), а точки x_3, x_4 светлыми (при этих значениях, выражение, стоящее слева от знака неравенства, не имеет смысла).

Определяем теперь знаки выражения $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-3)}$ на полученных промежутках (подставляем любое значение x из каждого полученного промежутка в данное выражение), изображаем кривую знаков, заштриховываем те промежутки, на которых исходное неравенство выполняется:

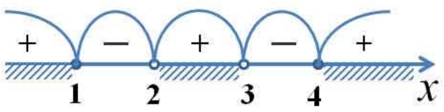


Рисунок 26. Кривая знаков выражения $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-3)}$

Итак, исходному неравенству удовлетворяют следующие значения: xЄ(-∞; 1]U(2; 3)U[4; +∞).

Задача для самостоятельного решения №1. Решите неравенство: $\frac{x+17}{x^2-x-6} \geq 0$.

Пример 2.

Решите неравенство: $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2} > 0$.

Решение:

подкоренное выражение, как известно, не может принимать отрицательных значений, также не допускается нахождение в знаменателе дроби нуля. Следовательно, область допустимых значений данного неравенства определяется неравенством $x \geq 0$ и тем условием, что $x \neq 2$.

Решаем уравнения $\sqrt{x}-3=0$ и $x-2=0$.

Из первого уравнения получаем, что x_1=9.

Из второго уравнения получаем, что x_2=2.

Наносим область допустимых значений неравенства и полученные точки на числовую прямую, причем эти точки будут светлыми, поскольку ни одно из значений не удовлетворяет неравенству. Сразу определяем знаки выражения $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2}$ в каждом из полученных промежутков и рисуем кривую знаков:

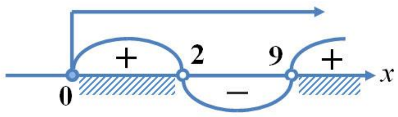


Рисунок 27. Кривая знаков выражения $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2}$

Верхней стрелкой на рисунке обозначена область допустимых значений неравенства. Ответом к неравенству будет являться промежуток, соответствующий на рисунке заштрихованной области.

Ответ: xЄ[0; 2)U(9; +∞).

Задача для самостоятельного решения №2. Решите неравенство: $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0$.

Пример 3.

Решите неравенство: $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{x} < 2$.

Решение:

подкоренное выражение не может принимать отрицательных значений, а в знаменателе дроби не должно быть нуля. Следовательно, область допустимых значений неравенства определяется следующей системой:

$$\begin{cases} 1-8x^2 \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{8}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{8}}, \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Решаем уравнение $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{x}-2=0$.

Получаем, что x_1=0 и $x_2=\frac{1}{3}$. Наносим полученные точки на числовую прямую, не забывая о том, какие из них следует закрасить, а какие осветлить. Изображаем также на ней область допустимых значений и изображаем кривую знаков:

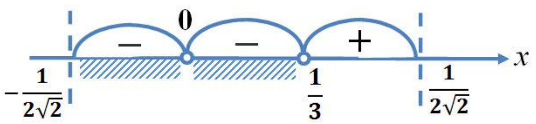


Рисунок 28. Кривая знаков выражения $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{x}-2$

Пунктирные лини на рисунке ограничивают область допустимых значений неравенства. Заштрихованная область соответствует решению неравенства.

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{3}\right)$.

Задача для самостоятельного решения №3. Решите неравенство: $\sqrt{2x+1} < \frac{2x+1}{2-x}$.

Контрольные вопросы:

Дайте определение неравенства с одной переменной.

В чем суть метода интервалов?

Поясните суть метода оценки области значений при решении уравнений.

Какие нестандартные способы решения уравнений вы знаете?

Домашнее задание: учебник с. 242-246 № № 1-6

Практическая работа 34.

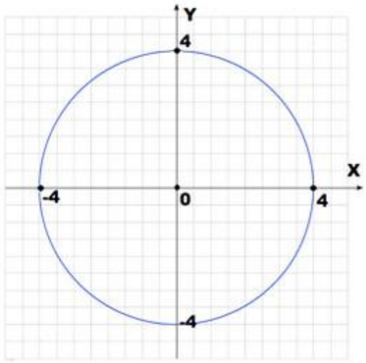
Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

Цель: научить изображать в декартовой системе координат все множество решений уравнений, неравенств и их систем.

Сведения из теории:

Уравнения.

Для уравнения $x^2 + y^2 = 16$ решением является всякая пара чисел, которые принадлежат окружности, радиус которой равен 4, а центром является точка с координатами (0;0). Изобразить графически решение данного уравнения просто. В данном примере мы получили бесконечное число решений, которые удовлетворяют условию выше.

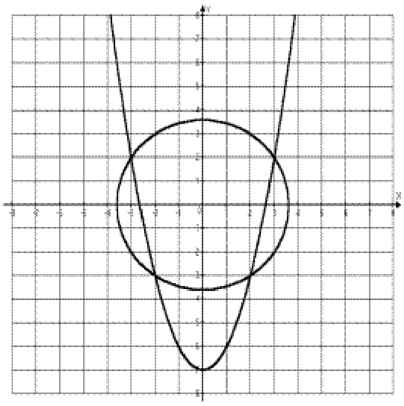


Системы уравнений.

Каждое из уравнений системы можно рассматривать как уравнение кривой. Поэтому решения системы двух уравнений с двумя неизвестными можно интерпретировать как координаты точек пересечения двух кривых.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ y = x^2 - 7. \end{cases}$$



Решение. Построим в одной координатной плоскости графики функций $x^2 + y^2 = 13$ и $y = x^2 - 7$. Эти графики пересекаются в четырех точках $(2;-3), (-2;-3), (3;2), (-3;2)$.

Неравенства.

Неравенства вида p(x;y)>0, p(x;y)<0 называются неравенствами с двумя переменными, где p(x;y) – алгебраическое выражение. Решением их называют всякую пару чисел, которые удовлетворяют данному неравенству (неравенство превращается в верное числовое неравенство). Решения неравенств с двумя переменными также проще изображать на графиках в декартовой системе координат.

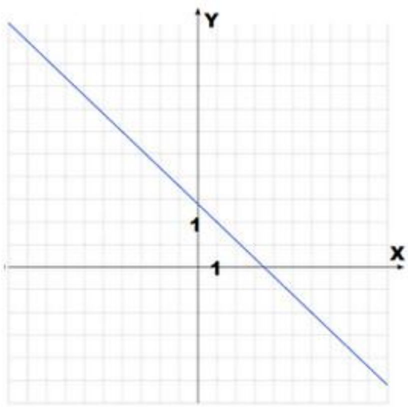
Для изображения множества решений такого неравенства на координатной плоскости поступают следующим образом:

1. Строим график функции y = f(x), который разбивает плоскость на две области.

2. Выбираем любую из полученных областей и рассматриваем в ней произвольную точку. Проверяем выполнимость исходного неравенства для этой точки. Если в результате проверки получается верное числовое неравенство, то заключаем, что исходное неравенство выполняется во всей области, которой принадлежит выбранная точка. Таким образом, множеством решений неравенства – область, которой принадлежит выбранная точка. Если в результате проверки получается неверное числовое неравенство, то множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.

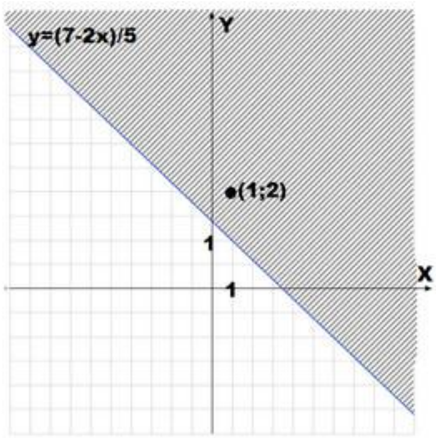
3. Если неравенство строгое, то границы области, то есть точки графика функции y = f(x), не включают в множество решений и границу изображают пунктиром. Если неравенство нестрогое, то границы области, то есть точки графика функции y = f(x), включают в множество решений данного неравенства и границу в таком случае изображают сплошной линией.

Пример. Решить неравенство: $2x+5y>7$.



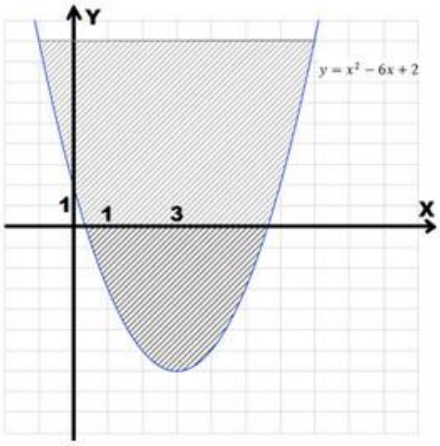
Решение. Для начала выразим y через x: $y>\frac{7-2x}{5}$. Построим прямую $y=\frac{7-2x}{5}$. Множество всех решений неравенства расположено, либо выше, либо ниже данной прямой.

Можно подставить любую пару чисел и проверить: выполнилось неравенство или нет. Если неравенство выполнилось, то мы выбираем в качестве решения ту область, которой принадлежат эти пара чисел, если не выполнилось, то выбираем противоположную область. Подставим пару (1;2): $2>\frac{7-2}{5}$; $2>1$ – верное неравенство. Значит, мы должны выбрать область выше нашей прямой, область в которой выполняется наше неравенство обычно принято изображать штриховкой.



Системы неравенств.

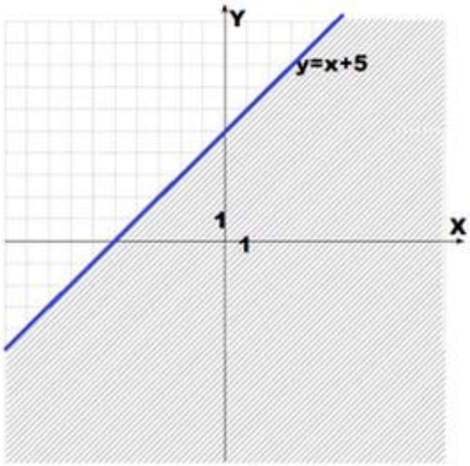
Нам осталось разобрать пример, решения системы неравенств с двумя переменными. Суть метода решений проста. Находим решение каждого неравенства в отдельности, изображаем решения на одной координатной плоскости и ищем пересечение этих решений.

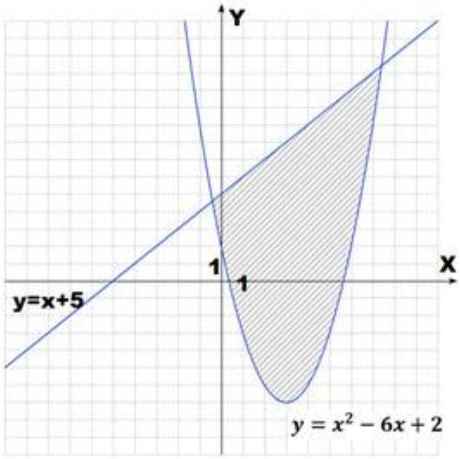


Пример. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 6x + 2 \\ y \leq x + 5 \end{cases}$$

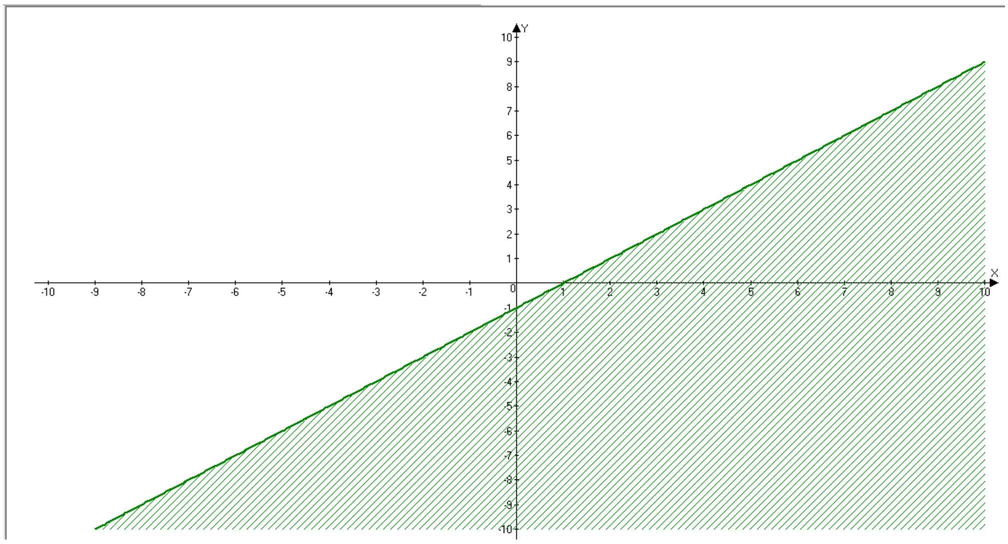
Решение. Найдем решение каждого неравенства в отдельности. Для неравенства $y \geq x^2 - 6x + 2$, множество всех точек расположено выше или "внутри" параболы. Решения неравенства $y \leq x + 5$ расположены ниже прямой $y = x + 5$. Изобразим оба графика на одной плоскости и найдем пересечение областей.





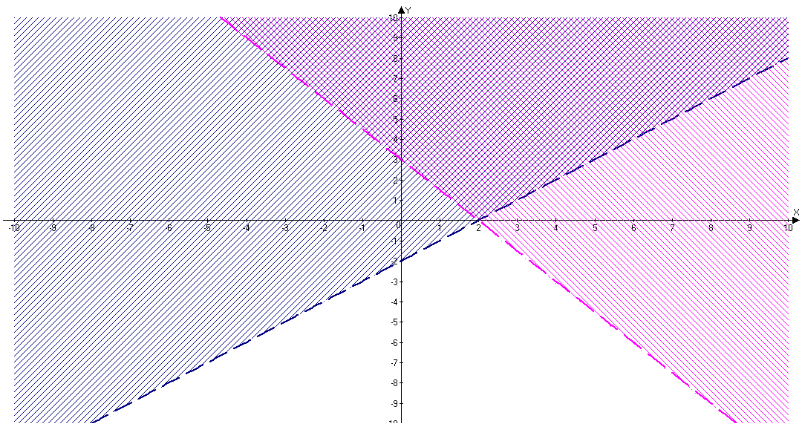
Для закрепления

Задание 1. Изобразите графически решение неравенства $y \leq x - 1$



Задание 2 Изобразите графически решение системы неравенств

$$\begin{cases} y > x - 2 \\ y > -1{,}5x + 3 \end{cases}$$



Для самостоятельного решения.

Пример 1.

$$\begin{cases} y < 2x + 1 \\ y > 2x - 2 \end{cases}$$

Пример 2

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ 1 - x \le y \end{cases}$$

Пример 3.

$$\begin{cases} x^2 - 2y > 7 \\ 3x + y > 3 \end{cases}$$

Ответить на вопросы .

- Что является графическим решением уравнения с двумя переменными?
- Что является графическим решением неравенства с двумя переменными?
- Что является решением системы уравнений с двумя переменными?
- Что является решением системы неравенств с двумя переменными?
- Какая последовательность выполняется при решении системы линейных неравенств с двумя переменными?

Домашнее задание.

1. Решите графически системы неравенств

а) $\begin{cases} x \geq -1, \\ y < 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 3 < 0, \\ 2 - y > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \leq x + 3, \\ y \geq x - 1. \end{cases}$

2. Какое множество точек задается неравенством $x \cdot y \leq 4$? Изобразить.

Практическая работа № 35,36

Решение задач на перебор вариантов. Решение практических задач с использованием понятий и правил комбинаторики. Решение прикладных задач.

Цель: Знать определение соединений, их видов; формулу бинома Ньютона; свойства биноминальных коэффициентов;

Уметь по условию задачи различать виды соединений, вычислять разные виды соединений, раскладывать бином по степеням *x*; возводить в различные степени трехчлены.

Сведения из теории:

Соединения, их виды

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями*.

Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)].$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)n,$$

$n!$-читается «n-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше определения имеем формулы:

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

при решении задач часто используется равенство:

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m},$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

или

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...[n-(m-1)]}{m!}.$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \ (0 \le m \le n), \ C_n^n = 1; \ C_n^0 = 1; \ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

П р и м е р 1. Каким числом способов можно обить 12 различных стульев, если есть 12 образцов обивочного материала, причем каждый материал имеется в любом количестве?

Р е ш е н и е. Поскольку имеется 12 различных образцов обивочного материала, то один стул можно обить двенадцатью различными способами. То же самое справедливо и для второго стула, так как каждый обивочный материал имеется в любом количестве. Но каждый способ обивки первого стула можно соединить с любым способом обивки второго, так что число различных способов обивки двух стульев равно $12^2 = 144$.

При этом важно, что имеющиеся стулья р а з л и ч н ы. Если бы они были одинаковыми, то число различных способов обивки было бы меньшим, так как способы, при которых первый стул обит материалом a, а второй – материалом b, или, наоборот, первый стул обит материалом b, а второй – материалом a, нельзя было бы считать различными способами.

Итак, для двух различных стульев мы получили 12^2 различных способов их обивки. Очевидно, что для каждого следующего стула остается в силе приведенное выше рассуждение: для каждого стула существует двенадцать возможных способов обивки, и каждый способ обивки данного стула можно соединить с любым способом обивки предыдущих. Отсюда следует, что для трех стульев число различных способов обивки составляет 12^3, для четырех – 12^4 и так далее. Для двенадцати стульев это число составляет 12^{12}.

П р и м е р 2. Каким числом способов можно рассадить 12 гостей на имеющихся 12 различных стульях?

Р е ш е н и е. Представим себе, что гости входят в комнату по одному. Первому из входящих гостей предоставляется выбор из 12 различных стульев, то есть 12 возможностей, как и в предыдущем примере. Однако уже для следующего гостя остаются не те же двенадцать возможностей, что и для первого, а всего лишь одиннадцать, поскольку один из стульев оказывается уже занятым. По-прежнему каждое место, занятое первым гостем, может комбинироваться с любым другим местом, занятым вторым; поэтому общее число различных способов, с помощью которых можно рассадить двух гостей, равно $12 \cdot 11 = 132$.

Дальнейший ход решения теперь уже ясен. Для гостя, входящего третьим, останется только 10 различных возможностей, так как из 12 мест два места окажутся уже занятыми. Поэтому для трех гостей число различных способов рассадить их составляет $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$. Продолжая аналогичные рассуждения, найдем, что общее число различных способов рассадить 12 гостей на 12 стульях составляет $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 12! = 479001600$.

П р и м е р 3. В отделении 12 солдат. Каким числом способов можно составить наряд из двух человек, если один из них должен быть назначен старшим?

Р е ш е н и е этой задачи очень похоже на решение предыдущей. Действительно, если назначить сначала старшего по наряду, то для его выбора у нас имеется 12 различных возможностей: каждый солдат отделения может быть назначен старшим наряда. После того как старший наряда назначен, вторым в наряд может быть назначен любой из оставшихся одиннадцати. Как и во всех предыдущих случаях, общее число различных нарядов составляет $12 \cdot 11 = 132$.

П р и м е р 4. Какое число различных парных нарядов можно назначить из 12 солдат отделения, если не требуется назначать старшего по наряду?

Р е ш е н и е. Легко понять, что число таких нарядов должно быть меньше, чем в предыдущем примере. Действительно, наряды – Иванов (старший) и Петров или Петров (старший) и Иванов – различны, тогда как, если не требуется назначать старшего, эти два солдата в обоих случаях составляют один и тот же наряд. Каждый парный наряд без старшего можно превратить в два различных наряда со старшим. Поэтому число различных парных нарядов со старшим в два раза больше, чем нарядов без старших. Отсюда следует, что интересующее нас в данном примере число различных парных нарядов из 12 солдат отделения в два раза меньше, чем получено в предыдущем примере, т. е. равно $\frac{132}{2} = 66$.

Пример 5

Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение:

по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]$:

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пример 6.

Решить уравнение: $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$.

Решение:

используя формулу для вычисления числа размещений имеем:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Разделим обе части на одинаковые выражения, получим:

$$n(n-1) = 30(n-5),$$

и решим получившееся квадратное уравнение: $n_1 = 6,\ \ n_2 = 25$.

Пример7.

Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$.

Решение:

решим второе уравнение:

$$C_x^2 = 66 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} = 66;$$

$$x^2 - x - 132 = 0;$$

$$x_1 = -11, \ x_2 = 12.$$

Т. к. $x > 2$, то –11 не удовлетворяет условию задачи. Подставив x=12 в первое уравнение системы, получим

$$C_{12}^{y} = C_{12}^{y+2}.$$

Используя основное свойство сочетаний, имеем:

$$C_{12}^{y} = C_{12}^{12-y},$$

тогда

$$C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2} \Rightarrow 12 - y = y + 2 \Rightarrow y = 5.$$

Ответ: x=12, y=5.

Пример 8.

Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение:

условию задачи соответствуют размещения 3 из 8, имеем:

$$A_8^3 = 8\cdot 7\cdot 6 = 336.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решить следующие задачи, используя определение сочетаний, их видов:

1 вариант	**2 вариант**
1) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 2) Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать? 3) Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20}A_x^4$.	1) Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола? 2) Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов? 3) Решите уравнение: $30x = A_x^3$.

3 вариант 1) Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать? 2) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 3) Решите уравнение: $30A_{x-2}^{4}=A_{x}^{5}$.	**4 вариант** 1) Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек? 2) На собрании должны выступить 5 человек (*А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если *А* должен выступать первым? 3) Решите уравнение: $20A_{x-2}^{3}=A_{x}^{5}$.
5 вариант 1) Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг? 2) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «журнал»? 3) Решите уравнение: $\frac{x}{A_{x}^{3}}=\frac{1}{12}$.	**6 вариант** 1) Сколькими способами можно составить список из 6 человек? 2) Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может из своего состава выбрать председателя собрания и секретаря? 3) Решите уравнение: $4C_{x+2}^{x-1}=A_{x}^{3}$.
7 вариант 1) Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрами 3 или 5? 2) Из города А в город В ведут 6 дорог, а из города В в город С –3 дороги. Сколькими способами можно попасть из города А в город С? 3) Решите систему: $\begin{cases} A_{x}^{y}=9A_{x}^{y-1} \\ 2C_{x}^{y}=3C_{x}^{y-1} \end{cases}$.	**8 вариант** 1) В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий сыграно в этом турнире? 2) Имеется 8 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были разных размеров? 3) Решите систему: $\begin{cases} C_{x}^{y}=C_{x}^{y+2} \\ C_{x}^{2}=153 \end{cases}$.

9 вариант

1) Группа учащихся изучает семь учебных дисциплин. сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот учебный день должно быть четыре различных урока?

2) Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

3) Вычислить: $\dfrac{A_{19}^5 + A_{20}^6}{A_{18}^4}$.

Формула бинома Ньютона

Бином Ньютона – это формула разложения степени двучлена (бинома) $(a+b)^n$ в виде многочлена от a и b.

Запишем разложения бинома Ньютона для нескольких первых значений n:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Чтобы найти коэффициент при a^kb^{n-k} в разложении бинома $(a+b)^n$ в общем случае, представим себе, что мы перемножаем n скобок и приводим подобные члены. Член a^kb^{n-k} встретится столько раз, сколько можно указать k скобок (из n возможных), из которых мы возьмем множитель a (а из остальных автоматически возьмем b). Это число равно числу выборок k скобок из n возможных, которое носит название числа сочетаний из n по k и обозначается C_n^k.

В этих обозначениях формула имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Иными словами, число сочетаний из n по k равно коэффициенту при члене $a^{n-k}b^k$ в разложении n-ой степени двучлена $(a+b)$ поэтому числа сочетаний называют иначе *биномиальными коэффициентами*.

Эту связь можно использовать для вывода свойств сочетаний алгебраическими методами. Такой подход к выводу свойств комбинаторных объектов носит название *метода производящих функций*.

Свойства биномиальных коэффициентов

Биномиальные коэффициенты обладают большим количеством свойств.

Свойство 1. $C_n^1 = n$.

Свойство 2. $C_n^k = C_n^{n-k}$ – биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов, равны между собой

Свойство 3. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ – сумма биномиальных коэффициентов при фиксированном *n* равна 2^n.

Свойство 4. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$ – суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных и на нечетных местах, равны между собой (и равны по половине от общей суммы).

Свойство 5. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ – рекуррентное соотношение, связывающее биномиальные коэффициенты для соседних степеней.

Пример 1.

Разложить бином $(1+x)^6$ по степеням *x*.

Решение:

применяем формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^6 = 1^6 + C_6^1 x + C_6^2 x^2 + C_6^3 x^3 + C_6^4 x^4 + C_6^5 x^5 + x^6.$$

Значения биномиальных коэффициентов находим последовательно по формуле $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$:

$$C_6^3 = C_5^2 + C_5^3 = \left(C_4^1 + C_4^2\right) + \left(C_4^2 + C_4^3\right) = 4 + 2\left(C_3^1 + C_3^2\right) + 4 = 4 + 12 + 4 = 20.$$

Т.о. $(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$

Задача для самостоятельного решения №1. Разложить бином $(1+x)^5$ по степеням *x*.

Пример 2.

Возвести трехчлен $a+b+c$ в четвертую степень.

Решение:

применяем формулу бинома Ньютона:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + \frac{4!}{3!}a^3b + \frac{4!}{3!}a^3c + \frac{4!}{3!}b^3a + \frac{4!}{3!}b^3c + \frac{4!}{3!}c^3a + \frac{4!}{3!}c^3b +$$

$$+ \frac{4!}{2!2!}a^2b^2 + \frac{4!}{2!2!}a^2c^2 + \frac{4!}{2!2!}b^2c^2 + \frac{4!}{2!}a^2bc + \frac{4!}{2!}b^2ac + \frac{4!}{2!}c^2ab =$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3c) + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 4(b^3a + c^3a + c^3b) +$$

$$+ 12(a^2bc + b^2ac + c^2ab).$$

Задача для самостоятельного решения №2. Возвести трехчлен $a+b+c$ в третью степень.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу бинома Ньютона.
2. Перечислите свойства биноминальных коэффициентов.
1. Дайте определение соединения, их виды?
2. Приведите формулы для вычисления разных видов соединений.

3. Дайте определение случайного события, их виды. Приведите примеры.
4. Дайте классическое определение вероятности.

Домашнее задание: с.р № 15 Вариант 1.

Практическая работа № 37

Вычисление вероятностей.

Цель: Знать определение вероятности, теоремы сложения, умножения вероятностей;

Уметь по условию задачи вычислять вероятность событий.

Сведения из теории:

К основным понятиям теории вероятности относятся: *испытание, событие, вероятность.* **Испытание** – реализация комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие. Например, бросание монеты – испытание; появление герба или цифры – события.

Случайным событием называется событие, которое при осуществлении испытания может произойти, а может и не произойти. Например, выстрел по цели — это опыт, случайные события в этом опыте – попадание в цель или промах.

Событие называется **достоверным**, если в результате опыта оно непременно должно произойти, и **невозможным**, если оно заведомо не произойдет. События называются **несовместными**, если ни какие два из них не могут появиться вместе. Например, попадание и промах при одном выстреле – это несовместные события.

Несколько событий образуют **полную систему событий**, если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. Например, при бросании игральной кости события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную систему событий.

События называются **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Например, при бросании монеты выпадение герба или числа - события равновозможные.

Каждое событие обладает какой-то степенью возможности. Числовая мера степени объективной возможности события - это **вероятность события**. Вероятность события А обозначается Р(А).

Пусть из системы n несовместных равновозможных исходов испытания m исходов благоприятствуют событию А. Тогда **вероятностью** события А называют отношение m числа исходов, благоприятствующих событию А, к числу n всех исходов данного испытания: $P(A)=m/n$.

Если В – достоверное событие, то Р(В)=1; если С – невозможное событие, то Р(С)=0, если А – случайное событие, то 0<Р(А)<1.

Пример.

Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятность появления четного числа очков.

Решение. Опыт имеет шесть равновозможных независимых исходов (появление одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков), образующих полную систему. Событию благоприятствуют три исхода (появление двух, четырех и шести очков), поэтому Р(А)=3/6=1/2

Сложение вероятностей

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Пример 1

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

Решение:

очевидно, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B – одна деталь стандартная, две нестандартные; C – две детали стандартные, одна нестандартная; $Д$ – три детали стандартные.

Т.о., событие A можно представить в виде суммы этих трех событий: $A=B+C+Д$.

Тогда $P(A)=P(B)+P(C)+P(Д)$.

Вычислим вероятность каждого события:

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_5^2}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 1\cdot 2}=\frac{35}{76}$$

$$P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 15\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{5}{38}$$

$$P(Д)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{1}{114}$$

Итак,

$$P(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}=0{,}601$$

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Пример 1.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?

Решение:

пусть A – число кратно 3, B – число кратно 5. Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, …, 98, 99. Из них 30 – кратные 3, 18 – кратные 5 и шесть чисел одновременно кратны и 3 и 5, поэтому:

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5},\ P(AB)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}.$$

Т.к. A и B совместные события, то по формуле имеем:

$$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}=0{,}467.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи, используя теоремы сложения, умножения вероятностей:

1) В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

2) Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими учащимися равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.

3) Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

4) Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Умножение вероятностей.

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A.

Событие B называют *независимым от события A*, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B).$$

Итак, если событие B не зависит от события A, то событие A не зависит от события B; это означает, что *свойство независимости событий взаимно*.

Для независимых событий теорема умножения имеет вид:

$$P\,(AB) = P\,(A)\cdot P\,(B),$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Два события называют *независимыми*, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы. Например, события A, B, C попарно независимы, если независимы события A и B, A и C, B и C.

Пример.

Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один – в красный цвет (A), один – в синий цвет (B), один – в черный цвет (C) и один – во все эти три цвета (ABC). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?

Решение:

т.к. из четырех шаров два имеют красный цвет, то $P(A)$=2/4=1/2.

Рассуждая аналогично, найдем $P(B)$=1/2, $P(C)$=1/2.

Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие B уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события A?

Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события A по-прежнему равна 1/2. Другими словами, условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Следовательно, события A и B независимы.

Аналогично придем к выводу, что события A и C, B и C независимы. Итак, события A, B и C попарно независимы.

Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет.

Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет.

Т.о., допустив, что события B и C произошли, приходим к выводу, что событие A обязательно наступит. Следовательно, это событие достоверное и вероятность его равна единице.

Другими словами, условная вероятность $P_{BC}(A)=1$ события A не равна его безусловной вероятности $P(A)=1/2$. Итак, попарно независимые события A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Пример 1

Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение:

вероятность появления герба первой монеты (событие A): $P(A)=1/2$.

Вероятность появления герба второй монеты (событие B): $P(B)=1/2$.

События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=1/2\cdot 1/2=1/4.$$

Пример 2.

Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение:

вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A):

$$P(A)=8/10=0{,}8.$$

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B):

$$P(B)=7/10=0{,}7.$$

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C):

$$P(C)=9/10=0{,}9.$$

Так как события A, B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Вероятность того, что в магазине будет продана пара мужской обуви 44-го размера, равна 0,12; 45-го – 0,04; 46-го и большего – 0,01.

Найти вероятность того, что будет продана пара мужской обуви не меньше 44-го размера.

2) При условиях задачи 1 найти вероятность того, что очередной будет продана пара обуви меньше 44-го размера.

3) В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении при условии, что извлеченный в первый раз резец в ящик не возвращается.

4) В урне находятся 5 белых шаров, 4 черных и 3 синих. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором - черный (событие B) и при третьем – синий (событие C).

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте теоремы сложения, умножения вероятностей.
2. Дайте определение независимых событий.
3. Какие события называются попарно независимыми?

Домашнее задание: выполнить задания для самостоятельного решения.

Практическое занятие №38

Дискретная случайная величина. Решение прикладных задач с применением вероятностных методов

Цель: знать формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины;

уметь вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины.

Сведения из теории:

Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.

Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.

Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда ее *математическое ожидание M(X)* определяется равенством

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.

Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, Pi=1/6. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно

$$M(X) = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3{,}5.$$

Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.

Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.

Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D\{X) = M[X- M(X)]^2.$$

Так же дисперсию можно вычислить и по формуле:

$$D\{X) = M(X^2)- [M(X)]^2,$$

т. е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата её математического ожидания.

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда, если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность м^2. Поэтому вводится еще одна характеристика, называемая *средним квадратическим отклонением*, обозначается: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Пример 111.

Пусть X – число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.

Решение:

случайная величина X – число очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составим закон её распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда её математическое ожидание:

$$M(X)= 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5.$$

Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

x_1^0=1-3,5; x_2^0=2-3,5; x_3^0=3-3,5; x_4^0=4-3,5; x_5^0=5-3,5; x_6^0=6-3,5.

Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\frac{1}{6}((1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+(6-3{,}5)^2)=\frac{35}{12}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант

1) Монету подбрасывают 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа появлений герба.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2 вариант

1) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	4	7	10	13

4 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	2	3	4	5

<table>
<tr>
<td>
<table><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,1</td></tr></table>
2) Монету подбрасывают 6 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения «решки».
</td>
<td>
<table><tr><td>p</td><td>0,15</td><td>0,17</td><td>0,35</td><td>0,21</td><td>0,12</td></tr></table>
2) Монету подбрасывают 5 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения герба.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
5 вариант
1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:
<table><tr><td>X</td><td>10</td><td>30</td><td>40</td><td>60</td><td>70</td></tr><tr><td>p</td><td>0,3</td><td>0,13</td><td>0,45</td><td>0,1</td><td>0,02</td></tr></table>
3) Игральную кость подбросили 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.
</td>
<td>
6 вариант
1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:
<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,11</td><td>0,2</td><td>0,22</td><td>0,37</td></tr></table>
3) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
7 вариант
1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:
<table><tr><td>X</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr><tr><td>p</td><td>0,125</td><td>0,375</td><td>0,5</td></tr></table>
2) Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит пирамида.
</td>
<td>
8 вариант
1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:
<table><tr><td>X</td><td>10</td><td>30</td><td>50</td></tr><tr><td>p</td><td>0,175</td><td>0,35</td><td>0,475</td></tr></table>
2) Игральный кубик имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4, 5, 6. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит кубик.
</td>
</tr>
</table>

Контрольные вопросы:

1. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
2. Что называется дисперсией дискретной случайной величины?

Домашнее задание: учебник с.225-228 № 1,2.

Практическое занятие №39

Решение практических задач на обработку числовых данных, вычисление их характеристик

Цель: Закрепление полученных знаний.

Сведения из теории

Вариационным рядом называется ранжирование в порядке возрастания вариант с соответствующими им частотами (ранжир - в переводе с фр.- «ставить в ряд по росту»).

Численность отдельной группы сгруппированного ряда наблюдаемых данных называется ***частотой*** или ***весом*** соответствующего варианта и обозначается m_i, где i - индекс варианта.

Отношение частоты данного варианта к объему совокупности называется ***относительной частотой*** (w_i) или ***частостью*** этого варианта. $\boxed{w_i = \frac{m_i}{n}}$

Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами m_i или частостями (w_i).

В общем виде его можно записать так:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
m_i	m_1	m_2	$\ldots$	m_n

Вариационный ряд часто дополнительно характеризуется накопленными частотами или накопленными частостями.

Накопленные частоты характеризуют число членов данной совокупности, у которых рассматриваемый признак принимает значения, не превышающие данного варианта.

Накопленные частости – результаты последовательного суммирования частостей всех вариантов, включая частость данного варианта.

Кроме дискретных вариационных рядов широкое применение имеют ***непрерывные (интервальные)*** вариационные ряды.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частостями попаданий в каждый из них значений случайной величины.

Интервальный ряд целесообразно построить, если число возможных значений дискретной величины велико или признак является непрерывным, т.е. может принимать любые значения в пределах некоторого интервала.

Для построения интервального ряда необходимо определить величину частичных интервалов, на которые разбивается весь интервал варьирования наблюдаемых значений случайной величины. Считая, что все частичные интервалы имеют одну и ту же длину, для каждого интервала следует установить его верхнюю и нижнюю границы, а затем в соответствии с полученной упорядоченной совокупностью частичных интервалов сгруппировать результаты наблюдений.

Для определения величины частичного интервала воспользуемся формулой Стерджесса:

$$\boxed{h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3{,}322\lg n}},\text{ где } \boxed{1 + 3{,}322\lg n} \text{ -число интервалов.}$$

За начало первого интервала рекомендуется брать величину:

$$\boxed{X_{нач.} = X_{\min} - \frac{h}{2}}$$

Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала **h**.

Теперь, просматривая, результаты наблюдений, определяем, сколько значений признака попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включают значение случайной величины, большие или равные нижней границе и меньшие верхней границы.

Пример : Пусть дан ряд распределения хозяйств по количеству рабочих на 100 га с/х угодий $(n = 60)$:

12 6 8 6 10 11 7 10 12 8 7 7 6 7 8 6 11 9 11 9 10
11 9 10 7 8 8 8 11 9 8 7 5 9 7 7 14 11 9 8 7 4
7 5 5 10 7 7 5 8 10 10 15 10 10 13 12 11 15 6

Построить интервальный вариационный ряд.

Решение. Для определения числа групп подставим значение $n = 60$ в формулу Стерджесса:

$$k = 1 + 3{,}322\lg 60 \approx 6{,}907; \quad k = 7$$

Найдем длину частичного интервала: $h = \dfrac{X_{\max} - X_{\min}}{k} = \dfrac{15 - 4}{7} = \dfrac{11}{7} \approx 1{,}6$

Построим интервальный вариационный ряд, для этого в качестве начального значения используем $X_{\min}$.

Группы хозяйств по численности работников на 100 га с/х угодий	Число хоз-в в группе m_i	Накопленное число хоз-в S_i	Относительная частота $\widehat{p}_i$
4- 5,6	5	5	5/60
5,61- 7,2	17	22	17/60
7,21- 8,8	9	31	9/60
8,81- 10,4	15	46	15/60
10,41- 12,0	10	56	10/60

12,01- 13,6	1	57	1/60
13,61- 15,2	3	60	3/60
Итого	60	-	1

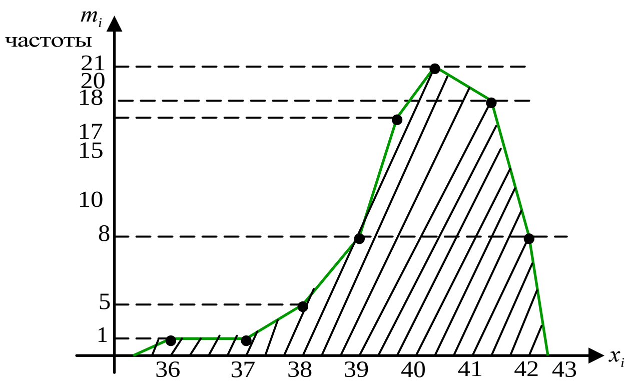
Иногда интервальный вариационный ряд для простоты исследований условно заменяют дискретным.

В этом случае серединное значение $i-го$ интервала принимают за вариант x_i, а соответствующую интервальную частоту m_i - за частоту этого интервала.

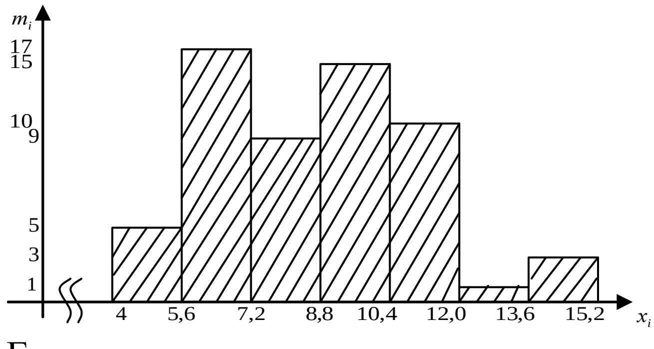
Графическое изображение вариационных рядов.

Графическое изображение позволяет представить в наглядной форме закономерности варьирования значений признаков с помощью полигона, гистограммы, кумуляты и огивы.

Полигоном (для дискретного вариационного ряда) называется ломанная, соединяющая на плоскости точки с координатами $(x_i;m_i)$.



Гистограммой (для интервального вариационного ряда) называют ступенчатую фигуру, состоящую и прямоугольников, основаниями которых служат интервалы $(x_{i-1};x_i)$, а высотами - частоты m_i.



Если в вариационном ряду вместо частот взяты соответственно накопленные частоты, то полученный ряд называется ***кумулятивным рядом*** (кумуляция – от латинского «скопление»).

Числовые характеристики вариационных рядов.

Средней арифметической $(\overline{X})$ дискретного вариационного ряда называется отношение суммы произведений вариантов на соответствующие частоты к объему совокупности: $\overline{X} = \frac{\sum x_i m_i}{n}$ (1)

Вычисленное по формуле (1) среднее арифметическое называется **взвешенным**, так как частоты m_i называются **весами,** а операция умножения x_i на m_i - **взвешиванием.**

Для интервального вариационного ряда за x_i принимают середину $i-го$ интервала, а за m_i - соответствующую интервальную частоту.

Модой $(\widehat{M}_0(x))$ дискретного вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Для интервальных вариационных рядов при нахождении $\widehat{M}_0(x)$ используют формулу: $\boxed{\widehat{M}_0(x) = x_0 + h\cdot\frac{m_i - m_{i-1}}{(m_i - m_{i-1}) + (m_i - m_{i+1})}}$, где

x_0 - начало модального интервала; h - длина частичного интервала; m_i - частота модального интервала; m_{i-1} - частота предмодального интервала; m_{i+1} - частота послемодального интервала.

Медианой $(\widehat{M}_e(x))$ дискретного вариационного ряда называется вариант, делящий ряд на две равные части.

Если дискретный вариационный ряд имеет **четное** $(2n)$ число членов, то: $\boxed{\widehat{M}_e(x) = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}}$.

Если дискретный вариационный ряд имеет **нечетное** $(2n-1)$ число значений варьирующего признака, расположенных в порядке возрастания, то медианой этого распределения является вариант x_n: $\boxed{\widehat{M}_e(x) = x_n}$

При нахождении $\widehat{M}_e(x)$ для интервальных вариационных рядов используют формулу:

$\boxed{\widehat{M}_e(x) = x_0 + h\cdot\frac{0,5n - m_{i-1}^{нак}}{m_i}}$, где x_0 - начало медианного интервала;

h - длина частичного интервала; n - объем совокупности;

$m_{i-1}^{нак}$ - накопленная частота интервала, предшествующего медианному; m_i - частота медианного интервала.

Пример: Найти $\widehat{M}_e(x)$ по условию задачи

$n = 60 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2} = 30 \Rightarrow$ медиана расположена в интервале $7,21 - 8,8$

$$\widehat{M}_e\left(x\right) = 7,21 + 1,6\frac{0,5 \cdot 60 - 22}{9} \approx 8,62$$

<u>*Опр.*</u>

Размах (обозначается R) - разница между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины.

Практическое занятие №40

Доказательство признаков взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

Цель: Знать признаки параллельности прямой и плоскости, признаки параллельности плоскостей, признаки параллельности прямых в пространстве;

Уметь строить параллельные прямые, плоскости в пространстве.

Сведения из теории:

Признаки параллельности прямой и плоскости

1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности плоскостей

1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности прямых в пространстве

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Параллельные прямые

Возьмём, например, две такие прямые *AB* и *DE*, из которых одна пересекает некоторую плоскость *P*, а другая лежит на ней, но не проходит через точку (*C*) пересечения первой прямой и плоскости Р.

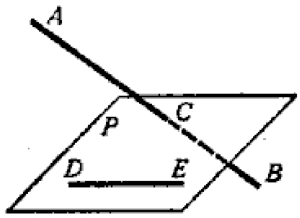


Рисунок 33. Непересекающиеся прямые

Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P, пересекающая прямую AB, и другая, содержащая её, а это невозможно.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

Прямая и плоскость параллельные между собой

Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если прямая (AB) параллельна какой-нибудь прямой (CD), расположенной в плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.

Если плоскость (R) проходит через прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (CD) параллельна первой прямой (AB).

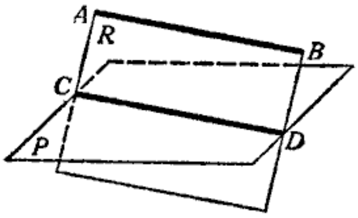


Рисунок 34. Прямая и плоскость параллельные между собой

Если прямая (AB) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (P и Q), то она параллельна линии их пересечения (CD).

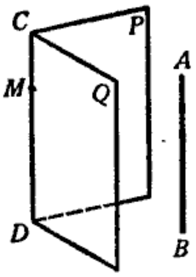


Рисунок 35. Параллельность прямой линии пересечения плоскостей

Если две прямые (AB и CD) параллельны третьей прямой (EF), то они параллельны между собой.

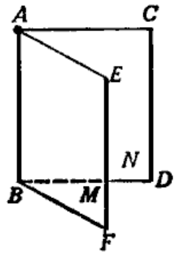


Рисунок 36. Параллельность трех прямых

Параллельные плоскости

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если две пересекающиеся прямые (AB и AC) одной плоскости (P) соответственно параллельны двум прямым (A_1B_1 и A_1C_1) другой плоскости(Q), то эти плоскости параллельны. Прямые AB и AC параллельны плоскости Q.

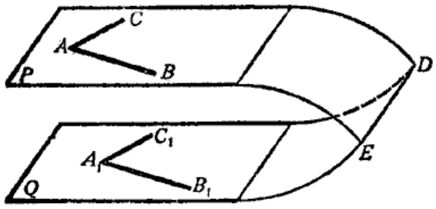


Рисунок 37. Параллельные плоскости

Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи (выполнить чертеж, дать подробные пояснения):

1) Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости a, а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

2) Сколько существует плоскостей, проходящих через данные прямую и точку в пространстве?

3) В пространстве даны прямая a и точка M. Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных прямой a?

4) Даны плоскость и точка M вне плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных плоскости?

5) В пространстве даны две параллельные прямые a и b. Сколько существует плоскостей, проходящих через прямую a и параллельных прямой b?

6) Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Сколько существует пар параллельных плоскостей, одна из которых проходит через a, а другая – через b?

7) В пространстве даны две пересекающиеся прямые a, b и не лежащая на них точка M. Сколько существует плоскостей, проходящих через M и параллельных прямым a и b?

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте признаки параллельности плоскостей.
3. Сформулируйте признаки параллельности прямых в пространстве.

Домашнее задание: учебник с. 58 № 1-4

Практическое занятие №41

Построение углов. Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве

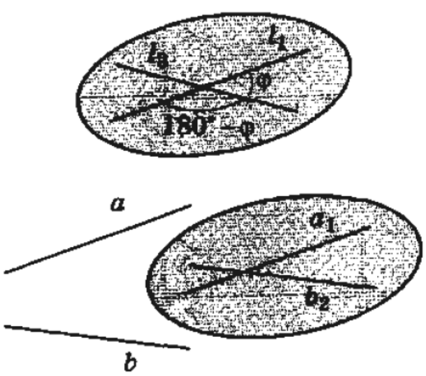
Цель: Закрепить знания по изучаемой теме.

Сведения из теории

Угол между двумя прямыми.

На плоскости две пересекающиеся прямые задают две пары равных между собой углов (вертикальные углы). Чтобы задать угол между двумя прямыми в пространстве, надо выбрать произвольную точку и провести через нее прямые, параллельные данным. Величины построенных плоских углов не будут зависеть от выбора начальной точки.

Угол между прямыми



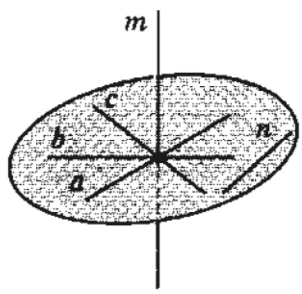
Две прямые в пространстве, которым соответствует прямой угол, называются *перпендикулярными*.

Прямая, перпендикулярная плоскости.

Так называются прямые, перпендикулярные всякой прямой в этой плоскости.

Т е о р е м а 1. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым некоторой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости



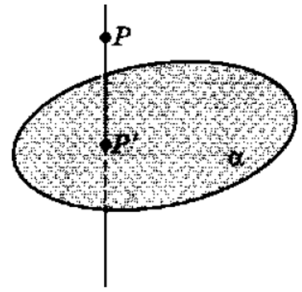
$m \perp n,\ m \perp a,\ m \perp b,\ m \perp c$

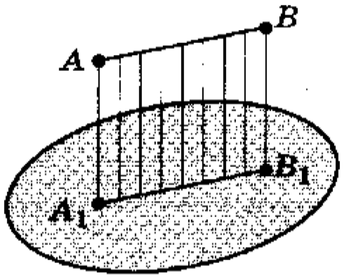
С помощью этого понятия можно определить *ортогональную проекцию* точки на плоскость. Проекцией на плоскость α точки P, не лежащей в этой плоскости, называется такая точка P', принадлежащая плоскости α, что прямая PP' перпендикулярна плоскости α.

Проекцией точки, лежащей в плоскости α , считается сама эта точка.

Если требуется спроектировать некоторую фигуру на плоскость α , необходимо спроектировать на нее все точки этой фигуры.

Ортогональная проекция.





будет некоторая прямая. В этом случае говорят, что прямая является *наклонной* к плоскости.

Угол между прямой и плоскостью.

Углом между наклонной и плоскостью считается угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Теорема о трех перпендикулярах.

Т е о р е м а 2. Если наклонная к плоскости перпендикулярна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то и проекция наклонной перпендикулярна этой прямой. Обратно: если проекция наклонной перпендикулярна прямой в плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна этой прямой.

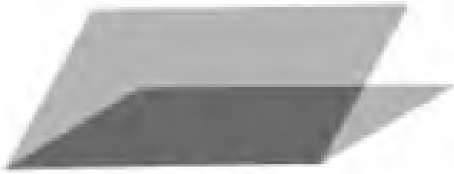
В учебной литературе можно встретить и другие формулировки теоремы. Приведем одну из них и докажем.

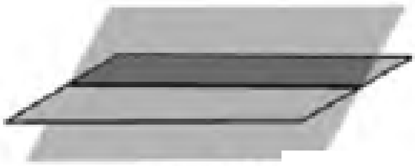
Двугранный угол.

Две непараллельные плоскости пересекаются по прямой и делят все пространство на четыре части, называемые двугранными углами.

Двугранный угол – это фигура, ограниченная двумя полуплоскостями с общим ребром.

Четыре двугранных угла, образованных двумя пересекающимися плоскостями, распадаются на две пары равных между собой двугранных углов, что аналогично равенству вертикальных углов, образующихся при пересечении двух прямых.

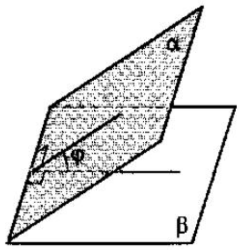




Угол между плоскостями.

Для измерения угла между пересекающимися плоскостями надо на линии пересечения этих плоскостей выбрать точку и провести через нее в каждой плоскости

Угол между плоскостями



$(\widehat{\alpha;\ \beta}) = \varphi$

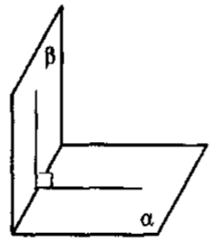
прямую, перпендикулярную линии пересечения. Угол между этими прямыми и считается углом между плоскостями.

Перпендикулярность двух плоскостей.

Две плоскости называются перпендикулярными, если, пересекаясь, они образуют равные двугранные углы.

Перпендикулярные плоскости образуют двугранные углы по 90°

Т е о р ем а 3 (*признак перпендикулярности двух плоскостей*). Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

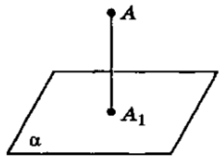


$\alpha \perp \beta$

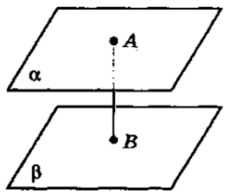
Определение расстояний

С помощью перпендикулярности можно определять и вычислять различные *расстояния* в пространстве.

1. Расстояние от точки до плоскости вычисляется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость (расстояние от данной точки до ее проекции на плоскость).



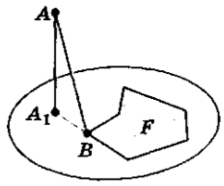
2. Расстоянием между двумя параллельными плоскостями считается длина отрезка общего перпендикуляра к этим плоскостям, заключенного между этими плоскостями.



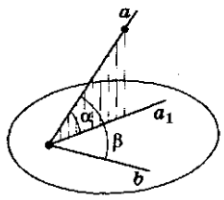
$\alpha \| \beta$

3. Если на плоскости задана некоторая фигура, то расстояние от произвольной точки в пространстве до этой фигуры определяется как наименьшее среди расстояний от данной точки до произвольной точки этой фигуры.

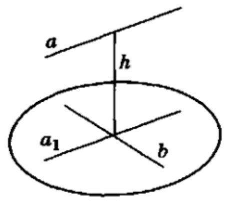
Спроектируем данную точку на плоскость. Тогда ближайшая к данной точке точка фигуры будет ближайшей и к ее проекции, и наоборот, чтобы найти точку фигуры, ближайшую к данной точке, достаточно найти точку, ближайшую к ее проекции.



4. Угол между прямой и плоскостью, определяемый как угол между прямой и ее проекцией, будет наименьшим среди углов, которые образует данная прямая с произвольными прямыми плоскости.



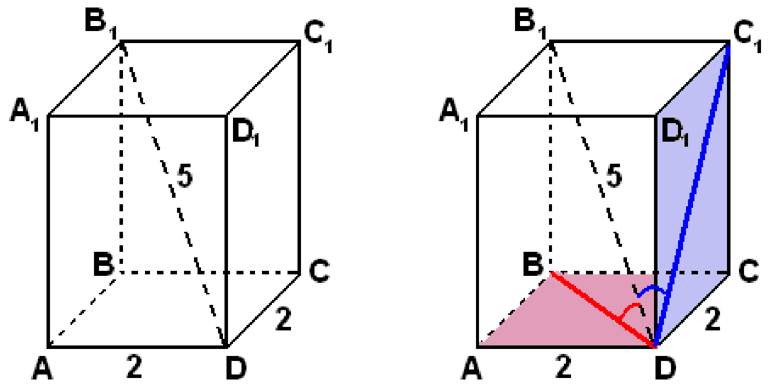
5. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми вычисляется как длина общего перпендикуляра.



$a \dotminus b,\ a_1 \| a,\ h \perp a,\ h \perp b$

Задача 1:

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - ABCD – квадрат со стороной, равной 2 см. Все боковые грани – прямоугольники, B_1D=5 см. Найдите углы между B_1D и плоскостью ABC и между B_1D и плоскостью DD_1C_1.



Решение:

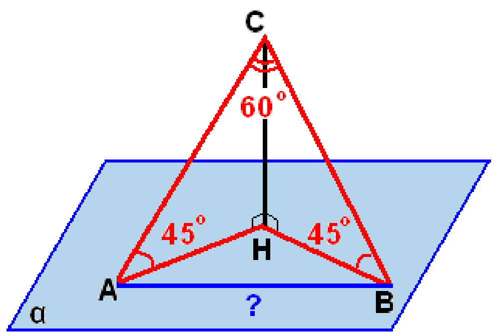
1. ABCD – квадрат. По теореме Пифагора $BD^2=2^2+2^2=8$; $BD=2\sqrt{2}$;
2. Треугольник BDB_1 – прямоугольный (т.к. параллелепипед) =>

cos BDB_1= $\frac{BD}{B_1D}=\frac{2\sqrt{2}}{5}=0,4\sqrt{2}$;

3. Так как плоскости B_1C_1C и D_1C_1C перпендикулярны, то $\triangle B_1C_1D$ прямоугольный, тогда sin B_1DC_1=$\frac{B_1C_1}{B_1D}=\frac{2}{5}=0,4$.

Задача 2: Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние *a*, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45^0, а между собой угол в 60^0. Определить расстояние между концами наклонных.

Решение:

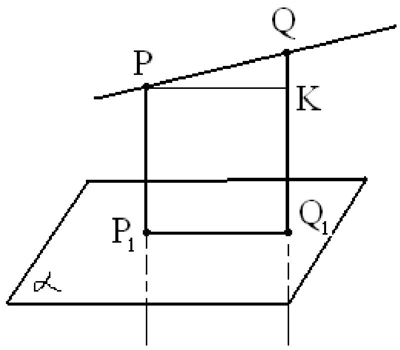


1. Так как CH расстояние, то треугольники ACH и CHB прямоугольные и $\angle CAH=\angle CBH=45^\circ$, тогда $\angle ACH=\angle BCH=45^\circ$, значит треугольники ACH и CHB равносторонние и CH=AH=HB=*a*
2. По теореме Пифагора CA=CB=$\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$;
3. В треугольнике ABC $\angle ACB=60^\circ$ и AC=CB$\Rightarrow$ треугольник ABC равносторонний AB= $a\sqrt{2}$.

Задача 3.

Через точки *P* и *Q* прямой *PQ* проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие её соответственно в точках P_1 и Q_1.

Найдите P_1Q_1, если PQ = 15 см; PP_1 = 21,5 см; QQ_1 = 33,5 см.



Решение:

1) $PP_1 \perp \alpha$ и $QQ_1 \perp \alpha$ по условию $\Rightarrow PP_1 \parallel QQ_1$ (т.к. если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны);

2) PP_1 и QQ_1 определяют некоторую плоскость β, $\alpha \cap \beta = P_1Q_1$;

3) PP_1Q_1Q - трапеция с основаниями PP_1 и QQ_1, проведём $PK \parallel P_1Q_1$;

4) $QK = QQ_1 - PP_1 = 33{,}5 - 21{,}5 = 12$ (см)

$P_1Q_1 = PK = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ см. по теореме Пифагора

Ответ: $P_1Q_1 = 9$ см.

Задача 4.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AB = 9 см; BC = 8 см; BD = 17 см. Найдите площадь BDD_1B_1.

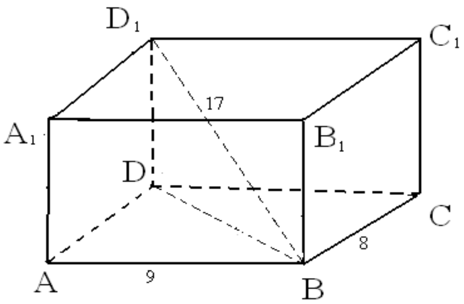


Рис.5

Решение:

1) $\Delta\, ABD$: $\angle BAD = 90°$; $AD = BC = 8$ см;

$BD = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145}$ см;

2) $\Delta\, DD_1B$: $\angle D_1DB = 90°$;

$DD_1 = \sqrt{17^2 - (\sqrt{145})^2} = \sqrt{144} = 12$ см;

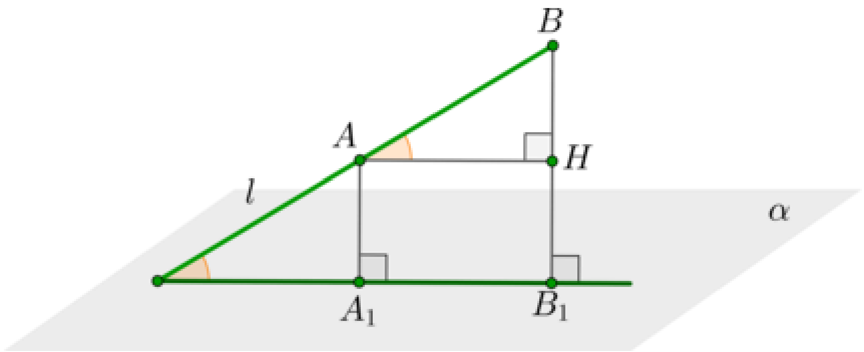
3) $S_{BB1D1D} = BD \cdot DD_1 = 12\sqrt{145}$ см^2.

Ответ: $12\sqrt{145}$ *см*^{2}.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.

Прямая l пересекает плоскость α. На прямой l отмечен отрезок AB=25, причем известно, что проекция этого отрезка на плоскость α равна 24. Найдите синус угла между прямой l и плоскостью α



Задача 2

Отрезок MH пересекает плоскость α в точке K. Из концов отрезка проведены прямые ME и HP, перпендикулярные к плоскости α. HP = 4 см; ME = 12 см; HK = 5 см. Найдите отрезок PE.

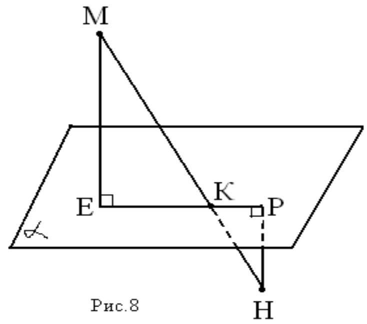
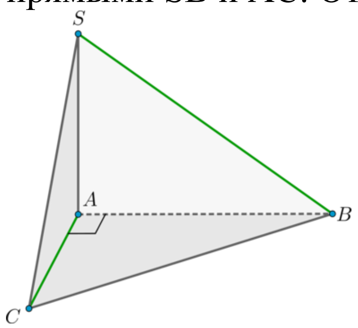


Рис.8

Задача 3

Дана пирамида SABC с высотой SA, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с прямым углом A. Найдите угол между прямыми SB и AC. Ответ дайте в градусах.



Домашнее задание: учебник с. 58-61

Практическое занятие №42
Решение задач на вычисление геометрических величин

Цель: Закрепление изученного материала

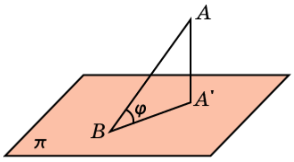
Сведения из теории:

Теорема: Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной. **Теорема (обратная)**: Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Определение: Расстоянием от точки до плоскости в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость

Угол между прямой и плоскостью.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость. Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.



Определим понятие угла между плоскостями.

Определение: Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

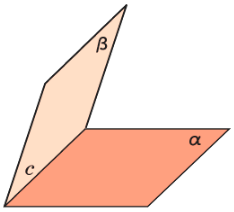


Рис. 1

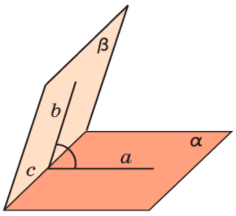
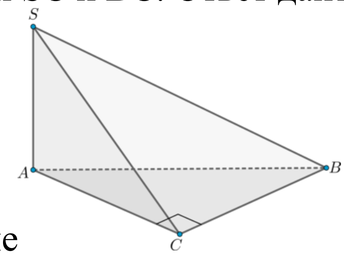


Рис. 2

Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется углом между данными плоскостями. Заметим, что при пересечении двух плоскостей вообще-то образуются четыре угла. В качестве угла между плоскостями мы берем острый угол.

Задача1.

Дана пирамида SABC с высотой SA. Известно, что в основании лежит прямоугольный треугольник с прямым углом C. Найдите угол между ребрами SC и BC. Ответ дайте в градусах.

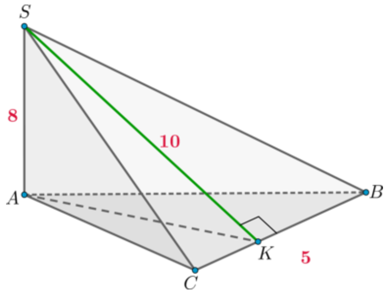


Решение

Так как SA – высота пирамиды, то SA⊥(ABC). Заметим, что AC – проекция наклонной SC на плоскость ABC. Так как AC⊥BC, то по теореме о трех перпендикулярах SC⊥BC, следовательно, угол между SC и BC равен 90∘.

Ответ: 90

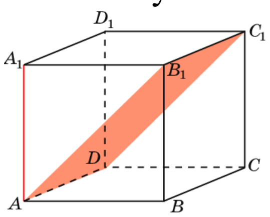
Задача 2.
Дана пирамида SABC с высотой SA=8. Известно, что SK равно 10 и перпендикулярно BC=5, причем K лежит на BC. Найдите площадь треугольника ABC.



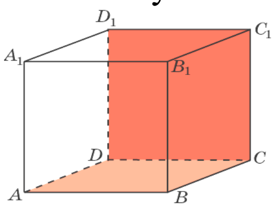
Решение
Так как SA – высота пирамиды, то SA⊥(ABC). Заметим, что AK – проекция наклонной SK на плоскость ABC. Так как SK⊥BC, то по теореме о трех перпендикулярах AK⊥BC, следовательно, S∆ABC=12AK·BC. Треугольник SAK прямоугольный, следовательно, по теореме Пифагора AK=SK2−SA2=6. Следовательно, S∆ABC=12·6·5=15.
Ответ: 15

Задания для самостоятельного решения
Решить. Ответы обосновать.
Вариант 1

1. Из вершины *A* квадрата *ABCD* перпендикулярно его плоскости проведен отрезок *AK*, равный 3. Из точки *K* опущены перпендикуляры на стороны *BC* и *CD*. Перпендикуляр из точки *K* к стороне *BC* равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.
2. В кубе $A…D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.



3. В кубе $A…D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDD_1.



Домашнее задание: с.р. № 18,19 вопросы для закрепления

Практическое занятие №43,44

Применение формул и теорем планиметрии для решения задач Параллельное проектирование

Цель: знать свойства параллельного проектирования;
уметь строить фигуры с помощью параллельного проектирования.

Сведения из теории:

Параллельное проектирование

Пусть даны плоскость α и прямая l, пересекающая плоскость a. Возьмем произвольную точку пространства A_1 и проведем через эту точку прямую l_1, параллельную l. Прямая l_1 пересечет плоскость α в некоторой точке A. Полученная таким образом точка A называется проекцией точки A на плоскость α при проектировании параллельно прямой l. Обычно кратко говорят, что точка A есть параллельная проекция точки A_1.

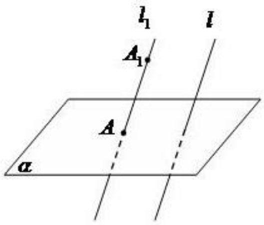


Рисунок 42. Параллельное проектирование

Параллельной проекцией пространственной фигуры $Ф_1$ называется множество Ф параллельных проекций всех точек данной фигуры.

Свойства параллельного проектирования

1) Проекция прямой есть прямая.

2) Проекции параллельных прямых параллельны.

3) Отношение проекций двух параллельных отрезков равно отношению проектируемых отрезков.

Ортогональное проектирование

Частным случаем параллельного проектирования является *ортогональное проектирование*

Пусть даны плоскость α и прямая l, перпендикулярная α. Возьмем произвольную точку пространства A_1 и проведем через нее прямую l_1 параллельную l (и, следовательно, перпендикулярную плоскости α). Прямая l_1 пересечет плоскость α в некоторой точке A.

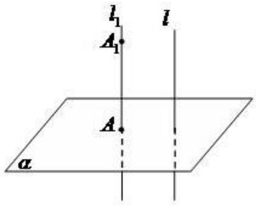


Рисунок 43. Ортогональное проектирование

Полученная точка A называется ортогональной проекцией точки A_1 на плоскость α.

Ортогональной проекцией фигуры Φ_1 на плоскость α называется множество Φ ортогональных проекций всех точек данной фигуры Φ_1. Как частный случай параллельного проектирования, ортогональное проектирование обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

Свойство ортогональной проекции плоского многоугольника

Площадь s ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость α равна площади S проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла γ между плоскостью многоугольника и плоскостью α:

$$s=S\cdot\cos(\gamma).$$

Пример 1.

Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом $\gamma=30^0$ к плоскости ее основания. Найти площадь образующегося сечения, если сторона основания равна 6 см.

Решение:

т.к. призма правильная, то ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Следовательно, плоскость основания есть проекция плоскости сечения.

Т.к. в основании правильный треугольник, то его площадь равна:

$$s=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Используя свойство ортогональной проекции, имеем:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\gamma}.$$

Зная, что сторона основания равна 6 см и угол $\gamma=30^0$, вычислим площадь:

$$S=\frac{6^2\sqrt{3}}{4\cos 30}=\frac{36\sqrt{3}}{4\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{36}{2}=18.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Каковы проекции двух прямых на плоскость, если: а) прямые пересекаются; б) прямые скрещиваются; в) прямые параллельны.

2) На модели куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите проекции на плоскость грани AA_1B_1B отрезков C_1D_1, AD, C_1D и DB_1, треугольников C_1CD и ACD, квадрата BB_1C_1C.

3) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а острый угол 60^0. Найдите площадь проекции этого треугольника на плоскость, составляющую с плоскостью треугольника угол 30^0.

4) Стороны треугольника равны 3,9 см, 4,1 см и 2,8 см. Найдите площадь его проекции на плоскость, составляющую с плоскостью треугольника угол 60^0.

Контрольные вопросы:

1. Что называется параллельной проекцией?
2. Перечислите свойства параллельного проектирования.
3. Что называется ортогональной проекцией фигуры?

Домашнее задание: с.р. № 17 задания 1-3.

Практическое занятие №45

Изображение различных видов многогранников. Выполнение построения на изображениях и моделях многогранников.

Цель: Знать свойство, связывающее число вершин, ребер и граней многогранника;

Уметь устанавливать связь между числом плоских углов П многогранника и числом его ребер *Р*.

Сведения из теории:

Для выпуклых многогранников имеет место свойство, связывающее число его вершин, ребер и граней, доказанное в 1752 году Леонардом Эйлером, и получившее название теоремы Эйлера.

Прежде чем его сформулировать рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой *В* – число вершин, *Р* – ребер и *Г* – граней данного многогранника:

Название многогранника	*В*	*Р*	*Г*
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	n+1	2n	+1
n-угольная призма	2n	3n	n+2

n-угольная усеченная пирамида	$2n$	$3n$	$n+2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство $В$-$Р$+$Г$=2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для этих многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника.

Заметим, что многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Число вершин, ребер и граней при этом не изменится.

Для полученного разбиения многоугольника на более мелкие многоугольники имеет место равенство:

$$В\text{-}Р+Г=1,$$

где $В$ – общее число вершин, $Р$ – общее число ребер и $Г$ – число многоугольников, входящих в разбиение. Ясно, что $Г$=$Г$–1, где $Г$ – число граней данного многогранника.

В любом выпуклом многограннике найдется грань с числом ребер меньшим или равным пяти

Для любого многогранника имеет место неравенство $3B \leq 2P$.

Задания для самостоятельного решения:

1) Может ли число вершин многогранника равняться числу его граней?

2) Установите связь между числом плоских углов $П$ многогранника и числом его ребер $Р$.

3) Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин $В$ и граней $Г$, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Приведите примеры таких многогранников.

4) Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин $В$ и граней $Г$, если у него: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.

5) В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин $В$ и граней $Г$, если число ребер равно 12? Нарисуйте эти многогранники.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу, связывающую число вершин, ребер и граней многогранника.

Домашнее задание: учебник с. 145-150

Практическое занятие №46

Вычисление линейных элементов, углов, площадей поверхностей в пространственных конфигурациях. Построение простейших сечений куба, призмы, пирамиды.

Цель: Знать свойства прямоугольного параллелепипеда;

- формулы объема прямоугольного параллелепипеда, куба; метод «следов»; правила построения сечений многогранников

уметь: строить параллелепипед, куб; вычислять объем прямоугольного параллелепипеда, куба; строить сечения куба, призмы, пирамиды.

Сведения из теории:

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы. Отрезки, соединяющие вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной и той же грани, называются *диагоналями параллелепипеда*.

Свойства параллелепипеда

1) Середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии.

2) Противолежащие грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.

3) Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

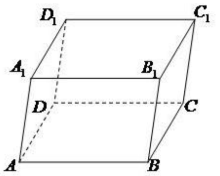


Рисунок 46. Параллелепипед

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания параллелепипеда, называется *прямым параллелепипедом* ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед).

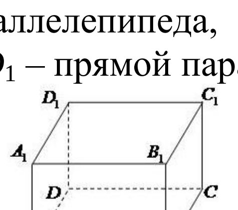


Рисунок 47. Прямоугольный параллелепипед

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.

Свойства прямоугольного параллелепипеда

1) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:

$$d^2=a^2+b^2+c^2.$$

2) Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

3) Для куба формула упрощается: $4d^2=12a^2$.

Пример 1.

Найти длину стороны куба, если его диагональ равна 5 см.

Решение:

из формулы для диагонали куба выразим его сторону:

$$a^2=\frac{4d^2}{12}.$$

Тогда,

$$a=\sqrt{\frac{4d^2}{12}}=\frac{d}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Т. к. параллелепипед есть частный случай призмы, то площадь поверхности и объем параллелепипеда вычисляются по формулам для площади поверхности и объема призмы. Кроме того, объем прямоугольного параллелепипед можно вычислять по формуле:

$$V=abc,$$

где a, b, c – три измерения прямоугольного параллелепипеда.

Куб

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется кубом. Все грани куба – равные квадраты.

Объем куба вычисляется по формуле:

$$V=a^3,$$

где a – измерение куба.

Как найти сумму длин всех рёбер параллелепипеда

Для удобства введем обозначения: A и B стороны основания параллелепипеда; C – его боковая грань.

Т. о., в основании параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами A и B. Параллелограмм – это четырехугольник, противоположные стороны которого равны и параллельны. Из этого определения следует, что против стороны A лежит равная ей сторона A. Поскольку противолежащие грани параллелепипеда равны (вытекает из определения), то верхняя его грань тоже имеет 2 стороны равные A. Таким образом, сумма всех четырех этих сторон равна $4A$.

То же, можно сказать, и о стороне B. Противоположная ей сторона в основании параллелепипеда равна B. Верхняя (противолежащая) грань параллелепипеда тоже имеет 2 стороны, равные B. Сумма всех четырех этих сторон равна $4B$.

Боковые грани параллелепипеда тоже являются параллелограммами (вытекает из свойств параллелепипеда). Ребро C одновременно является стороной двух соседних граней параллелепипеда. Поскольку противоположные грани параллелепипеда попарно равны, то все его боковые ребра равны между собой и равны C. Сумма боковых ребер – $4C$.

Таким образом, сумма всех ребер параллелепипеда: $4A+4B+4C$ или $4(A+B+C)$.

Частный случай прямого параллелепипеда – куб. Сумма всех его ребер равна $12A$.

Пример 2.

Найдите ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда, если ширина b больше его длины a на 1 см, высота c в 2 раза больше длины a, а диагональ d в 3 раза больше длины a.

Решение:

запишем основную формулу квадрата диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$$d^2=a^2+b^2+c^2.$$

Выразим все измерения через заданную длину a: $b=a+1$; $c=2a$; $d=3a$.

Подставим в формулу:

$$9a^2 =a^2+(a+1)^2+4a^2.$$

Решив квадратное уравнение, найдем длины всех ребер:

$$3a^2–2a–1=0.$$

$$a=1;\ b=2;\ c=2.$$

Пример 3.

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

Решение:

обозначим известные ребра за a и b, а неизвестное за c. Площадь поверхности параллелепипеда выражается как

$$S = 2(ab + bc + ac).$$

Выразим c:

$$c = \frac{\frac{S}{2} - ab}{a + b}.$$

Подставляя заданные значения, имеем:

$$c = \frac{\frac{94}{2} - 12}{7} = 5.$$

Ответ: 5.

Сечения куба плоскостью

Если плоскость пересекает три ребра куба, выходящих из одной вершины, то в сечении получается треугольник (рис. 48 слева). При этом если отсекаемые плоскостью отрезки ребер равны, то в сечении получается равносторонний треугольник, если равны два отрезка из трех, то получается равнобедренный треугольник, наконец, если все три отрезка различны, то в сечении получается разносторонний треугольник.

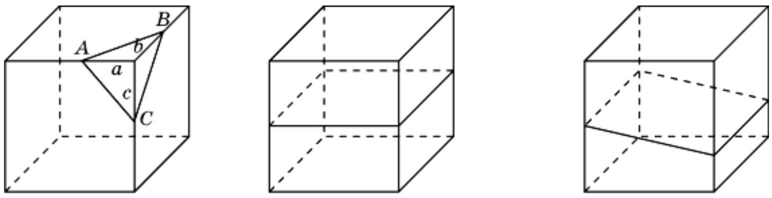


Рисунок 48. Сечения куба плоскостью

В сечении куба плоскостью не могут получаться прямоугольный или тупоугольный треугольники.

Выясним, какие четырехугольники могут получаться в сечении куба плоскостью.

Ясно, что если плоскость параллельна одной из граней куба, то в сечении получается квадрат (рис. 48 посередине). Если плоскость параллельна одному из ребер куба, то в сечении получается прямоугольник (рис. 48 справа). Если плоскость пересекает четыре параллельных ребра куба, то в сечении получается параллелограмм (рис. 49 слева).

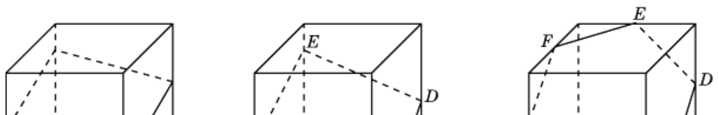


Рисунок 49. Сечения куба плоскостью

На рис. 49 посередине показано сечение куба плоскостью в форме пятиугольника *ABCDE*. Прямые *AB* и *DE*, *CD* и *AE* параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

На рис. 49 справа показано сечение куба плоскостью в форме шестиугольника *ABCDEF*. Прямые *AB* и *DE*, *BC* и *EF*, *CD* и *AF* параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Поскольку у куба имеется только шесть граней, то в сечении куба плоскостью не может получиться многоугольник с числом сторон, большим шести.

Построение сечений многогранников

Для построения сечений используют метод «следов», заключающийся в нахождении точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость.

Пример 117.

Пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Требуется найти точку пересечения прямой AB с плоскостью π.

Решение:

через точки A', B' проведем прямую k'. Тогда пересечение прямой k с прямой k' и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (см. рис. 50).

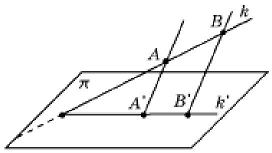


Рисунок 50.

Пример 118.

Даны точки A, B, C и их параллельные проекции A', B', C' на плоскость π. Требуется построить линию пересечения плоскости ABC и плоскости π.

Решение:

используя решение предыдущей задачи, построим точки X и Y пересечения прямых AB и AC с плоскостью π. Прямая XY будет искомой линией пересечения плоскости ABC и плоскости π (см. рис. 51).

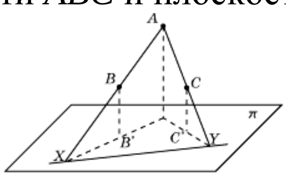


Рисунок 51.

Пример 119.

Через данную точку C (C') провести прямую, параллельную данной прямой AB ($A'B'$), и найти ее точку пересечения с плоскостью π.

Решение:

через точку C проводим прямую, параллельную AB. Через точку C' проводим прямую, параллельную $A'B'$. Точка X пересечения этих прямых и будет искомой (см. рис. 52).

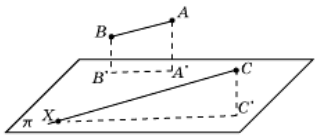


Рисунок 52.

Используя метод, рассмотренный в примере 119, решим задачи на построение сечений куба, пирамиды и призмы

Пример 120.

Построить сечение куба плоскостью проходящей через три точки *A, B, C,* принадлежащие попарно скрещивающимся ребрам этого куба (см. рис. 53).

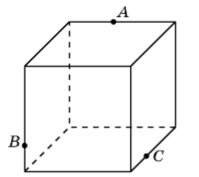


Рисунок 53.

Решение:

найдем пересечение прямой *AB*, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции*A', B'* точек *A*, *B* на основание куба в направлении бокового ребра куба (см. рис. 54).

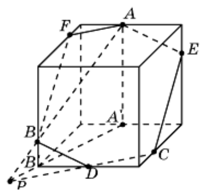


Рисунок 54.

Пересечение прямых *AB* и *A'B'* будет искомой точкой *P*. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой *CP*. Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку *D* сечения куба. Соединим точки *C* и *D, B* и *D* отрезками. Через точку *A* проведем прямую, параллельную *BD*, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим *E*. Соединим точки *E* и *C* отрезком. Через точку *A* проведем прямую, параллельную *CD*, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим *F*. Соединим точки *A* и *F, B* и *F* отрезками. Многоугольник *AECDBF* и будет искомым изображением сечения куба плоскостью.

Пример 121.

Построить сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки *A, B, C,* принадлежащие ее ребрам (см. рис. 55).

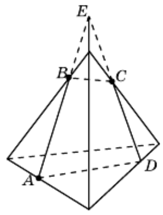


Рисунок 55.

Решение**:**

проведем прямую AB и ее точку пересечения с боковым ребром пирамиды обозначим через E. Проведем прямую EC и ее точку пересечения с ребром основания пирамиды обозначим через D. Соединим отрезками точки B и C, A и D. Четырехугольник $ABCD$ будет искомым сечением пирамиды.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1. Надо покрасить пол в комнате. Расход краски на 1 *м*^{2} – 120 *г*, комната имеет размеры 5 *м* и 4 *м*. Сколько потребуется краски?
2. Надо оклеить комнату с одним окном и дверью обоями от пола до потолка. Длина комнаты 5 *м*, ширина – 4 *м*, высота – 3 *м*. Площадь окна 3 *м*^{2}, площадь двери 2 *м*^{2}. Обои продаются целыми рулонами, 1 рулон на 10 *м*^{2}. Сколько потребуется рулонов обоев?
3. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.
4. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.
5. Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и середину ребра CC_1?
6. Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и DD_1?
7. Через середину ребра куба, перпендикулярно скрещивающейся с этим ребром диагонали, проведено сечение. Определите его вид.
8. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проходит через две противоположные вершины нижнего основания и середину одного из ребер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ребра куба равна 1.
9. Через вершины A, C, D_1 куба $A…D_1$ проведено сечение. В каком отношении оно делит диагональ DB_1, и какой образует угол с этой диагональю?
10. Каким является сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и CD?

11. Какой фигурой является сечение правильного тетраэдра *ABCD* плоскостью, проходящей через вершину *B* и точки *M, N* – середины соответственно ребер *AD, CD*?
12. Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, *D* и точку *H*, принадлежащую ребру CC_1.
13. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 56.

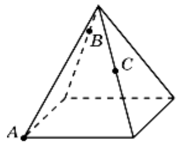


Рисунок 56.

14. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 57.

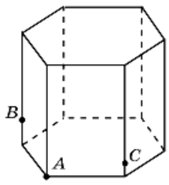


Рисунок 57.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение параллелепипеда, куба, выполните соответствующие чертежи.
2. Перечислите свойства прямоугольного параллелепипеда.
3. Запишите формулы для вычисления объема параллелепипеда, куба.
4. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) трапеция; б) равнобедренная трапеция; в) неравнобедренная трапеция; г) прямоугольная трапеция; д) тупоугольная трапеция?
5. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?
6. Какие могут быть сечения правильного тетраэдра плоскостью?

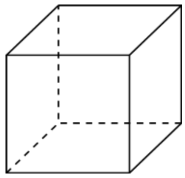
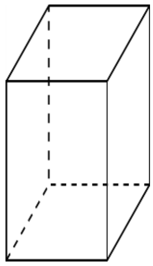
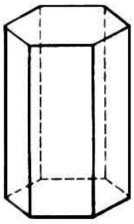
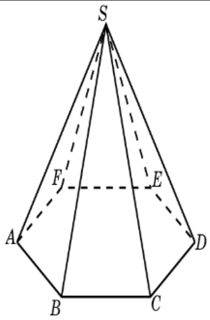
Домашнее задание: задания для с.р. 3,4,13,14

Практическое занятие №47
Площадь поверхности

Цель: *Знать и уметь применять формулы для нахождения площадей многогранников.*

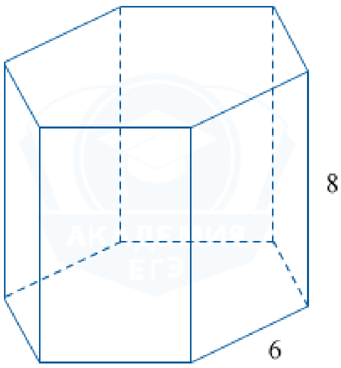
Сведения из теории

Основные формулы

№ п/п	Наименование многогранника	Изображение	Площадь боковой и полной поверхности
1	**Куб**		$S_п = 6a^2$ $V=a^3$
2	**Прямоугольный параллелепипед**		$S_п = 2ab + 2ac + 2ac$ **V=a*b*c** **$V=S_{осн}*h$**
3	**Призма**		$S_б = p \cdot H$ $S_п = S_б + 2S_о$ **$V=S_{осн}*h$**
4	**Пирамида**		$S_б = \frac{1}{2} p \cdot h$ $S_п = S_б + S_о$ **$V=(1/3)*S_{осн}*h$**

Пример1.

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 6, а высота — 8.

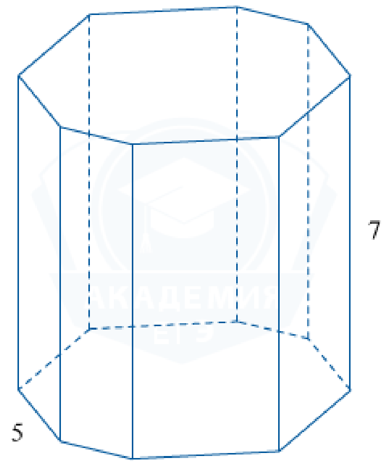


Решение

Площадь боковой поверхности призмы находим по формуле $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot \mathrm{h} = 6a \cdot h$, где $P_{осн.}$ и h — соответственно периметр основания и высота призмы, равная 8, и a — сторона правильного шестиугольника, равная 6. Следовательно, $S_{бок.} = 6 \cdot 6 \cdot 8 = 288$.

Пример 2.

Найдите площадь боковой поверхности правильной восьмиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 7.

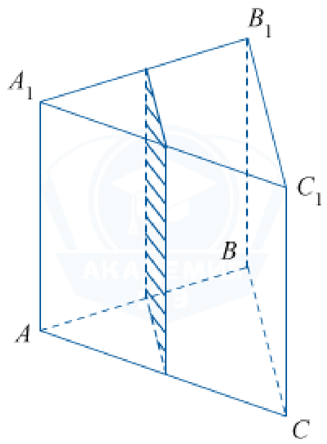


Решение

Площадь боковой поверхности призмы находим по формуле $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h = 8a \cdot h$, где $P_{осн.}$ и h — соответственно периметр основания и высота призмы, равная 7, и a — сторона правильного восьмиугольника, равная 5. Следовательно, $S_{бок.} = 8 \cdot 5 \cdot 7 = 280$.

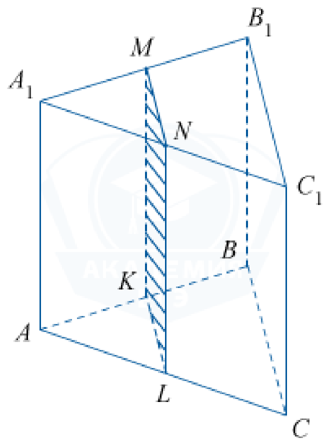
Пример 3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 4, а боковые рёбра равны 10. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.



Решение

Рассмотрим следующий рисунок.



Отрезок MN является средней линией треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому $MN = \frac{1}{2}B_1C_1 = 2$. Аналогично, $KL = \frac{1}{2}BC = 2$. Кроме того, $MK = NL = 10$. Отсюда следует, что четырёхугольник $MNLK$ является параллелограммом. Так как $MK \parallel AA_1$, то $MK \perp ABC$ и $MK \perp KL$. Следовательно, четырёхугольник $MNLK$ является прямоугольником. $S_{MNLK} = MK \cdot KL = 10 \cdot 2 = 20$.

Задания для решения в аудитории.

. 1. Основанием правильной пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной 4 см. Каждое боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол 45º. Найти площадь поверхности пирамиды.

2. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы, сторона основания которой
4 см, а боковое ребро 4 см.

3. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 8 см и наклонено к плоскости основания под углом 60º. Найти площадь поверхности пирамиды.

4. Основанием прямой призмы является треугольник, у которого стороны , равные 5 см и 6 см образуют угол в 30º , её боковое ребро равно 4 см. Найдите площадь поверхности призмы.

Домашнее задание: учебник с. 213 №4,5

Практическое занятие №48,49

Решение задач на построение сечений, вычисление длин, расстояний, углов, площадей Применение свойств симметрии при решении задач на тела вращения, комбинацию тел.

Цель: Знать свойства проекций; определение шара, сферы, их элементов;

Уметь строить сечения цилиндра, шара.

Сведения из теории:

Сечения цилиндра

Сечения цилиндра плоскостью можно рассматривать как параллельные проекции основания цилиндра на эту плоскость. Поэтому, если плоскость параллельна плоскости основания, то в сечении получается круг, равный основанию.

Если плоскость сечения составляет некоторый угол с плоскостью основания цилиндра и не пересекает основания, то в сечении будет фигура, ограниченная эллипсом.

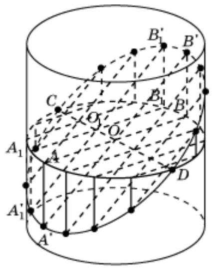


Рисунок 61. Сечение цилиндра

На рис. 61 показано построение точек эллипса, получающегося как сечение боковой поверхности цилиндра плоскостью.

Для этого зададим два сопряженных диаметра *AB* и *CD*. Через точку *A* проведем образующую и выберем на ней какую-нибудь точку *A'*, принадлежащую сечению. Прямая *A'O* пересечет образующую, проходящую через точку *B* в некоторой точке *B'*, также принадлежащую сечению. Возьмем теперь на отрезке *CD* произвольную точку и проведем через нее прямую, параллельную *A'B'*. Ее точки пересечения с образующими цилиндра будут принадлежать сечению.

Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат *Ox* и *Oy* параллельно соответствующим сторонам (рис. 62).

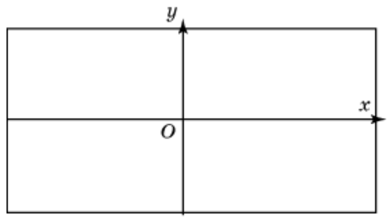


Рисунок 62.

Затем свернем этот лист в боковую поверхность прямого кругового цилиндра, радиус основания которого примем за единицу. Ось *Ox* свернется в окружность радиуса 1, а ось *Oy* станет образующей цилиндра (рис. 63).

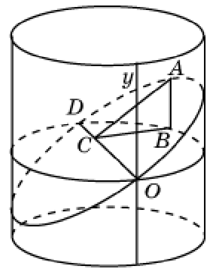


Рисунок 63.

Через диаметр *OD* полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол в 30^0. В этом случае сечением будет эллипс.

Шаром принято называть тело, ограниченное сферой, т.е. шар и сфера – это разные геометрические тела.

Сфера – это фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки на данном расстоянии.

Рисунок 65. Сфера

Поверхность шара называют сферой. Если рассечь сферу плоскостью, получим в сечении окружность. Такие окружности имеют разные радиусы: чем дальше плоскость от центра сферы, тем меньше радиус сечения. Самые большие окружности получаются при сечении сферы плоскостями, проходящими через её центр. Такими большими окружностями на земной поверхности являются экватор и меридианы. А параллели – это сечения земной поверхности плоскостями, которые параллельны экваториальной плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется *центром сферы и обычно обозначается O.*

Расстояние от точек сферы до её центра называется *радиусом сферы и обычно обозначается R. Радиусом* также называется любой отрезок, соединяющий точку сферы с её центром. *Сфера* – это граница шара. Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более чем на данное расстояние. Другими словами, *шар* – это объединение сферы и всех ее внутренних точек.

Всякое *сечение шара* плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Основные геометрические формулы

Площадь сферы:

$$S=4\pi r^2=\pi d^2.$$

Объем шара, ограниченного сферой:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

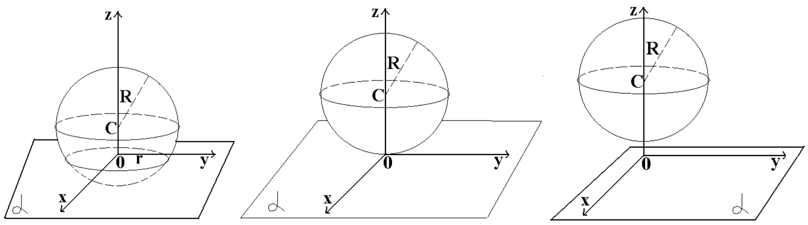


Рисунок 66. Взаимное расположение сферы и плоскости

Касательная плоскость к сфере

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

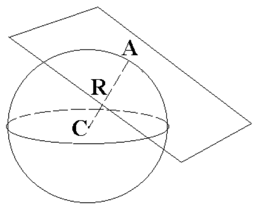


Рисунок 67. Касательная плоскость к сфере

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Сечение шара

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

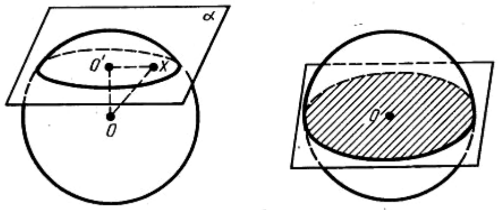


Рисунок 68. Сечение шара

Пример 1.

Два сечения шара радиуса 10 см параллельными плоскостями имеют радиусы, равные 6 см и 8 см. Найти расстояние между секущими плоскостями.

Решение:

находим расстояние каждой из параллельных плоскостей до центра шара из прямоугольных треугольников по теореме Пифагора:

$$d_1 = \sqrt{100-36} = 8 \text{ см}$$

или

$$d_2 = \sqrt{100-64} = 6 \text{ см}.$$

В зависимости от того, лежит ли центр шара между плоскостями или нет, получаем два различных ответа к задаче:

d=14 см.

Пример 2.

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга (рис. 69)?

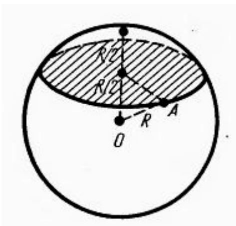


Рисунок 69.

Решение:

отношение площади круга к площади полученного сечения равно:

$$\frac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Вычислите площадь получившегося сечения.

2) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

3) Радиус шара равен 63см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.

4) Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60^0 к нему. Найти площадь сечения.

5) На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними: 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара равен 13см. Радиус шара равен 13см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

1) Нарисуйте цилиндр и плоскость, пересекающую его боковую поверхность по эллипсу.

2) Нарисуйте цилиндр и постройте несколько точек эллипса, получающегося в сечении его боковой поверхности плоскостью.

3) В основании цилиндра круг радиуса 5 см. Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если она образует с плоскостью основания угол: а) 30□; б) 45□; в) 60□.

4) Возьмем прямоугольный лист бумаги с нарисованными на нем осями координат. Свернем этот лист в боковую поверхность правильной четырехугольной призмы (рис. 64). Сторону основания призмы примем за 1 см. Через точки O и D проведем сечение плоскостью, составляющей с плоскостью основания угол 45□. Развернем лист бумаги. Выясните, какая при этом получится кривая? Что изменится, если сечение проводить под другими углами?

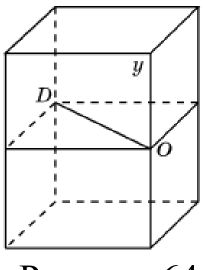


Рисунок 64.

Контрольные вопросы:

1. В каком случае сечением цилиндра плоскостью является круг?
2. Что будет сечением цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра?
3. Какую форму принимает поверхность воды в круглом наклоненном стакане?
4. Может ли в сечении цилиндра плоскостью получиться: а) круг; б) прямоугольник; в) параллелограмм; г) трапеция д) треугольник?

5. Могут ли в сечениях цилиндра плоскостью получаться фигуры, отличные от круга, прямоугольника и эллипса?
6. Дайте определение шара, сферы.
7. Запишите формулы площади сферы, объема шара.
8. Приведите примеры взаимного расположения сферы и плоскости

Домашнее задание: с.р № 21

Практическое занятие № 50,51

Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел. Вычисление объемов тел и поверхностей вращения.

Цель: Знать формулы объемов тел и поверхностей вращения, формулы для вычисления объемов подобных тел;

Уметь вычислять объемы тел и поверхностей вращения, вычислять объемы и площади подобных тел

Сведения из теории:

Объем прямоугольного параллелепипеда

$$V=abc,$$

где a, b, c – стороны параллелепипеда.

Объем куба

$$V=a^3,$$

где a – длина грани куба.

Объем призмы

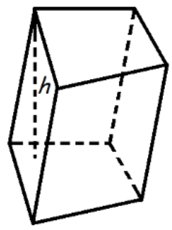


Рисунок 70. Призма

Объем призмы равен произведению площади основания призмы, на высоту:

$$V=S_o h,$$

где S_o – площадь основания призмы, h – высота призмы.

Объем параллелепипеда

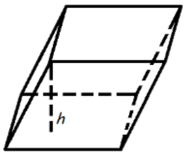


Рисунок 71. Параллелепипед

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:

$$V=S_o \cdot h,$$

где S_o – площадь основания, h – длина высоты.

Объем прямоугольного параллелепипеда

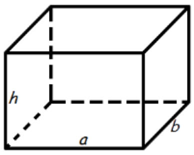


Рисунок 72. Прямоугольный параллелепипед

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты:

$$V=a \cdot b \cdot h,$$

где a – длина, b – ширина, h – высота.

Объем пирамиды

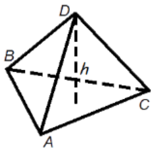


Рисунок 73. Пирамида

Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту:

$$V=\frac{1}{3}S_o h,$$

где S_o – площадь основания пирамиды, h – длина высоты пирамиды.

Объем правильного тетраэдра

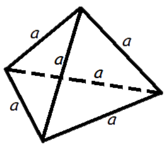


Рисунок 74. Тетраэдр

$$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12},$$

где a – длина ребра правильного тетраэдра.

Объем цилиндра

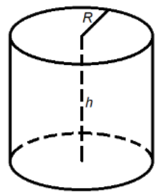


Рисунок 75. Цилиндр

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V=\pi R^2 h$$

или

$$V=S_o h,$$

где S_o – площадь основания цилиндра, R – радиус цилиндра, h – высота цилиндра, π=3,141592.

Объем конуса

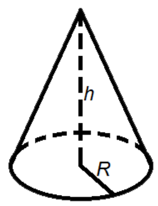


Рисунок 76. Конус

Объем конуса равен трети от произведения площади его основания на высоту:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$$

или

$$V=\frac{1}{3}S_o h,$$

где S_o – площадь основания конуса, R – радиус основания конуса, h – высота конуса, π=3,141592.

Объем шара

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R – радиус шара, π=3,141592.

Пример 1.

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

Решение:

обозначим ребро куба за x и составим уравнение:

$$(x+2)^3=x^3+98,$$
$$x^3+6x^2+12x+8=x^3+98,$$
$$6x^2+12x-90=0,$$
$$x^2+2x-15=0,$$
$$x_1=-5,\ x_2=3.$$

$x_1=-5$ – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3.

Пример 2.

Прямоугольный лист жести, имеющий 1,6 м длины и 0,8 м ширины, можно согнуть в трубку двояким образом: в первом случае длина трубки будет 1,6 м, во втором 0,8 м. Найти отношение объемов трубок.

Решение:

трубки образуют цилиндры, объем, которого вычисляется по формуле:

$$V=\pi R^2h.$$

У первого цилиндра высота будет 1,6 м, тогда радиус 0,4 м. Во втором цилиндре высота будет 0,8 м, тогда радиус 0,8 м. Вычислим отношение объемов двух цилиндров:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi 0,4^2 1,6}{\pi 0,8^2 0,8}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 1:2.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Измерения прямоугольного параллелепипеда: 15 *м*, 50 *м* и 36 *м*. Найти ребро равновеликого ему куба.

2) Измерения прямоугольного бруса: 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*. Если увеличить каждое его ребро на x *см*, то поверхность увеличится на 54 *см*^{2}. Как увеличится его объем?

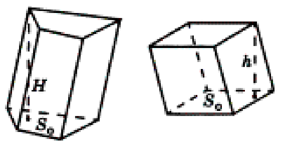
3) Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объем цилиндра.

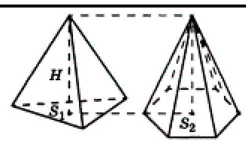
4) Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 9 *м* и 12 *м*, каждое из боковых ребер равно 12,5 *м*. Найти объем пирамиды.

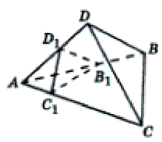
5) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны по 6 *см*, а основание 8 *см*. Боковые ребра равны между собой и равны 9 *см*. Найти объем пирамиды.

6) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 *см* и 15 *см* и образуют угол в 60^0. Меньшая диагональ параллелепипеда составляем с плоскостью основания угол 30^0. Найти объем параллелепипеда.

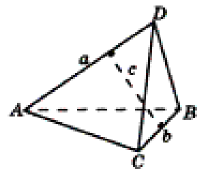
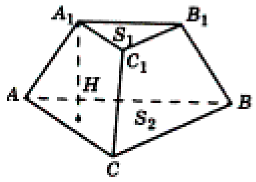
7) Высота и образующая конуса относятся как 4:5, а объем конуса равен 96π *см*^{3}. Найти полную поверхность конуса.

<table>
<tr><td colspan="2">Объемы равных тел равны
Если тело разбито на несколько тел, не имеющих общих внутренних точек, то его объем равен сумме объемов этих тел.
Отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.</td></tr>
<tr><td>Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту: V=S_oH
или
произведению площади ее перпендикулярного сечения на боковое ребро: V=S_ol.</td><td>

$V_1 = S_oH$,
$V_2 = S_oh$,
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{H}{h}$.</td></tr>
<tr><td>Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту:
$V = \frac{1}{3}S_oH$.</td><td>

$V_1 = \frac{1}{3}S_1H$,
$V_2 = \frac{1}{3}S_2H$,
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Объемы призм (пирамид), имеющих равновеликие основания, относятся как их высоты.
Объемы призм (пирамид), имеющих равные высоты, относятся как площади их оснований.</td></tr>
<tr><td>Объемы тетраэдров, имеющих общий трехгранный угол, относятся как произведения ребер, содержащих этот угол.</td><td>

$\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Объем тетраэдра может быть найден по формуле:
$V=\frac{1}{6}abc\sin\varphi$, где a и b – длины скрещивающихся ребер, c – расстояние между ними, φ – угол между ними.</td><td></td></tr>
<tr><td>Объем усеченной пирамиды
$V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Объем многогранника можно получить, разбив его на не имеющие общих внутренних точек тетраэдры (триангуляция) и суммировав их объемы.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если в многогранник можно вписать шар, то объем многогранника равен:
$V=\frac{1}{3}S_{полн.}R$,
где R – радиус вписанного шара, $S_{полн.}$ – площадь полной поверхности многогранника.</td></tr>
</table>

Пример 1.

Чашка диаметром 8 *см* и высотой 10 *см* вмещает 0.5 литра воды. Каких размеров должна быть подобная чашка, вмещающая 4 литра воды?

Решение:

поскольку чашки – подобные цилиндры, то отношение их объёмов равно отношению кубов соответствующих отрезков (в нашем случае – высот и диаметров чашек). Следовательно, высота h новой чашки находится из отношения:

$(h/10)^3$ =4/0,5, т.е. $h^3=8\cdot 10^3$, откуда h=20 см;

Аналогично, для диаметра d получим:

$(d/8)^3$ =4/0,5 , т.е. $d^3=8\cdot 8^3$, откуда d=16 см.

Пример 2.

Во сколько, примерно, раз великан ростом в 2 *м* тяжелее карлика ростом в 1 *м*?

Решение:

т.к. как фигуры человеческого тела приблизительно подобны, то при вдвое большем росте человек имеет объем не вдвое, а в 8 раз больший. Значит, наш великан весит больше карлика в 8 раз. Самый высокий великан, о котором сохранились сведения, был один житель Эльзаса ростом в 275 *см* – на целый метр выше человека среднего роста. Самый маленький карлик имел высоту меньше 40 *см*, т.е. был ниже эльзасца круглым счетом в 7 раз. Поэтому если бы на одну чашку весов поставить великана – эльзасца, то на другую надо бы для равновесия поместить $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ карлика, т.е. целую толпу.

Пример 3

Продаются два арбуза разных размеров. Один на четвертую долю шире другого, а стоит он в полтора раза дороже. Какой из них выгоднее купить?

Решение:

объем большого арбуза превышает объем меньшего в $1{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}25 = 125/64$ раза, т.е. почти вдвое. Выгоднее значит купить крупный арбуз, он дороже только в полтора раза, а съедобного вещества в нем больше раза в два.

Пример 4.

Имеются две медные кастрюли одинаковой формы и со стенками одной толщины. Первая в 8 раз вместительнее второй. Во сколько раз она тяжелее?

Решение:

обе кастрюли – тела, геометрически подобные. Если большая кастрюля в 8 раз вместительнее, то все ее линейные размеры в два раза больше: она вдвое выше и вдвое шире. Поэтому ее поверхность больше в $2 \cdot 2 = 4$ раза (поверхности подобных тел относятся, как квадраты линейных размеров). При одинаковой толщине стенок вес кастрюли зависит от величины ее поверхности.

Ответ: большая кастрюля вчетверо тяжелее меньшей кастрюли.

Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи

1) Строительный кирпич весит 4 *кг*. Сколько весит игрушечный кирпичик из того же материала, все размеры которого в 4 раза меньше?

2) Продаются две дыни одного сорта. Одна окружностью 60, другая – 50 *см*. Первая в полтора раза дороже второй. Какую дыню выгоднее купить?

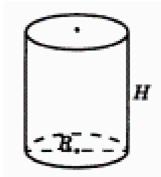
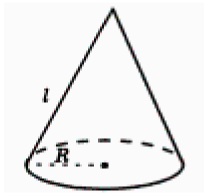
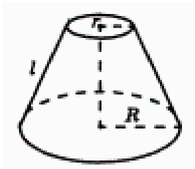
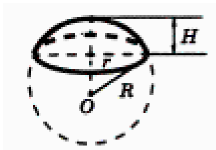
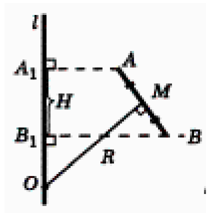
3) Мякоть вишни окружает косточку слоем такой же толщины, как и сама косточка. Будем считать, что и вишня и косточка имеют форму шариков. Можете ли вы сообразить в уме, во сколько раз объем сочной части вишни больше объема косточки?

4) Башня Эйфеля в Париже, 300 *м* высоты, сделана целиком из железа, которого пошло на нее около 8000000 *кг*. Я желаю заказать точную железную модель знаменитой башни, висящую всего 1 *кг*. Какой она будет высоты?

5) Что тяжелее: стакан сахарного песку или такой же стакан колотого сахара?

6) Почему лучина загорается скорее, чем толстое полено, от которого она отколота?

Площади тел вращения

Площадь боковой поверхности цилиндра $S=2\pi RH$ *Площадь полной поверхности цилиндра* $S=2S_{осн.}+S_{бок.}=2\pi R(R+H)$	
Площадь боковой поверхности конуса $S=\pi Rl$ *Площадь полной поверхности конуса* $S=S_{осн.}+S_{бок.}=\pi R(R+l)$	
Площадь боковой поверхности усеченного конуса $S_{бок.}=\pi(R+r)l$ *Площадь полной поверхности усеченного конуса* $S_{полн.}=\pi(R^2+r^2+(R+r)l)$	
Площадь поверхности сферы $S=4\pi R^2$ *Площадь сферической поверхности сферического сегмента* $S_{бок.}=2\pi RH$ *Площадь полной поверхности сферического сегмента* $S_{полн.}=S_{бок.}+\pi r^2=2\pi RH+\pi r^2$	
Поверхность вращения отрезка AB, не имеющего с осью *l* общих внутренних точек, равна произведению проекции этого отрезка на ось и длины окружности, радиусом которой служит отрезок серединного перпендикуляра отрезка с концами на оси и на отрезке	
Отношение поверхностей подобных тел равно квадрату коэффициента подобия	

Пример 1.

В "Путешествии Гулливера" рассказывается о лилипутах, рост которых в 12 раз меньше нормального. Если на костюм человека нормального роста идет 4 $м^2$ материала, то, сколько материала идет на костюм лилипута?

Решение:

коэффициент подобия $=12^2$, т. е. на костюм лилипута идет в 144 раза меньше. Т.о., 40 000 $см^2$: 144=280 $см^2$.

Пример 2.

Один человек на 1/4 ниже другого. Каково отношение поверхностей их тел, считая, что оба тела геометрически подобны?

Решение:

поверхность человека меньшего роста составляет $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ поверхности более высокого.

Пример 3.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 21π, а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.

Решение:

высота цилиндра равна:

$$h = \frac{S_{бок.}}{2\pi R} = \frac{21\pi}{7\pi} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 4.

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину – рис. 77). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Решение:

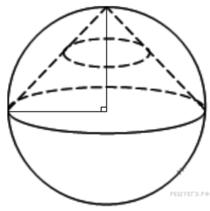


Рисунок 77.

высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$l^2 = r^2 + r^2,$$

$$l^2 = 2r^2,$$

$$l = r\sqrt{2}.$$

Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$ поэтому образующая равна:

$$28\sqrt{2}\sqrt{2} = 56.$$

Ответ: 56.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Сторона первого квадрата больше стороны второго квадрата в 2 раза (в 5 раз). Во сколько раз площадь первого квадрата больше площади второго квадрата?

2) Сторона первого квадрата составляет 1/3 (0,1) стороны второго квадрата. Какую часть площадь первого квадрата составляет от площади второго квадрата?

3) Коэффициент подобия в подобных многоугольниках равен 4 (1/5; 0,4; 2,5). Чему равно отношение их площадей?

4) Отношение площадей подобных многоугольников равно 36 (100; 0,09). Чему равно отношение сходственных сторон этих многоугольников?

5) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 18π, а диаметр основания равен 9. Найдите высоту цилиндра.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы объемов тел и поверхностей вращения.
2. Чему равны объемы равных тел?
3. Чему равно отношение объемов подобных тел?
4. Чему равно отношение объемов призм, пирамид?
5. Запишите формулы площадей поверхности цилиндра, конуса, шара.
6. Чему равно отношение поверхностей подобных тел?

Домашнее задание: выполнить оставшиеся задания для самостоятельного решения.

Практическое занятие №52

Расстояние между двумя точками. Вычисление координат середины отрезка

Цель: Знать формулы для вычисления расстояния между двумя точками; формулы для вычисления координат середины отрезка;

Уметь вычислять расстояние между двумя точками, координаты середины отрезка.

Сведения из теории:

Длиной отрезка AB называется расстояние между точками A и B при заданном масштабе (отрезке единичной длины). Длину отрезка AB будем обозначать как $|AB|$.

Расстояние между двумя точками $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ в прямоугольной системе координат выражается формулой:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Точка C называется *серединой отрезка* AB, если она лежит на отрезке AB и находится на одинаковом расстоянии от его концов, т. е. $|AC| = |CB|$.

Координаты середины отрезка на плоскости

Введем прямоугольную декартову систему координат Oxy на плоскости. Пусть нам даны две точки $A(x_A;\, y_A)$ и $B(x_B;\, y_B)$ и известно, что точка C – середина отрезка AB. Найдем координаты x_C и y_C точки C.

Рассмотрим случай, когда точки A и B не совпадают и не лежат одновременно на одной из координатных осей или на прямой, перпендикулярной одной из координатных осей.

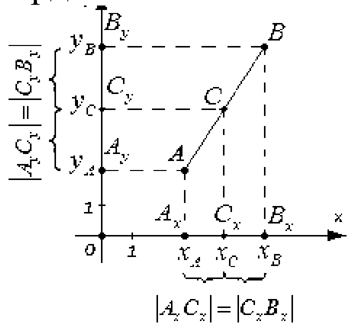


Рисунок 78. Координаты середины отрезка

По построению:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Т. о., середина отрезка AB на плоскости с концами в точках $A(x_A;\, y_A)$ и $B(x_B;\, y_B)$ имеет координаты $\left(\frac{x_A + x_B}{2},\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Пример 1.

На плоскости заданы координаты двух точек A(-7; 3), B(2; 4). Найдите координаты середины отрезка AB.

Решение:

пусть точка C – середина отрезка AB. Ее координаты равны полусуммам соответствующих координат точек A и B:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-7 + 2}{2} = -\frac{5}{2},$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}.$$

Т. о., середина отрезка AB имеет координаты $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)$.

Часто с нахождением координат середины отрезка связаны задачи, в которых фигурирует термин «медиана».

Пример2.

Найдите длину медианы AM в треугольнике ABC, если известны координаты его вершин $A(-1; 0)$, $B(3; 2)$, $C(9; -8)$.

Решение:

т. к. AM – медиана, то точка M является серединой стороны BC. Найдем координаты середины этого отрезка по известным координатам его концов:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+9}{2} = 6,$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2-8}{2} - 3.$$

Т. о., $M(6; -3)$.

Осталось воспользоваться формулой для вычисления расстояния между точками A и M:

$$|AM| = \sqrt{(6-(-1))^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{58}.$$

Существуют различные задачи, в которых известны координаты середины отрезка и одного из его концов, а требуется найти координаты другого конца. Рассмотрим решение одной из них.

Пример 3.

В прямоугольной системе координат трехмерного пространства дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что $C_1(1; 1; 0)$, а М$(4; 2; -4)$ – середина диагонали BD_1. Найдите координаты точки A.

Решение:

диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке, и эта точка является серединой каждой из этих диагоналей. Таким образом, мы можем утверждать, что точка M является серединой отрезка AC_1 . Из формул для нахождения координат середины отрезка имеем:

$$x_M = \frac{x_A + x_{C_1}}{2} \Rightarrow x_A = 2x_M - x_{C_1} = 8 - 1 = 7,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{C_1}}{2} \Rightarrow y_A = 2y_M - y_{C_1} = 4 - 1 = 3,$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{C_1}}{2} \Rightarrow z_A = 2z_M - z_{C_1} = -8 - 0 = -8.$$

.

Итак, точка A имеет координаты $(7; 3; -8)$.

Пример 4.

Найти на оси Оy точку, которая находится на одинаковом расстоянии от точек $A(6; 12)$ и $B(-8; 10)$.

Решение:

пусть координаты нужной по условию задачи точки, лежащей на оси Оy, будут $O_1(0;\ b)$ (у точки, лежащей на оси Оy, абсцисса равна нулю). Из условия следует, что $O_1A=O_1B$.

По формуле

$$d=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2},$$

находим:

$$O_1A=\sqrt{(0-6)^2+(b-12)^2}=\sqrt{36+(b-12)^2},$$

$$O_1B=\sqrt{+8^2+(b-10)^2}=\sqrt{64+(b-10)^2}.$$

Имеем уравнение

$$\sqrt{36+(b-12)^2}=\sqrt{64+(b-10)^2}.$$

Выполняя элементарные преобразования при решении иррациональных уравнений, получим b=4.

Необходимая по условию задачи точка $O_1(0;\ 4)$ – рис. 80.

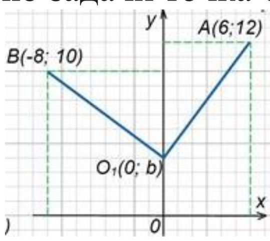


Рисунок 80.

Деление отрезка в данном отношении

Координаты x, y, z точки M, которая делит отрезок M_1M_2, ограниченный точками $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, в отношении λ, определяется по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Пример 5.

Даны концы отрезка AB: $A(-2;\ 5)$ и $B(4;\ 17)$. На этом отрезке расположена точка C, расстояние от которой до точки A в два раза больше расстояния от точки B. Вычислить координаты точки C.

Решение:

по условию задачи $AC=2BC$, тогда $\lambda=2$.

По формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

вычислим координаты точки C:

$$x = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = \frac{-2 + 8}{3} = 2,$$

$$y = \frac{5 + 2 \cdot 17}{1 + 2} = \frac{5 + 34}{3} 13.$$

Т.о., $C(2;\ 13)$.

Пример 6.

Доказать, что треугольник ABC: $A(-3;\ -3)$, $B(-1;\ 3)$, $C(11;\ -1)$ – прямоугольный.

Решение:

вычислим длины сторон треугольника по формуле:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

$$AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$

$$BC = \sqrt{(11+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$

$$AC = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Т.к. $AB^2=40$, $BC^2=160$, $AC^2=200$, то $AB^2+BC^2=AC^2$.

Т.о., сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Из этого следует, что треугольник ABC прямоугольный и сторона AC является его гипотенузой.

Задания для самостоятельного решения:

1) Доказать, что треугольник с вершинами $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(0;\ -2;\ 2)$, $C(-3;\ 2;\ 1)$ равнобедренный.

2) На оси абсцисс найти точку, расстояние от которой до точки $A(-3;\ 4;\ 8)$ равно 12.

3) На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(1;\ -3;\ 7)$ и $B(5;\ 7;\ -5)$.

4) Даны вершины $A(2;\ -1;\ 4)$, $B(3;\ 2;\ -6)$, $C(-5;\ 0;\ 2)$ треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

5) Вычислите периметр треугольника ABC, если $A(4;\ 0)$, $B(12;\ -2)$, $C(5;\ -9)$.

6) Вычислите длину медианы AM треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(0;\ 1)$, $B(1;\ -4)$, $C(5;\ 2)$.

7) Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный и вычислите его площадь, если вершины которого имеют координаты $A(-4;\ 1)$, $B(-2;\ 4)$, $C(0;\ 1)$.

8) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, и вычислите его диагонали, если $A(1;\ 1)$, $B(6;\ 1)$, $C(7;\ 4)$, $D(2;\ 4)$.

9) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником, и вычислите его площадь, если $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; -3)$, $D(-3; -3)$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу для вычисления координат середины отрезка.
2. Запишите формулу для вычисления расстояния между двумя точками.

Домашнее задание: учебник с. 82 № 1-9

Практическое занятие №53

Действия с векторами. Действия с векторами заданными координатами .

Цель: Знать правила сложения векторов, правило умножения векторов;

Уметь строить сумму векторов по правилу треугольника, параллелограмма; вычислять координаты суммы векторов, строить произведение вектора на число; вычислять координаты вектора $k\vec{a}$

Сведения из теории:

Линейные операции над векторами

Суммой двух векторов $\vec{a}+\vec{b}$ называется вектор, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (*правило треугольника*).

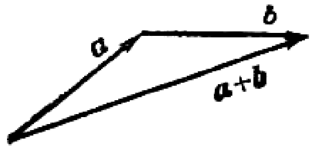


Рисунок 81. Правило треугольника

Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) *правилом параллелограмма*: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отсюда сразу следует, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

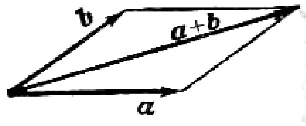


Рисунок 82. Правило параллелограмма

Сложение многих векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника, построим сумму четырех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

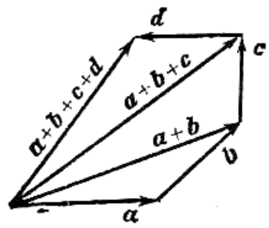


Рисунок 83. Правило многоугольника

Разность двух векторов $\vec{a}-\vec{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет вектор $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу, то разность их есть вектор, идущий из конца $\vec{b}$ («вычитаемого») к концу $\vec{a}$ («уменьшаемого»).

Два вектора равной длины, лежащие на одной прямой и направленные в противоположные стороны, называются *взаимно обратными*: если один из них обозначен символом $\vec{a}$, то другой обозначается символом $-\vec{a}$. Легко видеть, что $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Т. о., построение разности равносильно прибавлению к «уменьшаемому» вектора, обратного «вычитаемого».

Три вектора в пространстве можно складывать по *правилу параллелепипеда*: если на трех векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, как на ребрах, построить параллелепипед, то его диагональ, выходящая из общего начала данных векторов, и будет их суммой $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$:

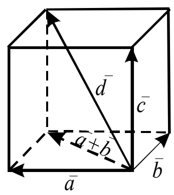


Рисунок 84. Правило параллелепипеда

Задания для самостоятельного решения:

1) По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $\vec{a}+\vec{b}$, 2) $\vec{a}-\vec{b}$, 3) $-\vec{a}+\vec{b}$, 4) $-\vec{a}-\vec{b}$.

При сложении векторов складываются их соответствующие координаты, при вычитании вычитаются соответствующие координаты, т.е. если даны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$ и

$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{d}=\vec{a}$ - $\vec{b}$, то координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ вычисляются по формулам:

$$\vec{c}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2),$$
$$\vec{d}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2).$$

Пример 1.

Вычислить координаты векторов $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{d}=\vec{a}$ - $\vec{b}$, если $\vec{a}$ =(-3; 5; 1), $\vec{b}$ =(4; -2; 8).

Решение:

по формулам

$$\vec{c}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2),$$
$$\vec{d}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2),$$

имеем

$$\vec{c}=(-3+4;\ 5+(-2);\ 1+8)=(1;\ 3;\ 9),$$
$$\vec{d}=(-3-4;\ 5-(-2);\ 1-8)=(-7;\ 7;\ -7).$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислить координаты векторов $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{h}$; $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{h}$, если $\vec{a}$ =(4; -3; 10), $\vec{b}$ =(-4; 12; -1), $\vec{h}$ =(3; -7; -11).

Произведение $k\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор, модуль которого равен произведению модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа k ; он параллелен вектору $\vec{a}$ или лежит с ним на одной прямой и направлен так же, как вектор $\vec{a}$, если k – число положительное, и противоположно вектору $\vec{a}$, если k – число отрицательное.

Если k =0, для любого вектора $\vec{a}$ произведение $k\vec{a}$ равно нуль-вектору: $0 \cdot \vec{a}=\vec{0}$.

Если k =1, то $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Если k = –1, то (-1)· $\vec{a}$ =- $\vec{a}$ – вектор, противоположный вектору $\vec{a}$.

Пример 1.

Даны векторы, совпадающие со сторонами треугольника *ABC*: $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{AO}$, где *O* – точка пересечения медиан треугольника. Выполните рисунок.

Решение:

известно, что точка O пересечения медиан треугольника делит отрезок медианы в отношении 2:1, считая от вершины. Поэтому $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, где точка D – середина стороны CB.

Но вектор $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\vec{a}$; $\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{2}\vec{a}$.

В треугольнике CAD вектор $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.

Искомый вектор $\overrightarrow{AO}=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

Задания для самостоятельного решения:

1) По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{b}$, $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

2) В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$. Построить каждый из следующих векторов: $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$, $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$, $\frac{-\vec{m}+\vec{n}}{2}$, $-\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$.

3) Точка O является точкой пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$.

4) В правильном пятиугольнике $ABCDE$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{p}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{q}$, $\overrightarrow{EA}=\vec{r}$. Построить векторы: $\vec{m}-\vec{n}+\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{m}+2\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}$, $2\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}-3\vec{p}-\vec{q}+2\vec{r}$.

5) В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{n}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{p}$ (рис. 85)

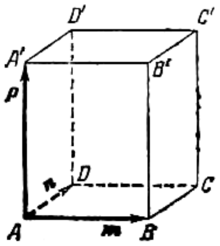


Рисунок 85.

6) Построить каждый из следующих векторов: $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$, $\vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$, $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p}$, $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правило умножения вектора на число.
2. Сформулируйте правило треугольника для сложения векторов.
3. Сформулируйте правило параллелограмма для сложения векторов.
4. Запишите формулы сложения (разности) векторов в координатах.

Домашнее задание: с.р. №24 вариант 1 № 1-7

Скалярное произведение векторов

Цель: Знать формулы для вычисления скалярного произведения векторов;

Уметь вычислять скалярное произведение векторов, угол между векторами.

Сведения из теории:

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\overrightarrow{ab}$ (порядок записи сомножителей безразличен, то есть $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ba}$).

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначить через φ, то их скалярное произведение можно выразить формулой:

$$\overrightarrow{ab} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi .$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно выразить также формулой:

$$\overrightarrow{ab} = |\vec{a}|\, np_{\vec{a}}\vec{b}$$

или

$$\overrightarrow{ab} = |\vec{b}|\, np_{\vec{b}}\vec{a} .$$

Из формулы $\overrightarrow{ab} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$ следует, что $\overrightarrow{ab} > 0$, если φ – острый угол, $\overrightarrow{ab} < 0$, если φ – тупой угол; $\overrightarrow{ab} = 0$ в том и только в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора и обозначается символом $\vec{a}^{\,2}$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Угол φ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ задается формулой $\cos\phi = \dfrac{\overrightarrow{ab}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, или в координатах

$$\cos\phi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Проекция произвольного вектора S=(x, y, z) на какую-нибудь ось u определяется формулой:

$$np_u\vec{S} = \vec{S}\vec{e},$$

где $\vec{e}$ – единичный вектор, направленный по оси u.

Если даны α, β, γ, которые оси u составляют соответствующие углы с координатными осями, то $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и для вычисления вектора $\vec{S}$ может служить формула:

$$np_u\vec{S} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Пример 1.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: $\overrightarrow{ab}$, $|\vec{a}|^2$, $|\vec{b}|^2$, $(\vec{a}+\vec{b})^2$, $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$, $(\vec{a}-\vec{b})^2$, $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

Решение:

из формулы $\cos\phi = \dfrac{\overrightarrow{ab}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, выразим $\overrightarrow{ab} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, тогда

$\overrightarrow{ab} = 12\cos\dfrac{2\pi}{3} = 12\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -6$;

т.к. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то $|\vec{a}|^2 = 3^2 = 9$, $|\vec{b}|^2 = 4^2 = 16$;

по формуле сокращенного умножения квадрата суммы, имеем

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=9+2(-6)+16=13;$$

аналогично

$$\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=9\vec{a}^2+12\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^2=81+12(-6)+64=73;$$

по формуле сокращенного умножения квадрата разности, имеем

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=9-2(-6)+16=37;$$

раскроем скобки

$$\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=3\vec{a}^2+6\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{b}-4\vec{b}^2=3\vec{a}^2+4\vec{a}\vec{b}-4\vec{b}^2=27+4(-6)-64=-61.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\varphi=\frac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$, вычислить: $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{b}+3\vec{c}\right)$, $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2$, $\left(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right)^2$.

2) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60^0. Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=6$, определить модуль вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

3) Даны векторы $\vec{a}=(4;-2;4)$ и $\vec{b}=(6;-3;2)$. Вычислить: $\overrightarrow{ab}$, $\sqrt{\vec{a}^2}$, $\sqrt{\vec{b}^2}$, $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$, $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$.

4) Даны точки *A*(-1; 3; -7), *B*(2; -1; 5), *C*(0; 1; -5). Вычислить: $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$, $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$, $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы для вычисления скалярного произведения векторов.
2. Запишите формулу для вычисления угла между векторами.

Домашнее задание: с.р. №24 вариант 1 № 8-10

Практическое занятие №54

Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Цель: Знать, что называется числовой характеристикой проекции вектора на ось; векторы и простейшие действия над ними;

Уметь вычислять числовую проекцию вектора на ось; применять правила действия над векторами при решении математических и прикладных задач

Сведения из теории:

Числовая проекция вектора на ось – это число, которое равно произведению длины данного вектора на косинус угла между этим вектором и вектором, определяющим направление оси.

Числовую проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось L обозначают как $np_L \overrightarrow{AB}$, а числовую проекцию вектора $\vec{a}$ на ось, определяемую вектором $\vec{b}$ – $np_{\bar{b}} \vec{a}$.

В этих обозначениях определение числовой проекции вектора $\vec{a}$ на прямую, направленную как вектор $\vec{b}$, примет вид $np_{\bar{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Эта формула применяется, когда известны длина вектора $\vec{a}$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 1.

Вычислите числовую проекцию вектора $\vec{a}$ на прямую, направленную как вектор $\vec{b}$, если длина вектора $\vec{a}$ равна 8, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60^0.

Решение:

по формуле $np_{\bar{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$, имеем

$$np_{\bar{b}} \vec{a} = 8 \cos 60^0 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Известно, что $\cos \phi = \dfrac{\overrightarrow{ab}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Тогда формула $np_{\bar{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$, позволяющая найти числовую проекцию вектора $\vec{a}$ на прямую, направленную как вектор $\vec{b}$, примет вид $np_{\bar{b}} \vec{a} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$.

Т. о. числовая проекция вектора $\vec{a}$ на ось, направление которой совпадает с направлением вектора $\vec{b}$, – это отношение скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к длине вектора $\vec{b}$.

Полученную формулу вида $np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$ удобно применять для нахождения числовой проекции вектора $\vec{a}$ на прямую, направление которой совпадает с направлением вектора $\vec{b}$, когда известны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 2.

Известно, что вектор $\vec{b}=(-3,\ 4)$ задает направление оси *L*. Найдите числовую проекцию вектора $\vec{a}=(1,\ 7)$ на ось *L*.

Решение:

запишем формулу $np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$ в координатной форме, тогда $np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}=\frac{x_a x_b+y_a y_b}{\sqrt{x_b^2+y_b^2}}$. Используем ее для нахождения требуемой числовой проекции вектора $\vec{a}$ на ось *L*:

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}=\frac{1\cdot(-3)+7\cdot 4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{25}{\sqrt{25}}=5.$$

Пример 3.

Относительно прямоугольной системы координат *Oxyz* в трехмерном пространстве заданы два вектора $\vec{a}=(-2;\ 3;\ 1)$ и $\vec{b}=(3;\ -2;\ 6)$. Найдите числовую проекцию вектора $\vec{a}$ на ось *L*, направление которой совпадает с направлением вектора $\vec{b}$.

Решение:

по координатам векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычислим скалярное произведение этих векторов: $\vec{a}\vec{b}=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b$.

Длина вектора $\vec{b}$ по его координатам вычисляется по следующей формуле $|\vec{b}|=\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}$. Тогда формула для определения числовой проекции вектора $\vec{a}$ на ось *L* в координатах имеет вид

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}=\frac{x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b}{\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}.$$

Подставим в полученную формулу заданные координаты:

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(-2)\cdot 3+3\cdot(-2)+1\cdot 6}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{-6}{\sqrt{49}}=-\frac{6}{7}.$$

Для проекции выполняются следующие теоремы:

1. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой:

$\vec{a}=\vec{b}$, тогда $np_L\vec{a}=np_L\vec{b}$.

2. Проекция суммы двух векторов на произвольну4ю ось равна сумме проекций этих векторов:

$$np_L(\vec{a}+\vec{b})=np_L\vec{a}+np_L\vec{b}.$$

3. Проекция произведения скаляра на вектор на произвольную ось равна произведению этого скаляра на проекцию вектора:

$$np_L(k\vec{a})=knp_L\vec{a}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1) Докажите, что для любых точек *A, B, C, D* справедливо равенство: $np_L\overrightarrow{AB}+np_L\overrightarrow{BC}+np_L\overrightarrow{CD}=np_L\overrightarrow{AD}$.

2) Дано: $np_L\vec{a}=-1$, $np_L\vec{b}=3$. Вычислите: $np_L(\vec{a}+2\vec{b})$; $np_L(-\vec{a}+2\vec{b})$, $np_L(3\vec{a}-2\vec{b})$, $np_L(\vec{a}-\vec{b})$.

3) Вектор $\vec{a}$ образует с осью О*x* угол α и имеет длину $|\vec{a}|$. Определите координаты вектора $\vec{a}$ если:

а) α=90^0, $|\vec{a}|=2$; *б*) α=180^0, $|\vec{a}|=\frac{3}{2}$; *в*) α=-90^0, $|\vec{a}|=\frac{1}{2}$; *г*) α=45^0, $|\vec{a}|=1$.

Рассмотрим задачи трёх типов, которые целесообразно решать с помощью векторов.

Первый тип: задачи, связанные с доказательством параллельности прямых и отрезков, прямых и плоскости

Пример.

Доказать что вектор, концами которого являются середины двух противолежащих сторон четырехугольника, равен половине векторной суммы двух других противолежащих сторон.

Решение:

пусть *ABCD* – четырехугольник, *M* – середина *AB, N*– середина *CD*. Тогда необходимо доказать, что $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$.

Пусть *O* – произвольная точка плоскости, соединим ее с вершинами и серединами двух сторон четырехугольника, выполним рисунок (рис. 86):

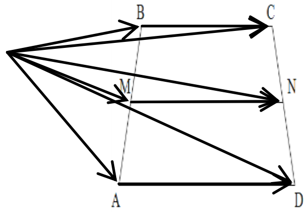


Рисунок 86.

По правилу деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

По правилу треугольника, имеем:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

Задача для самостоятельного решения №1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Второй тип: задачи, в которых доказывается, что некоторая точка делит отрезок в заданном отношении

Пример .

На стороне *AC* треугольника *ABC* взята точка *M* так, что $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|$, а на продолжении стороны *BC* такая точка *N* что $\left|\overrightarrow{BN}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$. В каком отношении точка *P* пересечения *AB* и *MN* делит каждый из этих отрезков.

Решение:

выполним рисунок (рис. 87), соответствующий условию задачи:

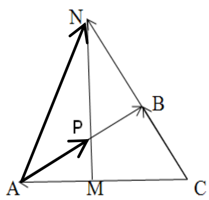


Рисунок 87.

Пусть и $\frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x, \ \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = y$.

Выберем базисные векторы $\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \ \overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

Разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базисным двумя различными способами:

а) $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = y$, тогда $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{y}{y+1}$, т.к. векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены, то

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1}\overrightarrow{AB} = \frac{y}{y+1}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{y}{y+1}(\vec{a} - \vec{b}).$$

Т.е.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1}\vec{a} - \frac{y}{y+1}\vec{b}.$$

б) $\dfrac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x$, тогда , $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{x+1}\overrightarrow{AM} + \dfrac{x}{x+1}\overrightarrow{AN}$.

Но, по условию задачи $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{4}\left|\vec{b}\right|$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, поэтому

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1}\left(-\frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{x}{x+1}(2\vec{a} - \vec{b}).$$

В полученном выражении раскроем скобки, упростим, тогда получим:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2x}{x+1}\vec{a} - \frac{1+4x}{4(x+1)}\vec{b}.$$

Учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{2x}{x+1}, \\ \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{1+4x}{4(x+1)} \end{cases}.$$

Решая систему любым известным способом (сложением, подстановкой), получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}, \\ y = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, точка *P* делит отрезок *AB* в отношении 2:3 и отрезок *MN* в отношении 1:4.

Задача для самостоятельного решения №2. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки соответственно *H* и *M* так, что отрезки *MH* и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков (воспользуйтесь предложенным рис. 88).

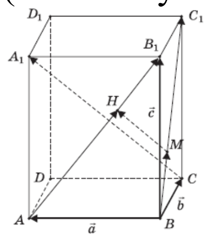


Рисунок 88.

Третий тип: задачи на доказательство принадлежности трех и более точек одной прямой

Пример

Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC четырехугольника $ABCD$, причем AM:MD=BN:NC=3:4. Докажите, что середины отрезков AB, MN и CD лежат на одной прямой.

Решение:

выполним рисунок (рис. 89), соответствующий условию задачи

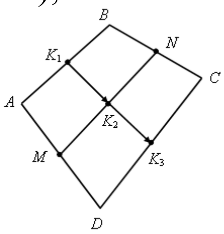


Рисунок 89.

Пусть K_1 – середина AB, K_2 – середина MN, K_3 – середина CD. Используя формулы деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}),$$

$$\overrightarrow{K_1K_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Из условия AM:MD=BN:NC=3:4 следует, что

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD},\ \ \overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}.$$

Т.о., векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки K_1, K_2 и K_3 лежат на одной прямой.

Задача для самостоятельного решения №3. В пространстве расположены отрезки AB и A_1B_1. Точка M есть середина отрезка AB, точка

M_1 – середина A_1B_1. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, и MM_1 расположены на одной прямой.

Контрольные вопросы:

1. Приведите примеры задач, которые целесообразно решать с помощью векторов.
2. Что называется числовой характеристикой проекции вектора на ось?

Домашнее задание: учебник с. 83-87.

Критерии оценки

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой и учебником.

Выявление полноты, прочности усвоения обучающимися теории и умение применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

Учитывается показанные студентами знания и умения. Оценка зависит от наличия и характера погрешностей, допущенных обучающимися. Среди погрешностей выделяются ошибки и недочеты.

Ошибкой считается погрешность, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями и (или) умениями, указанными в программе.

Недочетами считаются погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного

Оценка ответа учащегося при устном и письменном опросах, проводится по пятибалльной системе.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком уровне владения информационными технологиями учащимся, за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные студенту дополнительно после выполнения им основных заданий.

Оценка устных ответов.

"Отлично" - если студент глубоко и прочно усвоил программный материал Исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, не затрудняется с ответом при видоизменении задания, свободно справляется с задачами и практическими заданиями, правильно обосновывает принятые решения, умеет самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок.

"Хорошо" - если твердо студент знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, может правильно применять теоретические положения и владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических заданий.

"Удовлетворительно" - если студент усвоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении программного материала и испытывает затруднения в выполнении практических заданий. "Неудовлетворительно" - если студент не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические задания, задачи.

Критерии оценки письменных работ:

«5»-Работа должна быть выполнена правильно и в полном объёме , 90-100% выполнения.

«4»-Работа выполнена правильно, но имеются недочеты, процент выполнения 75-89%.

«3»- Работа выполнена правильно, но имеются ошибки, процент выполнения 59-74%.

Литература

1) Афанасьев О.Н., Бродский Я.С., Павлов А.Л. Математика для техникумов. – М.: Наука, 1991.

2) Афанасьев О.Н. Математика для техникумов. – М., Издательский центр «Академия», 2003.

3) Богомолов В.С. Основы высшей математики. – М., Издательский центр «Академия», 2007.

4) Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М.: Высшая школа, 2004.

5) Колмогоров А.Н., Абрамов А.Н., Дудницын Ю.П. и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.: ил.

6) Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш.шк., 1991. – 480 с.: ил.

7) Луканкин Г.Л. Высшая математика для экономистов: курс лекций: учебное пособие для вузов / Г.Л. Луканкин, А.Г. Луканкин. – 2-е изд., стереотип. – М.: Издательство «Экзамен», 2009. – 285 с.

8) Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1987 – Часть 1.

9) Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1987 – Часть 2.

10) Математика для техникумов. Геометрия. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1989.

11) Математика: Учеб. для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования/Игорь Дмитриевич Пехлецкий. – 2-е изд., стереотип. – М., Издательский центр «Академия», 2003. – 304 с.

12) Михеев В.С. Краткий справочник по математике. – Красногорск, 1996.

13) Пехлецкий И.Д. Математика – М., Издательский центр «Академия», 2001.

14) Подольский В.А. и др. Сборник задач по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М., Издательский центр «Академия», 2004.

15) Сергиенко Л.Ю., Самойленко П.И. Планирование учебного процесса по математике: Учеб. – метод. пособие для преподавателей сред. спец. учеб. заведений. – М.: высш. шк., 1987. – 424 с.: ил.

16) Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика: учебник для СПО, 2012, http://www.sprinter.ru/books/matematika-uchebnik-7-e-izd-ster-grigorev-2061370.html

17) http://festival.1september.ru/articles/538170/

Министерство сельского хозяйства Ставропольского края

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Методические рекомендации

ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН 01 Элементы высшей математики

АННОТАЦИЯ

Данная методическая разработка посвящена актуальной теме организации самостоятельной работы студентов СПО, методам организации, мотивации деятельности студентов, описывается личный опыт. Рассматривается роль самостоятельной работы в обучении высококвалифицированного специалиста. Ключевые слова: внеаудиторная самостоятельная работа студента СПО, условия организации, опыт организации, методические рекомендации.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данная методическая разработка разработана с целью помочь правильно организовать самостоятельную внеаудиторную работу по математике студентов СПО. Она включает в себя методические рекомендации по выполнению различных видов самостоятельной внеаудиторной работы и комплекс самостоятельных работ по основным темам дисциплины «Математика».

Методические указания по организации самостоятельной внеаудиторной работы студентов составлены в соответствии с рабочей программой, разработанной на основе Федерального государственного образовательного стандарта.

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ О САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа по математике – это педагогически управляемый процесс самостоятельной деятельности студентов, обеспечивающий реализацию целей и задач по овладению необходимым объемом знаний, умений и навыков, опыта творческой работы и развитию профессиональных интеллектуально-волевых, нравственных качеств будущего специалиста.

1.1 Цель самостоятельной работы

Целью самостоятельной работы студентов является:

- обеспечение профессиональной подготовки выпускника в соответствии с ФГОС СПО;
- формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС СПО;
- формирование и развитие профессиональных компетенций, соответствующих основным видам профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных знаний и практических умений и навыков студентов;
- углубления и расширения теоретических и практических знаний;
- формирования умений использовать специальную, справочную литературу, Интернет;
- развития познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских знаний.

1.2 Задачи самостоятельной работы

Задачами, реализуемыми в ходе проведения внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся, в образовательной среде являются:

- систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления: способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;
- развитие исследовательских умений.

2 КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

2.1 Формы контроля выполнения самостоятельной работы

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы может осуществляться в пределах аудиторного времени, отведенного на обязательные учебные занятия по данному курсу.

Результативность самостоятельной работы студентов оценивается посредством следующих форм контроля знаний и умений:

- текущего контроля успеваемости, то есть регулярного отслеживания уровня усвоения материала на лекциях, практических занятиях;
- путем проверки рефератов, контрольных работ, домашних, индивидуальных заданий и других видов работ с подведением итогов в течение учебного семестра;
- промежуточной аттестации.

Самостоятельные работы являются важным средством проверки уровня знаний, умений и навыков.

Массовой формой контроля является экзамен.

2.2 Критерии оценивания

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов, рассматриваемой в комплексе с другими составными элементами учебной нагрузки, предусмотренной программой данного курса, являются:

- уровень освоения студентами учебного материала;
- уровень сформированности умений студента использовать теоретические знания при выполнении практических и прикладных задач;
- умение студента использовать теоретические знания при решении задач;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- уровень сформированности умений студента активно использовать печатные и электронные образовательные ресурсы, находить требующуюся информацию, изучать ее и применять на практике;
- уровень сформированности общих и профессиональных компетенций.

Контроль результатов самостоятельной работы обучающихся может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия и самостоятельную работу по дисциплине «Математика» и может проходить в письменной, устной или смешанной форме с предоставлением изделия или продукта творческой деятельности.

В методических рекомендациях предлагается перечень внеаудиторных самостоятельных работ, которые вы должны выполнить в течение учебного года.

При выполнении внеаудиторных самостоятельных работ студент может обращаться к преподавателю для получения консультации.

3.3 Указания к выполнению внеаудиторной самостоятельной работы

Внеаудиторную самостоятельную работу нужно выполнять в отдельной тетради в клетку, чернилами черного или синего цвета. Необходимо оставлять поля шириной 5 клеточек для замечаний преподавателя.

Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».

Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения внеаудиторной самостоятельной работы:
«5» - 100 – 90% правильных ответов

«4» - 89 - 80% правильных ответов

«3» - 79 – 70% правильных ответов

«2» - 69% и менее правильных

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

3.1 Методические рекомендации по составлению конспекта

Внимательно прочитайте текст.

Уточните в справочной литературе непонятные слова.

При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.

Выделите главное, составьте план.

Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.

Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана.

При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами.

Записи следует вести четко, ясно.

Грамотно записывайте цитаты.

Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

Критерии оценки составления опорного конспекта

- соответствие содержания теме;
- правильная структурированность информации;
- наличие логической связи изложенной информации;
- соответствие оформления требованиям;
- аккуратность и грамотность изложения;
- работа сдана в срок.

3.2 Методические рекомендации по самостоятельному решению задач.

При самостоятельном решении поставленных задач нужно обосновывать каждый этап действий, исходя из теоретических положений курса.

Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный.

Полезно до начала решения поставленных задач составить краткий план решения проблемы (задачи).

Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками, инструкциями по выполнению.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом.

Полученный результат следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи.

3.3 Методические рекомендации к написанию реферата

Согласно рабочей программе по дисциплине, на подготовку реферата отводится 2 часа внеаудиторной самостоятельной работы студента.

Одной из основных целей проведения этой формы самостоятельной работы является формирование умений поиска и использования информации; обобщение, систематизация, закрепление и расширение знаний и умений студентов, полученных не только за период изучения данного курса, но и предыдущих ступеней и уровней познания дисциплин математического и общего естественнонаучного цикла.

Студенческий реферат – это творческая работа студента, в которой на основании краткого письменного изложения и оценки различных источников проводится самостоятельное исследование определенной темы, проблемы.

2. Реферат отличают следующие признаки:

а) реферат не копирует дословно содержание первоисточника, а представляет собой новый вторичный текст, создаваемый в результате систематизации и обобщения материал первоисточника, его аналитико-синтетической переработки («аналитико-синтетическая переработка первичного документа с целью создания вторичного»).

б) будучи вторичным текстом, реферат создается со всеми требованиями, предъявляемыми к связному высказыванию, то есть ему должны быть присущи следующие черты: целостность, связность, структурная упорядоченность и завершенность.

в) в реферат должно быть включено самостоятельное мини-исследование, осуществляемое на материале или художественных текстов, или источников по теории и истории литературы.

Реферат выполняется и сдается студентом в установленные преподавателем сроки.

Оформление реферата должно удовлетворять следующим требованиям:

- работа выполняется печатным способом с использованием компьютера и принтера на одной стороне листа формата А4

- реферат (доклад) должен быть оформлен в MS Word, шрифт текста Times New Roman, 14 пт., интервал 1. В работе не допускается использование шрифта разных гарнитур.

- страницы имеют следующие поля: левое 25 мм, правое - 10 мм, верхнее и нижнее - 20 мм. Абзацный отступ одинаковый по всему тексту и равен 5 знакам.

Структура реферата:

1. Титульный лист (приложение 1).
2. Содержание (приложение 2).
3. Введение.
4. Основная часть реферата.
5. Текст работы (главы, части и т.п.).
6. Заключение.
7. Список используемой литературы (приложение 3).
8. Приложения.

Если возникнут затруднения в процессе работы, обратитесь к преподавателю.

Критерии оценки:

Вы правильно выполнили задание. Работа выполнена аккуратно – 5(отлично).

Вы не смогли выполнить 2-3 элемента. Работа выполнена аккуратно-4(хорошо).

Работа выполнена неаккуратно, технологически неправильно – 3(удовлетворительно).

Все структурные элементы работы начинаются с нового листа.

Заголовки располагаются посередине страницы и указываются прописными буквами без кавычек и точки в конце, выделяются полужирным шрифтом. Переносить слова в заголовке не допускается. Заголовки оглавления должны точно повторять заголовки в тексте.

Иллюстрации, используемые в тексте работы, размещаются после первой ссылки на них и сопровождаются словами «Рисунок», «Таблица», «Схема», «График» и т.п. Все иллюстрации нумеруются сквозной нумерацией арабскими цифрами в порядке упоминания в тексте (для каждого вида иллюстраций своя нумерация).

Приложения должны иметь тематические заголовки и нумеруются арабскими цифрами. Перечень приложений указывается в оглавлении.

Все страницы работы, включая приложения, нумеруются по порядку. Первой страницей считается титульный лист, на нем номер не ставится. Порядковый номер печатается вверху страницы по центру.

Библиографические ссылки в виде подстрочных примечаний оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008. Нумеруются арабскими цифрами в пределах страницы, т.е. с каждой следующей страницы нумерация подстрочных примечаний начинается с цифры «1». Допускается нумеровать в пределах структурных частей работы.

Список источников и литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.1-2003, ГОСТ 7.80-2000, ГОСТ 7.82-2001.

3.4 Методические рекомендации по подготовке доклада

Доклад – публичное сообщение, представляющее собой развёрнутое изложение определённой темы.

Этапы подготовки доклада:

1. Определение цели доклада.
2. Подбор необходимого материала, определяющего содержание доклада.
3. Составление плана доклада, распределение собранного материала в необходимой логической последовательности.
4. Общее знакомство с литературой и выделение среди источников главного.
5. Уточнение плана, отбор материала к каждому пункту плана.
6. Композиционное оформление доклада.
7. Заучивание, запоминание текста доклада, подготовки тезисов выступления.
8. Выступление с докладом.

Композиционное оформление доклада – это его реальная речевая внешняя структура, в ней отражается соотношение частей выступления по их цели, стилистическим особенностям, по объёму, сочетанию рациональных и эмоциональных моментов, как правило, элементами композиции доклада являются: вступление, определение предмета выступления, изложение, заключение.

Вступление помогает обеспечить успех выступления по любой тематике.

Вступление должно содержать:

- название доклада;
- сообщение основной идеи;
- современную оценку предмета изложения;
- краткое перечисление рассматриваемых вопросов;
- интересную для слушателей форму изложения;
- акцентирование оригинальности подхода.

Выступление состоит из следующих частей:

Основная часть, в которой выступающий должен раскрыть суть темы, обычно строится по принципу отчёта. Задача основной части: представить достаточно данных для того, чтобы слушатели заинтересовались темой и захотели ознакомиться с материалами.

Заключение - это чёткое обобщение и краткие выводы по излагаемой теме

3.5 Методические рекомендации по подготовке сообщения

Сообщение – это сокращенная запись информации, в которой должны быть отражены основные положения текста, сопровождающиеся аргументами, 1–2 самыми яркими и в то же время краткими примерами.

Сообщение составляется по нескольким источникам, связанным между собой одной темой. Вначале изучается тот источник, в котором данная тема изложена наиболее полно и на современном уровне научных и практических достижений. Записанное сообщение дополняется материалом других источников.

Этапы подготовки сообщения:

1. Прочитайте текст.
2. Составьте его развернутый план.
3. Подумайте, какие части можно сократить так, чтобы содержание было понято правильно и, главное, не исчезло.
4. Объедините близкие по смыслу части.
5. В каждой части выделите главное и второстепенное, которое может быть сокращено при конспектировании.
6. При записи старайтесь сложные предложения заменить простыми.

Тематическое и смысловое единство сообщения выражается в том, что все его компоненты связаны с темой первоисточника.

Сообщение должно содержать информацию на 3-5 мин. и сопровождаться презентацией, схемами, рисунками, таблицами и т.д.

Критерии оценки подготовки информационного сообщения и доклада:

- актуальность темы;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала;
- грамотность и полнота использования источников;
- наличие элементов наглядности.

3.6 Методические рекомендации по составлению презентаций

Требования к презентации

На первом слайде размещается:

- название презентации;
- автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке);
- год.

На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).

На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Оформление слайдов

Стиль

- необходимо соблюдать единый стиль оформления;
- нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации;
- вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки)

Фон

- для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)

Использование цвета

- на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста;
- для фона и текста используются контрастные цвета;
- особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)

Анимационные эффекты

- нужно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде;
- не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации

Содержание информации

- следует использовать короткие слова и предложения;
- времена глаголов должно быть везде одинаковым;
- следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных;
- заголовки должны привлекать внимание аудитории

Расположение информации на странице

- предпочтительно горизонтальное расположение информации;
- наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана;
- если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней

Шрифты

- для заголовков не менее 24;
- для остальной информации не менее 18;
- шрифты без засечек легче читать с большого расстояния;
- нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации;
- для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа;

- нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).

Способы выделения информации

Следует использовать:

- рамки, границы, заливку
- разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки
- рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов

Объем информации

- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут единовременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений.
- наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.

Виды слайдов

Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

Критерии оценки презентации

Содержание оценки

1. Содержательный критерий

правильный выбор темы, знание предмета и свободное владение текстом, грамотное использование научной терминологии, импровизация, речевой этикет

2. Логический критерий

стройное логико-композиционное построение речи, доказательность, аргументированность

3. Речевой критерий

использование языковых (метафоры, фразеологизмы, пословицы, поговорки и т.д.) и неязыковых (поза, манеры и пр.) средств выразительности; фонетическая организация речи, правильность ударения, четкая дикция, логические ударения и пр.

4. Психологический критерий

взаимодействие с аудиторией (прямая и обратная связь), знание и учет законов восприятия речи, использование различных приемов привлечения и активизации внимания

5. Критерий соблюдения дизайн - требований к компьютерной презентации

соблюдены требования к первому и последним слайдам, прослеживается обоснованная последовательность слайдов и информации на слайдах, необходимое и достаточное количество фото- и видеоматериалов, учет особенностей восприятия графической (иллюстративной) информации, корректное сочетание фона и графики, дизайн презентации не противоречит ее содержанию, грамотное соотнесение устного выступления и компьютерного сопровождения, общее впечатление от мультимедийной презентации

Примерная тематика рефератов, сообщений, докладов, презентаций.

1. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях
2. Применение сложных процентов в экономических расчетах.
3. Исторический обзор развития теории пределов.
4. Средние значения и их применение в статистике.
5. Понятие дифференциала и его приложения.
6. Истоки математических знаний. Математика в догреческих цивилизациях.
7. Математика Древней Греции. Источники.
8. Математика в древнем и средневековом Китае.
9. Математика в древней и средневековой Индии.
10. История развития понятия «функция».
11. Реформа математического анализа.
12. Старинные задачи и способы их решения.
13. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики.
14. Функциональные зависимости в реальных процессах и явлениях.
15. Биографии и открытия ученых – математиков.
16. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса
17. Комплексные числа - расширение понятия числа,
18. Показательная форма комплексного числа и ее применение в технике
19. История возникновения и развития теории вероятностей
20. Случайные величины

Тема: Матрицы и определители

Самостоятельная работа № 1.

Сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу, транспонирование матриц, нахождение обратных матриц и определителей матриц.

Цель: Закрепить умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц

Методические рекомендации

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k*, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Произведение AB можно определить только для матриц *A* размера *m*x*n* и *B* размера *n*x*p*, при этом *AB=C*, матрица *C* имеет размер *m*x*p*, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:* $c_{ij} = A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы *A 3*x*2*, матрицы *B 2*x*2*. Поэтому произведение *AB* найти можно, произведение *BA* – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4) \\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице A размера mxn, называется матрица A^T размера nxm, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$, то $C^T=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 12 & 16\\ 5 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 4 & 7\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 16\\ 20 & 30\\ 17 & 6\end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 7\\ 4 & 3 & -5\\ -6 & -4 & 3\end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$

Вариант 2

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -5 & 8\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 3

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 4

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Вариант 5

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 6

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант 7

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Вариант 8

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Вариант 9

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 10

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Вариант 11

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 12

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 13

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Вариант 14

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Вариант 15

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 16

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант 17

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Вариант 18

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 19

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 20

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Вариант 21

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 22

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант 23

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Вариант 24

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Вариант 25

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 26

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Вариант 27

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 28

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 29

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Умножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Тема: Методы решения систем линейных уравнений

Самостоятельная работа № 2.
Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, по правилу Крамера и методом обратной матрицы.
Цель: закрепить знания, умения решения систем линейных уравнений

Методические указания

Рассмотрим линейную систему, в которой число уравнений равно числу неизвестных:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_{m.} \end{cases}$$

Запишем определитель, состоящий из коэффициентов системы при неизвестных:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Этот определитель называется ***главным определителем системы***. ***Вспомогательными*** определителями по переменной x_j называются определители, полученные из главного определителя системы заменой j-го столбца коэффициентов на столбец свободных членов уравнений системы. Количество вспомогательных определителей равно числу неизвестных.
$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Формулы Крамера для нахождения решения системы алгебраических линейных уравнений имеют вид:
$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

При решении системы методом Крамера возможны случаи:

- если $\Delta \neq 0$, то система совместна и единственное решение системы выражается формулами Крамера;

- если $\Delta = 0$ и все $\Delta_{xj} = 0$, то система совместна и имеет множество решений; тогда свободные (n-r) неизвестных (где r – ранг матрицы) выбирается произвольно, а главные (базисные) r неизвестных определяются единственным образом через свободные неизвестные;

- если $\Delta = 0$ и хотя бы один $\Delta_{xj} \neq 0$, то система несовместна и решений не имеет.

1. Установить, что система имеет единственное решение, найти его.

$$\begin{cases} x + y - z = 36 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7. \end{cases}$$

Решение: Найдём определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta \neq 0$$,следовательно, система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 36 & 1 & -1 \\ 13 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 + 7 - 13 - 7 - 36 - 13 = -98,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 36 & -1 \\ 1 & 13 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 13 - 36 - 7 - 13 - 7 - 36 = -86,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & 13 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 36 - 13 - 36 - 13 - 7 = -40,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta};$$

$$x = \frac{98}{4} = 24{,}5; \quad y = \frac{86}{4} = 21{,}5; \quad z = \frac{40}{4} = 10.$$

Проверка: $$\begin{cases} 24{,}5 + 21{,}5 - 10 = 36 \\ 24{,}5 - 21{,}5 + 10 = 13 \\ -24{,}5 + 21{,}5 + 10 = 7. \end{cases}$$

Ответ: (24,5; 21,5; 10)

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Пример . Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0=-1$, следовательно, данная система несовместна.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = -2 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ -x + 4y + z = 3 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$

Вариант 2

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$

Вариант 3

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases}$

Вариант 4

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$

Вариант 5

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x - 2z = 11 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$

Вариант 6

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - 2y - 3z = -3 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ 3x + y - 13z = -6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 3y + 4z = 2 \\ 11x - 12y + 17z = 3 \end{cases}$

Вариант 7

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + 2y - 6z = 5 \\ 2x - y + 3z = -7 \\ 5x + 5y - 15z = 8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$

Вариант 8

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 11y + 10z = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - 3z = 13 \\ 3x - 2y + 4z = -15 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$

Вариант 9

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 5 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x - y - 3z = 13 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = -15 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$

Вариант 10

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - 6z = -1 \\ -x + 5y - 15z = 8 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 5x - 7y + 8z = 1 \end{cases}$

Вариант 11

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 5x - 2y + 7z = 22 \\ 2x - 5y + 4z = 4 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 11y + 4z = 13 \\ 2x - 10y + 5z = 1 \end{cases}$

Вариант 12

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-y-z=-6 \\ 3x-4y+3z=0 \end{cases}$

Вариант 13

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ 3x-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 2x-y-3z=4 \\ 3x+y-5z=1 \end{cases}$

Вариант 14

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ 4x+y+3z=9 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ 7x+6y+5z=5 \\ 5x+4y+3z=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 2x-7y+5z=1 \\ 3x-8y+8z=5 \end{cases}$

Вариант 15

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y+2z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 3x+y+4z=1 \end{cases}$

Вариант 16

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 5x+y+3z=14 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 2x-y-2z=-4 \\ 3x+y-4z=1 \end{cases}$

Вариант 17

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x-2y-z=-5 \\ x+2y-2z=2 \\ 3x+y-4z=-2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ 3x+y+4z=0 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x+y+z=1 \\ x+y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ -x+4y+z=3 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$

Вариант 18

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x+y-z=7 \\ 2x-2y+3z=3 \\ x-y-z=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-2y+3z=6 \\ 3x-2y+4z=7 \\ 3x+2y-3z=4 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=3 \\ 3x+6y+9z=2 \end{cases}$

Вариант 19

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -4 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + z = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x - 6y + 5z = 6 \end{cases}$

Вариант 20

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y - 4z = 12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - y - z = -1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 5x + y - z = 7 \end{cases}$

Вариант 21

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x + 3y + 3z = 11 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - z = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x - 2z = 11 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \\ x - y + 4z = -1 \end{cases}$.

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$

Вариант 22

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 4x+2y+5z=5 \\ 3x+4y+7z=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+6y+z=2 \\ 4x+8y-z=2 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x-2y-3z=-3 \\ x+3y-5z=0 \\ 3x+y-13z=-6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-3y+4z=2 \\ 11x-12y+17z=3 \end{cases}$

Вариант 23

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x+4y+z=4 \\ 3x+6y+2z=4 \\ 4x-y-3z=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 4x+y+4z=9 \\ 3x+5y+2z=10 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+2y-6z=5 \\ 2x-y+3z=-7 \\ 5x+5y-15z=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y+3z=9 \\ 3x-5y+z=-4 \\ 4x-7y+z=5 \end{cases}$

Вариант 24

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x-3y+2z=2 \\ 4x-5y+2z=1 \\ 5x-6y+4z=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+2y-4z=8 \\ 2x+4y-5z=11 \\ 4x-3y+2z=1 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 4x-11y+10z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases}$

Вариант 25

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+3y-z=1 \\ 3x+4y-z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases}$

Вариант 26

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-7 \\ x+2y-6z=-1 \\ -x+5y-15z=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-3y+2z=5 \\ 3x-y+4z=7 \\ 5x-7y+8z=1 \end{cases}$

Вариант 27

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 5x-2y+7z=22 \\ 2x-5y+4z=4 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+2y-4z=2 \\ 5x-2y+2z=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-11y+4z=13 \\ 2x-10y+5z=1 \end{cases}$

Вариант 28

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+3y-z=-2 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ x-3y+2z=5 \\ 2x-y+5z=12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-y-z=-6 \\ 3x-4y+3z=0 \end{cases}$

Вариант 29

Задание 1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1; \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ 3x-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

Задание 2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \quad ; \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 2x-y-3z=4 \\ 3x+y-5z=1 \end{cases}$

Тема: Моделирование и решение задач линейного программирования
Самостоятельная работа № 3.

Графический метод решения задачи линейного программирования

Цель: закрепить умения решать задачи линейного программирования графическим методом.

Методические рекомендации

Геометрический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

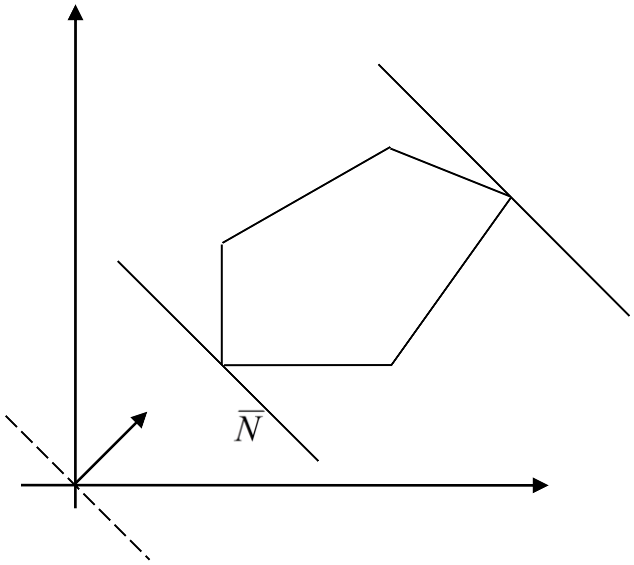
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

К такой форме может быть сведена количественная задача с ограничениями в виде уравнений, когда число переменных n > числа уравнений m на два, т. е. $n - m = 2$.

O_1. Множество допустимых решений задач линейного программирования представляют собой выпуклый многоугольник (или выпуклую многогранную область), а оптимальное решение задачи находится по крайней мере в одной из угловых точек этого многоугольника решений.

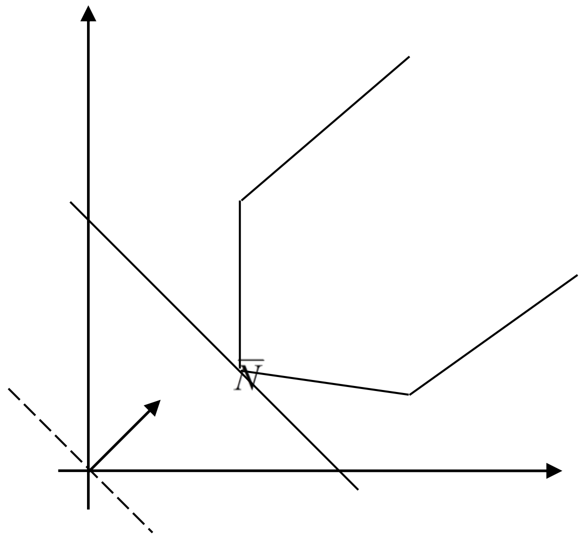
Значит, задачу линейного программирования можно сформулировать так:

Среди всех точек области *D* найти ту, которая обращает в максимальную или минимальную целевую функцию *Z*.



$Z\,(E)$ – min

$Z\,(C)$ – max



$Z\,(A)$ – min

1. Вектор $\overline{N} = (c_1; c_2)$ – нормальный вектор. Он показывает направление возрастания функции *Z*.
2. Приравняем значение *Z* к какой-нибудь постоянной *C*

$c_1x_1 + c_2x_2 = c \qquad (c = 0)$

$l_0:\quad c_1x_1 + c_2x_2 = 0$

Давая *C* различные числовые значения, будем получать прямые параллельные l_0 и перпендикулярные вектору $\overline{N}$. Значит, уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ определяет на плоскости семейство параллельных прямых.

1. Решением задачи на минимум является первая точка, в которой прямая *l* встречается с областью *D* при перемещении прямой l_0 в положительном направлении вектора $\overline{N}$.

$Z\,(E)$ – min для первого случая

$Z\,(A)$ – min для второго случая

2. Решением задачи на максимум является последняя точка, в которой прямая *l* встречается с областью *D*.

$Z\,(C)$ – max для первого случая

Во втором случае задача на max решений не имеет, т.к. *Z* не ограничена сверху.

Аналогично может быть не ограничено снизу, тогда на минимум задача решений не имеет.

Замечание.

1. Если прямая l при перемещении совпадает с отрезком BC, то все точки этого отрезка дают решение задачи на максимум (l параллельна BC). Следовательно, решений на максимуме бесчисленное множество.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Задания для самостоятельного решения

1. Построить на плоскости область допустимых решений задачи и геометрически найти максимум или минимум функции цели.

Вариант №1 $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 97; \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \\ x_1 + 7x_2 \ge 77 \end{cases}$ $Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$	**Вариант №2** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50; \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19 \end{cases}$ $Z = x_1 + 5x_2 \to \min$
Вариант №3 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 53 \\ x_1 - x_2 \le 3 \quad ; \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 71 \end{cases}$ $Z = 9x_1 + 2x_2 \to \max$	**Вариант №4** $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 17 \\ x_1 + 2x_2 \le 34 \quad ; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 17 \end{cases}$ $Z = 5x_1 + 3x_2 \to \max$
Вариант №5 $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26 \quad ; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \\ x_1 + 4x_2 \ge 26 \end{cases}$ $Z = 5x_1 + 7x_2 \to \min$	**Вариант №6** $\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \ge 24 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 110 \; ; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \\ -2x_1 + 7x_2 \ge 15 \end{cases}$ $Z = 9x_1 + 2x_2 \to \max$
Вариант №7 $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29 \\ 3x_1 - x_2 \le 14 \quad ; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38 \end{cases}$ $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$	**Вариант №8** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 - 3x_2 \le 37 \quad ; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20 \end{cases}$ $Z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$
Вариант №9	**Вариант №10**

$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53 \\ 6x_1 - 7x_2 \le 15 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 5x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \le 157 \\ -3x_1 + 11x_2 \ge 16 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = x_1 + x_2 \to \min$
Вариант №11 $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 97 \\ x_1 + 7x_2 \ge 77 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 7x_1 + 2x_2 \to \min$	**Вариант №12** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50 \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 6x_1 + x_2 \to \max$
Вариант №13 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 53 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 71 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = x_1 + 7x_2 \to \max$	**Вариант №14** $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 17 \\ x_1 + 2x_2 \le 34 \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 17 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = x_1 + 9x_2 \to \min$
Вариант №15 $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26 \\ x_1 + 4x_2 \ge 26 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = x_1 + 8x_2 \to \min$	**Вариант №16** $\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \ge 24 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 110 \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 15 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = x_1 + 7x_2 \to \max$
Вариант №17 $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29 \\ 3x_1 - x_2 \le 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 4x_1 + x_2 \to \min$	**Вариант №18** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 37 \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = x_1 + 4x_2 \to \max$
Вариант №19 $\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53 \\ 6x_1 - 7x_2 \ge 15 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 2x_1 + 5x_2 \to \min$	**Вариант №20** $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \le 157 \\ -3x_1 + 11x_2 \ge 16 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 8x_1 + 5x_2 \to \min$
Вариант №21 $\begin{cases} 2x_2 \le 5 \\ 8x_1 + 2x_2 \le 89 \\ 8x_1 - 6x_2 \ge 69 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 7x_1 - 4x_2 \to \max$	**Вариант №22** $\begin{cases} 5x_1 - x_2 \le 51 \\ 2x_2 \le 1 \\ 10x_1 + 4x_2 \ge 69 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 11x_1 + 7x_2 \to \min$
Вариант №23	**Вариант №24**

$\begin{cases} 11x_1 - 17x_2 \le 66 \\ -x_1 + 11x_2 \le 14 \\ 5x_1 - 3x_2 \ge 14 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 13x_1 - 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 8x_1 + 14x_2 \ge 14 \\ 13x_1 + 5x_2 \le 100 \\ 5x_1 - 9x_2 \ge 5 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 11x_1 + 7x_2 \to \max$
Вариант №25 $\begin{cases} x_1 - 9x_2 \le 18 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 27 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 3x_1 + x_2 \to \min$	**Вариант №26** $\begin{cases} 9x_1 + 11x_2 \ge 48 \\ 5x_1 - x_2 \le 44 \\ -x_1 + 13x_2 \le 6 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 6x_1 + 4x_2 \to \max$
Вариант №27 $\begin{cases} 2x_2 \le 6 \\ 8x_1 + 2x_2 \le 90 \\ 8x_1 - 6x_2 \ge 60 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 9x_1 + 5x_2 \to \max$	**Вариант №28** $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 5 \\ 5x_1 - x_2 \le 46 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 15 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 6x_1 - 4x_2 \to \min$
Вариант №29 $\begin{cases} x_1 + 11x_2 \ge 11 \\ 3x_1 - x_2 \le 28 \\ 5x_1 - 13x_2 \ge 11 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 8x_1 + 2x_2 \to \min$	**Вариант №30** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 2 \\ 4x_1 - 2x_2 \le 35 \\ 5x_1 - 13x_2 \le 18 \end{cases}; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$ $Z = 7x_1 + x_2 \to \max$

Тема: Интеграл и его применение

Самостоятельная работа № 4.

Интегральное исчисление функций одной вещественной переменной

Цель: закрепить знания, умения и навыки интегрирования функций

Методические рекомендации

Первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется функция $F(x)$, производная которой в каждой точке отрезка равна $f(x)$, т.е: $\boxed{F'(x) = f(x)}$

Теорема. *Две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$, определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

Прибавляя к какой-либо первообразной $F(x)$ все возможные постоянные значения С, можно получить все первообразные для данной функции $f(x)$, т.е. $\boxed{F(x)+C}$ - это есть совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от этой функции и обозначается: $\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C}$, где

$f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$; С - постоянная интегрирования;

x – переменная интегрирования; $\int$ - знак интеграла.

Действие нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется ***интегрированием*** данной функции.

Основные свойства неопределенного интеграла.

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad F'(x)=f(x)$$

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\boxed{\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)}$

На этом свойстве основывается проверка правильности нахождения неопределенного интеграла.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $\boxed{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx}$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого:

$\boxed{\int d\left(F(x)\right) = F(x)+C}$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$\boxed{\int A\cdot f(x)dx = A\int f(x)dx}$, $A \neq 0$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции:

$\boxed{\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx}$

6. Свойство *инвариантности*: всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановки вместо **x** любой дифференцируемой функции от **x**.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\boxed{\int f(u)du = F(u) + C}$. На этом свойстве основан метод непосредственного интегрирования.

Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C$	**11.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad , n \neq -1$	**12.** $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$	**13.** $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	**14.** $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$
5. $\int e^u du = e^u + C$	**15.** $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
6. $\int \cos u du = \sin u + C$	**16.** $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$	**17.** $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{arcsec}\frac{u}{a} + C$
8. $\int \mathrm{tg} u du = -\ln\|\cos u\| + C$	**18.** $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$
9. $\int \mathrm{ctg} u du = \ln\|\sin u\| + C$	
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	

Все формулы данной таблицы можно проверить путем дифференцирования, так как интегрирование есть действие обратное дифференцированию.

$$\int \mathrm{ctgudu} = \ln|\mathrm{sinu}| + C$$

$$\left(\ln|\mathrm{sinu}| + C\right)' = \frac{(\mathrm{sinu})'}{\mathrm{sinu}} = \frac{\mathrm{cosu}}{\mathrm{sinu}} = \mathrm{ctgu}$$

Данные интегралы принято называть табличными и основная задача интегрирования состоит в том, чтобы свести данный нам интеграл к табличному или нескольким табличным (если это возможно).

Непосредственное интегрирование функций

1. *Интегрирование по таблице.*

Заключается в прямом использовании табличных интегралов.

2. *Интегрирование разложением подынтегральной функции на сумму функций.*

Этот метод основан на пятом свойстве интегралов: интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

3. Непосредственное интегрирование.

- <u>Интегрирование путем подведения функции под знак дифференциала.</u>

Основан на свойстве инвариантности формулы неопределенного интеграла.

$\int f(x)dx = F(x) + C$, если $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$

Интегрирование методом подстановки

Пусть $\int f(x)dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$\boxed{\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array}}$, т.е.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t)) \cdot d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной **x**. Такой способ нахождения интеграла называется ***методом замены переменной*** или ***методом подстановки.***

Задача нахождения неопределённых интегралов от многих функций решается методом сведения их к одному из табличных интегралов. Этого можно достичь путём алгебраических тождественных преобразований подынтегральной функции или подведения части её множителей под знак дифференциала.

Подведение множителя под знак дифференциала

$dx = d(x+b), b - const$	$\sin xdx = -d(\cos x)$
$dx = \frac{1}{a}d(ax), a \neq 0$	$\cos xdx = d(\sin x)$
$dx = \frac{1}{a}d(ax+b), a \neq 0$	$\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$
$xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$	$\sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x$
$xdx = \frac{1}{2}d(x^2+b)$	$\cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x$

Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

Основные типы интегралов, «берущихся» по частям

<table>
<tr><th colspan="2">интеграл</th><th>u</th><th>dv</th></tr>
<tr><td rowspan="3">I</td><td>$\int p(x)\cdot e^{\alpha x}dx$</td><td>$p(x)$</td><td>$e^{\alpha x}dx$</td></tr>
<tr><td>$\int p(x)\cdot \sin\alpha x dx$</td><td>$p(x)$</td><td>$\sin\alpha x dx$</td></tr>
<tr><td>$\int p(x)\cdot \cos\beta x dx$</td><td>$p(x)$</td><td>$\cos\beta x dx$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">II</td><td>$\int p(x)\cdot \ln x dx$</td><td>$\ln x$</td><td>$p(x)dx$</td></tr>
<tr><td>$\int p(x)\cdot \arcsin x dx$</td><td>$\arcsin x$</td><td>$p(x)dx$</td></tr>
<tr><td>$\int p(x)\cdot \arccos x dx$</td><td>$\arccos x$</td><td>$p(x)dx$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">III</td><td rowspan="2">$\int e^{\alpha x}\cdot \sin\alpha x dx$</td><td>$e^{\alpha x}$</td><td>$\sin\alpha x dx$</td></tr>
<tr><td>$\sin\alpha x$</td><td>$e^{\alpha x}dx$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\int e^{\alpha x}\cdot \cos\beta x dx$</td><td>$e^{\alpha x}$</td><td>$e^{\alpha x}dx$</td></tr>
<tr><td>$\cos\beta x$</td><td>$\cos\beta x dx$</td></tr>
<tr><td>$\int \sin(\ln x)dx$</td><td>$\sin(\ln x)$</td><td>dx</td></tr>
</table>

Замечания:

1. Интегралы 1-го типа берутся **n**-кратным интегрированием, если $P(x)$ - многочлен **n**-й степени.
2. Под знаком интегралов 2-го типа стоят функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$, $\ln x$, от которых интеграл не существует.
3. Интегралы 3-го типа берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Задания для самостоятельного решения

Выполнить тест

Тест

1 Чему равно значение интеграла $\int \frac{xdx}{1+x^2}$:

1: $\ln(1+x^2)+C$; 2: $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 3: $arctgx+C$.

2 Первообразная функции $y(x)=\frac{1}{x^2}-4\sin x$ равна:

1: $4\cos x-\frac{1}{x}+c$; 2: $4\cos x+\frac{1}{x}+c$; 3: $4\cos x-\frac{1}{2x}+c$.

3 Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на интервале (a, b), если в любой точке интервала (a, b) функция F(x) дифференцируема и:

1: $F''(x)=f(x)$ 2: $F'(x)=0$; 3: $F'(x)=f(x)$.

4 Отметить правильный ответ. Формула интегрирования по частям:

1: $\int udv=uv-\int vdu$; 2: $\int udv=uv-\int udv$; 3: $\int udv=v^2-\int vdu$.

5 Отметить правильный ответ. Отыскание неопределенного интеграла называется

1: дифференцированием; 2: интегрированием; 3: логарифмированием.

6 Отметить правильный ответ. Неопределенным интегралом от функции *f(x)* называется :

1: совокупность всех первообразных; 2: сумма функций $f(x)+f^2(x)$;
3: производная функции *f(x)*; 4: выражение $f(x)dx$.

7 Чему равен интеграл $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$:

1: $\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$; 2: $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$; 3: $\ln|x-a|+\ln|x+a|+c$; 4: $\ln\left|x^2-a^2\right|+C$.

8 Чему равен интеграл $\int x\sqrt{x}dx$:

1: $\frac{x^3}{3}+C$; 2: $2\sqrt{x}+C$; 3: $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$; 4: $x^{\frac{3}{2}}+C$.

9 Дополнить формулировку:
У всякой непрерывной на данной интервале функции существует ...

1: точка разрыва; 2: неопределенный интеграл; 3:вертикальная асимптота графика функции.

10 Дополнить формулировку:
Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен …

1: подынтегральному выражению; 2: самой функции; 3: производной функции; 4: натуральному логарифму функции.

11 Универсальная тригонометрическая подстановка:

1: $t = tg\dfrac{x}{2}$; 2: $t = \cos x$; 3: $t = \cos\dfrac{x}{2}$; 4: $t = \sin\dfrac{x}{2}$; 5: $t = arcc\text{os}\, x$.

12 Чему равен интеграл $\displaystyle\int (7x-1)^{23}dx$:

1: $(7x-1)^{23}$; 2: $(7x-1)^{23} + C$; 3: $\dfrac{(7x-1)^{24}}{168} + C$; 4: $\dfrac{(7x-1)^{24}}{168}$.

13 Чему равен интеграл $\displaystyle\int x^2 \cdot \sin\left(x^3+1\right)dx$:

1: $-\dfrac{1}{3}\cos(x^3+1)$; 2: $-\dfrac{1}{3}\cos(x^3+1) + C$; 3: $\cos(x^3+1) + C$; 4: $3\cos(x^3+1) + C$;
5: $-3\cos(x^3+1) + C$.

14 Чему равен интеграл $\displaystyle\int 2xdx$:

1: $x^2 + C$; 2: x^2; 3: $\dfrac{x^3}{9} + C$; 4: $2x^2 + C$; 5: $-x^2 + C$;

15 Дополнить формулировку:
С точки зрения геометрической, неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, каждая из которых получается путем перемещения кривой $y = F(x)$ …

1: параллельно самой себе вдоль оси ОУ; 2: параллельно самой себе вдоль оси ОХ; 3: симметрично относительно начала координат.

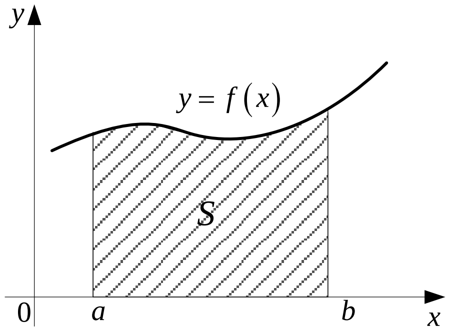
Самостоятельная работа №5

Вычисление площади плоской фигуры, длины кривой, объёма и площади тел вращения

Цель: закрепить знания, умения и навыки нахождения площади криволинейной трапеции с помощью интеграла.

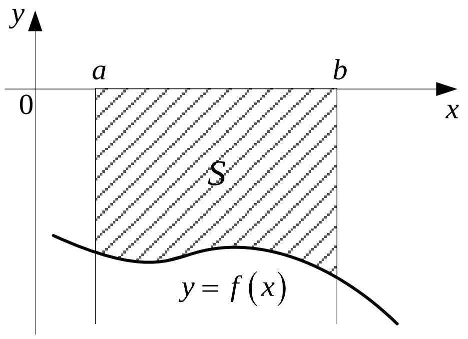
Методические рекомендации

1. Если на $[a;b]$ функция $f(x) \geq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a; x = b$ равна:



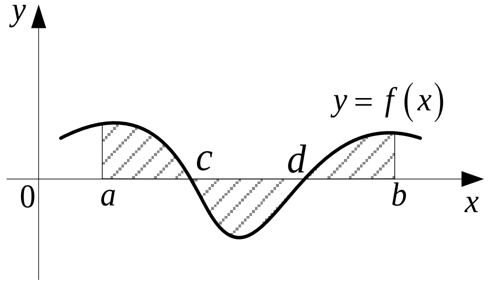
$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

2. Если на $[a;b]$ функция $f(x) \leq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a; x = b$, равна:



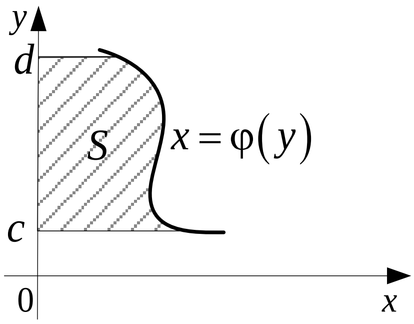
$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

3. Если функция $f(x)$ конечное число раз меняет знак на $[a;b]$, то интеграл по всему отрезку $[a;b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам. Площадь такой криволинейной трапеции соответственно равна:



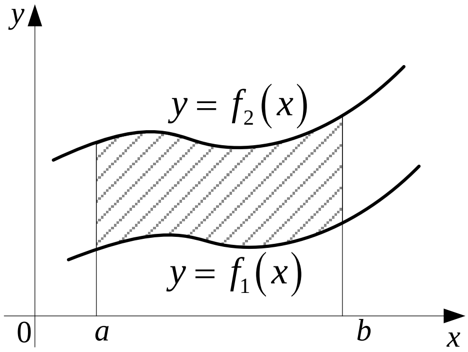
$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

4. Если основанием криволинейной трапеции является отрезок $[c;d]$ оси Oy, тогда площадь такой фигуры равна:



$$S=\int_c^d \varphi(y)dy \qquad (3)$$

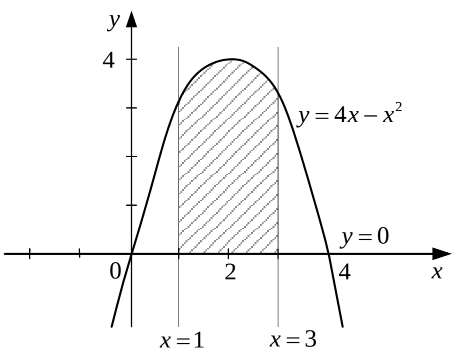
5. Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы непрерывные функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ такие, что $f_2(x)\ge f_1(x)$. Тогда площадь фигуры, заключённой между кривыми $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле:



$$S=\int_a^b \left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx \qquad (4)$$

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4x-x^2$; $x=1; x=3$ и осью Ox.

Решение:



Воспользуемся формулой $S=\int_a^b f(x)dx$,

тогда $a=1; b=3; f(x)=4x-x^2$, следовательно,

$$S=\int_1^3 (4x-x^2)dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=18-9-2+\frac{1}{3}=7+\frac{1}{3}=\frac{22}{3}(кв.ед.)$$

Задания для решения в аудитории

Вариант 1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y=x^2+1$ и $x+y=3$.
2. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=2^x$ и $x=0$, $x=1$, $y=0$.

Вариант 2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 6x - x^2$ и $y = 0$.

2. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси *OУ* фигуры, ограниченной линиями $y = x$; $x = 0$; $y = 4$.

Вариант3

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$.

Вариант 4

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OУ* фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$.

Вариант 5

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 1 - 2x$.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$; $x = -\dfrac{\pi}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Вариант 6

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^3$ и $y = 2x$.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

Вариант 7

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^2 + 4$ и осью *OУ*.

Вариант 8

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $y = 0$.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OУ* фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{4}{x}$, $y = 1$, $y = 2$.

Вариант 9

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = x$ и $x - y = 2$.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

Вариант 10

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4x - x^2$ и осью *OX*.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 3; x = 0; x = 2; y = 0$.

Вариант 11

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 - 2$ и $y = 4 + x$.

2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}; y = 3; x = 12; y = 0$.

Вариант 12

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = 1 - x; x = -3$ и осью *OX*.

2.Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}; x = -2; x = 0; y = 0$.

Вариант13

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 4; x = -2; x = 2; y = 0$.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{4} - 1; y = 0$.

Вариант 14

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x; y + x = 5; x = 0; x = 1$.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1; y = 4$.

Вариант 15

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^2 + 1; y = 3 - x$.

2. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x; x = 0; x = 1; y = 0$.

Вариант 16

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 6x - x^2; y = 0$
2. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линиями $y = x; x = 0; y = 4$.

Вариант 17

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \ln x; y = 0; x = e$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x; x = 0; x = \pi$.

Вариант 18

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = e^x; y = 2; x = 0$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}; y = 2; x = 0$.

Вариант 19

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = 4 - x^2; y = 1 - 2x$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x; x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 20

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x^3; x = 2x$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = x^2; x = 2; y = 0$.

Вариант 21

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \sqrt{x}; x + y = 2; y = 0$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^2 + 4$ и осью *OY*.

Вариант 22

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \frac{1}{x}; x = 1; x = e; y = 0$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}; y = 1; y = 2$.

Вариант 23

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2 = x; x - y = 2$

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y=e^{2x}; x=0; x=2; y=0$.

Вариант 24

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y=4x-x^2$ и осью *OX*.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}; x=3; x=12; y=0$.

Вариант 25

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y=x^2-2; y=4+x$.

2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+3; x=0; x=2$.

Вариант 26

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y^2=1-x; x=-3$
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y=e^{-x}; x=0; x=-2; y=0$.

Вариант 27

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y=x^2+4; x=-2; x=2; y=0$.
2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{4}-1; y=0$

Вариант 28

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y=e^x; x+y=5; x=0; x=1$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1; y=4$.

Вариант 29

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y=x^2+1; x+y=3$.
2. Найти объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y=2^x; x=0; x=1; y=0$.

Тема: Дифференциальные уравнения

Самостоятельная работа № 6.

Решение дифференциальных уравнений первого порядка и первой степени, уравнений с разделяющимися переменными, а также однородных дифференциальных уравнений

Цель: закрепить знания, умения решения дифференциальных уравнений.

Методические рекомендации

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } y' = f(x, y)$$

где y - неизвестная функция; x - независимая переменная.

Общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения I порядка имеет вид $\varphi(x, C) = 0$ или Ф (x, y, c) = 0 - соответственно. Для получения частного решения (частного интеграла), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x) = y_0$, надо найти соответствующее значение $C = C_0$, подставляя в общее решение (общий интеграл) значения x_0 и y_0 . Будем иметь $y = \varphi(x, C_0)$ или Ф (x, y, c) = 0

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (1)$$

Поделив обе части уравнения (I) на $N_1(y)M_2(x)$ получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 \qquad (2)$$

в котором переменные разделены. Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

Однородные уравнения I порядка

Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется однородным, если P(x,y) и Q(x,y)- однородные функции одного измерения. Функция F(x,y) называется однородной измерения m , если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Оно приводится к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Где $f\left(\frac{y}{x}\right)$- однородная функция нулевой степени однородности. Однородное уравнение с помощью подстановки $\left(\frac{y}{x}\right) = u$ или $y=ux$, ($y'=u'v+uv'$), приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции u. При этом $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$, или $dy=xdu+udx$.

Интегрируя получившееся уравнение с разделяющимися переменными, и, заменяя затем $u=\left(\frac{y}{x}\right)$, находим искомое общее решение (общий интеграл) данного однородного уравнения.

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y'=(y+1)ctgx$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx и разделим на множитель *(y+1)*. Получим уравнение с разделенными переменными: $\frac{dy}{y+1}=ctgxdx.$

Интегрируя обе части уравнения и беря произвольную постоянную в вида $\ln C$, получим $\ln|y+1|=\ln|\sin x|+\ln C.$

Потенцируя, находим общее решение: $y=C\sin x-1.$

Найдем значение С, соответствующее начальным условиями: $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$, $2=C\sin\frac{\pi}{2}-1$, откуда С = 3. Подставим С = 3 в формулу общего решения. Получим, $y=3\sin x-1$ есть частное решение, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения $(x^2+2xy)dx+xydy=0$

Решение. Здесь $P=x^2+2xy$, $Q=xy$. Функции однородные второго измерения. Введем подставку *y =ux*, тогда $dy=xdu+udx$.

Данное уравнение примет вид: $(x^2+2x^2u)dx+ux^2(xdu+udx)=0$, или $(x^2+2x^2u+u^2x^2)dx+ux^3du=0$.

Разделяя переменные и интегрируя, имеем: $\frac{dx}{x}+\frac{udu}{(u+1)^2}=0$, $\int\frac{dx}{x}+\int\frac{udu}{(u+1)^2}=C$, $\ln|x|+\int\frac{u+1-1}{(u+1)^2}du=C$, $\ln|x|+\ln|u+1|+\frac{1}{u+1}=C$.

Возвращаясь к прежней неизвестной функции y заменой $''u''$ на $\frac{y}{x}$, получаем $\ln|x|+\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=C$, $\ln\left|x(\frac{y}{x}+1)\right|+\frac{x}{x+y}=C$.

Задания для решения в аудитории

№ 1	№ 2	№ 3
1. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ 2. $y'=ytgx+\cos x$	1. $xyy'=1-x^2$ 2. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x$	1. $y'tgx-y=0$ 2. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=x^3$
№ 4	**№ 5**	**№ 6**
1. $y'+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$ 2. $xy'+y-e^x=0$	1. $yy'=\frac{1-2x}{y}$ 2. $y'-ytgx=\frac{1}{\cos x}$	1. $xy'+y=y^2$ 2. $y'-y\frac{2x-1}{x^2}=1$
№ 7	**№ 8**	**№ 9**
1. $x(y^2+1)dx+y(1-x^2)dy=0$ 2. $xy'+y=xy^2\ln x$	1. $y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{x}$ 2. $(1-x^2)y'+xy=x$	1. $y'\sin x=y\ln y$ 2. $y'+y=\frac{e^{-x}}{1-x}$
№ 10	**№ 11**	**№ 12**
1. $(1+y')e^y=1$ 2. $y'+y\cos x=\cos x$	1. $y'=2xy^3-2xy$ 2. $x^2y^2y'+xy^3=1$	1. $(3x-1)dy+y^2dx=0$ 2. $xy'-y=-3y^2$
№ 13	**№ 14**	**№15**
1. $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ 2. $x^3y'-x^2y=-y^3$	1. $xy'+2y=2xyy'$ 2. $y'-\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}$	1 $3x^2ydx+2\sqrt{4-x^3}dy=0$. 2. $y'+\frac{y}{x}=xe^{x/2}$
№ 16	**№ 17**	**№ 18**
1. $\sqrt[3]{1-2x^3+x^6}dy=x^2y^2dx$ 2. $y'-2y=e^{2x}$	1. $e^{x+y}dx+ydy=0$ 2. $y'=x^2+y$	1. $y'e^{-x}=x-1$ 2. $y'-2xy=x^3$
№ 19	**№ 20**	**№ 21**
1. $xy+2y=xy\frac{dy}{dx}$ 2. $y'+\frac{6xy}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)^4}$	1. $e^{x-y}dx-\frac{1}{x}dy=0$ 2. $y'-\frac{2y}{x+5}=(x+5)^3$	1. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$ 2. $y'+\frac{(1-4x)y}{x^2}=3$
№ 22	**№ 23**	**№ 24**
1. $(x-xy^2)dx+(y+x^2y)dy=0$	1. $y'tgx-y=5$ 2. $y'=x+y$	1. $\sin y\cdot\cos x\cdot y'=\cos y\cdot\sin x$

2. $xy'+2y=x^2$		2. $xy'=x^3+y$
№ 25 1. $y'\sin x=y\ln y$ 2. $y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$	№ 26 1. $x+xy+yy'(1+x)=0$ 2. $y'+\dfrac{y}{x}=x^2$	№ 27 1. $(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0$ 2. $xy'+y=xy^2\ln x$
№ 28 1. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x}$ 2. $(1-x^2)y'+xy=x$	№ 29 1. $y'=\dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$ 2. $y'=-\dfrac{y}{x}-xy^2$	№ 30 1. $(1+y')e^y=1$ 2. $y'+y\cos x=\cos x\cdot\sin x$