**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Симоновский А.Я.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

## Б1.В.03 Прикладная математика

Шифр и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

**35.03.06 Агроинженерия**

Шифр и наименование направления подготовки

**Технические системы в агробизнесе**

наименование профиля

**Программа академического бакалавриата**

Ориентация ОП ВО в зависимости от вида(ов) профессиональной деятельности

**Бакалавр**

Квалификация выпускника

**Очная, заочная**

Форма обучения

Ставрополь, 2019

**Методические указания для студентов**

**по самостоятельной внеаудиторной работе**

**Тема:** Линейная алгебра

**Цель изучения темы:** научиться решать системы линейных алгебраических уравнений.

**Задачи:** рассмотреть матрицы и действия над ними; изучить определители и их свойства.

**Студент должен знать:**

1. матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. метод Кремера решения систем линейных алгебраических уравнений.
3. метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений

**Студент должен уметь:** находить решения однородных и неоднородных систем линейных алгебраических уравнений.

**Задания для самостоятельной внеаудиторной работы студентов по указанной теме:**

1) Ознакомиться с теоретическим материалом по теме занятия с использованием конспектов лекций, рекомендуемой учебной литературой.

2) Ответить на вопросы для самоконтроля:

1. Определители второго и третьего порядков и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения.
2. Разложение определителя по элементам какого-либо ряда. Понятие об определителях n-го порядка.
3. Решение систем линейных уравнений. Формулы Крамера.
4. Метод Гаусса.
5. Матрицы. Ранг матрицы. Действия над матрицами.
6. Обратная матрица.
7. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решение. Теорема Кронекера-Капелли.

3) Проверить свои знания, выполнив следующие задания:

**А)**

1. Указать размеры матриц: а) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -2 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 23 & 54 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}.$$

Можно ли сложить матрицу *A*: с матрицей *B*; с матрицей *C* ? Найти: *A+C; 2A-3C+D*; *0,5C+2D+*$B^T$.

3. Найти матрицу X если:

а) $2\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ -3 & 9\end{pmatrix}$; б) $3X+\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу *A*, если известно: $(3A)^T=\begin{pmatrix}9 & -12\\ -3 & 0\\ 15 & 3\end{pmatrix}$.

5. Даны матрицы:

$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Найти: а) $2A-B^T$; б)$2B^T+3A$.

**Б)**

1. Заданы матрицы:

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 5 & 7 & 9 & -1\\ 3 & 4 & 5 & 15\end{pmatrix}$. Найти существующие произведения.

2. Даны матрицы:

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 9 & -5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

Найти произведение *AB*, *BA*, *AC*.

3. Найти произведения *AB*, *AC*, *BA*, *CA*, *ABC*.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 7\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что матрица $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ является корнем многочлена $f(x)=x^2-3x+5$ при $x=A$

5. Вычислить определители. (Для определителей 3-го порядка использовать правило Саррюса)

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 7\\ -3 & 5 & 8\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-4 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 4\end{vmatrix}$$

6. Найти все значения α, при которых определители равны нулю:

а) $\begin{vmatrix}3-\alpha & 0 & 0\\ 2 & \alpha & 0\\ 10 & -5 & 1\end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 1 & 7 & \alpha\\ \alpha & 0 & 2\alpha^2\end{vmatrix}$

7. Используя свойство 6 определителей разложить по 1 столбцу:

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ b & 0 & 1 & 1\\ c & 1 & 0 & 1\\ d & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

8. Вычислить при помощи элементарных преобразований и свойств определителей:

$$\begin{vmatrix} 4 & 13 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 8 & 26 & 0 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -17 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -8 & 12 \\ 2 & -34 & 4 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -5 & 2 & -4 & -8 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить $\det(\alpha A),$ если известно, что $\alpha = \sqrt[3]{2}$ и $\det A_{3\times 3} = 3.$

**В)**

1. Записать миноры для элементов $a_{32}$, $a_{14}$, $a_{22}$, $a_{43}$ матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

2. Выяснить, существует ли матрица, обратная матрице $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Если существует, найти ее.

3. Найти матрицу обратную данной, сделать проверку:

а) $A=\begin{pmatrix}11 & -4 & -4\\ -2 & 6 & 2\\ 2 & 15 & 3\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 1 & 6 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

**Г)** Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases}x_1-3x_2=7\\ -5x_1+2x_2=-22\end{cases}$ б) $\begin{cases}-4x_1+3x_2=1\\ 3x_1+4x_2=18\end{cases}$

в) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\ 2x_1-x_2-6x_3=-1\\ 3x_1-2x_2=8\end{cases}$ г) $\begin{cases}x_1-2x_3=4\\ 3x_1+x_2+2x_3=5\\ x_1+2x_2+7x_3=-3\end{cases}$

в) $\begin{cases}5x_1-x_2-x_3=0\\ x_1+2x_2+3x_3=14\\ 4x_1+3x_2+2x_3=16\end{cases}$ г) $\begin{cases}x_1+3x_2-6x_3=12\\ 3x_1+2x_2+5x_3=-10\\ 2x_1+5x_2-3x_3=6\end{cases}$

Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14\\ x_1+x_2+x_3=6\\ x_1+x_2=3\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=9\\ 3x_1-5x_2+x_3=-4\\ 4x_1-7x_2+x_3=5\end{cases}$

в) $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=9\\ 3x_1-5x_2+x_3=-4\\ 4x_1-7x_2+x_3=5\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5\\ x_1-2x_2+2x_3=-5\\ 7x_1+x_2-x_3=10\end{cases}$

д) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=6\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=7\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=18\end{cases}$ е) $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1\\ x_1+3x_2-13x_3+22x_4=-1\\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4=5\\ 2x_1+3x_2+4x_3-7x_4=4\end{cases}$

ё) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$

**Рекомендуемая литература:**

а) основная литература:

1. ЭБС Znanium: Линейная алгебра: Учебное пособие / Б.М. Рудык. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 318 с.
2. ЭБС Znanium: Математический анализ. Теория и практика: Учебное пособие / В.С. Шипачев. - 3-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.
3. ЭБС Znanium: Математический анализ: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 288 с.
4. ЭБС Znanium: Основы математической статистики: Учебник / Г.А. Соколов. - 2-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 368 с.
5. ЭБ "Труды ученых СтГАУ": Гулай, Т. А. Руководство к решению задач по математическому анализу [электронный полный текст] : учеб. пособие для студентов вузов в 2-х ч. Ч. 2 / Т. А. Гулай, А. Ф. Долгополова, Д. Б. Литвин ; Т. А. Гулай, А. Ф. Долгополова, Д. Б. Литвин ; СтГАУ. - Ставрополь : Сервисшкола, 2012. - 2,03 МБ. - (Гр. УМО).
6. Шипачев В.С. Высшая математика. Базовый курс: учебник и практикум для бакалавров / В. С. Шипачев, под ред. А. Н. Тихомирова ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 8-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2014. - 447 с. - (Бакалавр. Базовый курс. Гр.).
7. Гулай, Т. А. Руководство к решению задач по математическому анализу : учеб. пособие для студентов вузов в 2-х ч. Ч. 2 / Т. А. Гулай, А. Ф. Долгополова, Д. Б. Литвин ; СтГАУ. - Ставрополь : Сервисшкола, 2012. - 336 с. - (Гр. УМО).

б) дополнительная литература

1. ЭБ "Труды ученых СтГАУ": Яновский, А. А. Элементы математического анализа [электронный полный текст] :метод. указания / А. А. Яновский ; СтГАУ. - Ставрополь, 2014. - 465 КБ.
2. ЭБС Znanium: Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : Учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. - 2-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 473 с.
3. ЭБС Znanium: Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. - 2-е изд., испр. и перераб. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 240 с.

**Тема:** Математический анализ

**Цель изучения темы:** научиться исследовать поведение функций одного и многих переменных и использовать методы интегрально исчисления для решения инженерных задач.

**Задачи:** рассмотреть вопросы дифференциального исчисления функций одного и многих независимых переменных; изучить интегральное исчисление и его технические применения.

**Студент должен знать:**

1. методы дифференцирования и интегрирования функций одного и многих переменных
2. находить решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Студент должен уметь:** применять методы дифференциального и интегрального исчисления для нахождения площадей и объема фигур длин кривых различной конфигурации, работы переменной силы и т. д.

**Задания для самостоятельной внеаудиторной работы студентов по указанной теме:**

1) Ознакомиться с теоретическим материалом по теме занятия с использованием конспектов лекций, рекомендуемой учебной литературой.

2) Ответить на вопросы для самоконтроля:

1. Постоянные и переменные величины. Определение функции. Область определения функции; способы ее задания. Графическое изображение функции. Основные сведения из классификации функций.
2. Числовые последовательности, их сходимость. Предел числовой последовательности. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности (формулировка).
3. Предел функции. Основные теоремы о пределах.
4. Раскрытие неопределенностей различного вида
5. Первый замечательный предел.
6. Второй замечательный предел.
7. Сравнение бесконечно малых величин.
8. Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции. Свойства функций, непрерывных на замкнутых множествах.
9. Определение производной; ее геометрический и механический смысл.
10. Правила дифференцирования функций.
11. Таблица производных
12. Вывод формулы дифференцирования элементарных функций
13. Дифференцирование функции, заданной неявно.
14. Производные высших порядков.
15. Производная сложной функции. Производная обратной функции.
16. Дифференциал функции; его геометрический смысл.
17. Свойства дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
18. Применение производной к вычислению пределов (правило Лопиталя).
19. Теоремы Ролля, Лагранжа. Применение производной к исследованию функций.
20. Экстремумы функции. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на интервале.
21. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба.
22. Асимптоты кривой. Схема исследования функции и построения ее графика.
23. Определение функции нескольких независимых переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

24. Частные производные функции нескольких независимых переменных, их геометрический смысл (для случая двух независимых переменных). Част-ные производные высших порядков.
25. Полный дифференциал функции нескольких независимых переменных; его применение в приближенных вычислениях.
26. Экстремум функции многих переменных. Нахождение наибольших и наименьших значений функции.
27. Задача обработки наблюдений. Подбор параметров кривых по способу наименьших квадрантов.
28. Скалярное и векторное поля. Производная по направлению. Градиент функции. Свойства градиента.
29. Понятие о первообразной функции одной переменной. Теорема о двух первообразных.
30. Понятие о неопределенном интеграле. Свойства неопределенного интеграла.
31. Геометрическое изображение неопределенного интеграла. Таблица интегралов.
32. Методы непосредственного интегрирования (по таблице, разложением, подведением функции под знак дифференциала).
33. Метод интегрирования подведением функции под знак дифференциала и его частные случаи.
34. Интегрирование функции одной переменной методом подстановки.
35. Вывод формулы интегрирования по частям.
36. Нахождение интегралов различного вида.
37. Рациональные функции. Алгоритм представления неправильной рациональной дроби в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.
38. Простейшие дроби. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби.
39. Интегрирование простейших дробей I и II типов.
40. Интегрирование простейших дробей III типа.
41. Метод неопределенных коэффициентов при разложении рациональной функции на простейшие дроби.
42. Метод частных значений при разложении рациональной функции на простейшие дроби.
43. Общее правило интегрирования рациональной функции. Пример.
44. Интегрирование тригонометрических функций.
45. Интегрирование иррациональных функций.
46. Интегрирование функций, зависящих от показательной функции.
47. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
48. Определенный интеграл как предмет интегральной суммы.
49. Свойства определенного интеграла.
50. Формула Ньютона-Лейбница.
51. Вычисление определенного интеграла методом подстановки.
52. Вычисление определенного интеграла по частям.
53. Определенный интеграл на симметричном множестве.
54. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.
55. Приложение определенного интеграла к вычислению объемов тел вращения.
56. Несобственные интегралы I рода (с бесконечными пределами интегрирования).
57. Несобственные интегралы II рода (от разрывных функций).
58. Признаки сходимости несобственного интеграла.

3) Проверить свои знания, выполнив задания:

**А)** Используя определение и свойства предела вычислить:

а) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{4x^2 - 4}{x}$ б) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2}$

в) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-x^2 + x + 1}{x^2 - x}$

Используя определение и свойства предела вычислить:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{9x^2 - 10x + 2}{3x^2 + 5x - 4}$ б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^2 - 4x + 6 + x^5}{x^2 + 3x + 2}$

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^5 - 4x}{x^7 - 5x^4 + 6}$ г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-x^3 + 2x^2 - 7}{x^2 - 4x + 1}$

Используя первый и второй замечательный пределы вычислить:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2\text{x}}$ г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx - \sin x}{x^3}$

д) $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{x+1}$ е) $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \frac{x+7}{x-3} \right)^{x+4}$

ж) $\lim\limits_{x \to \infty} (3x - 4)^{\frac{x}{x+2}}$ з) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{ctgx}$

**Б)**

Найти производные функций:

1. $y = \sqrt{x^4} + \sqrt[5]{x^{-4}} - \frac{7}{x^{-3}}$

2. $y = tg^2(-2x)$

3. $y = tg8x\sin(2^x)$

4. $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{\sin(x^4 - \frac{5}{2}x - 9)}$

5. $y = tg(\cos(-4x + 8))$

6. $y = tg^2 \sin x + \cos(\ln^2(\sin x))$

7. $y=\left(\dfrac{\cos(4x+2)}{2x+\sin 2x}\right)^4$

8. $y=\arcsin\dfrac{\cos x}{1-x^4}$

9. $y=\left(\dfrac{2x^3 tgx}{\cos x+x}\right)^{-4}$

10. $y=(x^3+5)^{e^x}$

**В)**

1. Провести полное исследование функций методами дифференциального исчисления и построить графики функций:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $y=3x^3-x+2$ | 7. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$ | 13. $y=e^{2x-x^2}$ |
| 2. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ | 8. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$ | 14. $y=x^2-2\ln x$ |
| 3. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$ | 9. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$ | 15. $y=\ln\left(x^2-4\right)$ |
| 4. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}$ | 10. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$ | 16. $y=e^{1/(2-x)}$ |
| 5. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ | 11. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ | 17. $y=\ln\left(x^2+1\right)$ |
| 6. $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$ | 12. $y=xe^{-x^2}$ | 18. $y=\ln\left(9-x^2\right)$ $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ |

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $y=2x+3\sqrt{-x};\ [-5;1]$ | 3. $y=\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5};\ [-3;3]$ | 5. $y=2\sqrt{x}-x;\ [0;4]$ |
| 2. $y=\dfrac{x^2+4}{x^2-4};\ [-3;6]$ | 4. $y=\dfrac{20x}{x^2+1};\ [0;8]$ | 6. $y=x^2-2\ln x;\ [1;5]$ |

3. Исследовать задачу, найдя оптимальное решение:

1. Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объема *V*. Каковы должны быть высота ведра и радиус его дна, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество жести?
2. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса *R*.

3. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса $R$.
4. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен $a$. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?
5. Сосуд, состоящий из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой, должен вмещать 25 л воды. Найти размеры сосуда, при которых на его изготовление пойдет наименьшее количество материала.
6. Требуется поставить палатку данного объема $V$, имеющую форму прямого кругового конуса. Найти отношение высоты конуса к радиусу его основания, при котором на палатку уйдет наименьшее количество материала.
7. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема $V$. Стоимость 1 кв. м металла, идущего на изготовление дна бака, равна $p_1$, а стенок - $p_2$ руб. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовления были наименьшими?

**Г)**

1. Вычислить частные производные первого и второго порядков, а также полный дифференциал первого и второго порядка от функций:

| | |
|---|---|
| 1. $z = 3\sin\left(x^3 + y^2\right) - 5x^3y - 7$ | 6. $z = x\sin\left(xy\right) + 5x^2y^2 - 7x$ |
| 2. $z = 8\ln\left(xy^2\right) + 10xy^2 - 8x$ | 7. $z = 0{,}5\ln\left(x^3 + y^2\right) - 9x^3y + 2x$ |
| 3. $z = 2e^{3x+y^2} - 2x^2y^2 + 9y$ | 8. $z = \sqrt{x + 2y} + 3x^4y - 8x - 2$ |
| 4. $z = 8\cos\left(xy\right) - 3x - 12x^4y$ | 9. $z = 8e^{x+y^3} - 3xy^3 + 7x - 3$ |
| 5. $z = 3\sqrt{x^2 + y^2} - 5xy^3 + 8y$ | 10. $z = 8\ln\left(x^2 + y^2\right) - 6x^2y^3 + 8x - 1$ |

2. Найти производные сложных функций:

| | |
|---|---|
| $u = z^2 + y^2 + 2y,\ z = \sin t, y = e^t, \dfrac{du}{dt} = ?$ | $z = arctg\left(x - y\right).\quad \dfrac{dz}{dx} = ?,$ если $y = x^3$. |

| | |
|---|---|
| $z = x^2 y - y^2 x,$<br>$x = u \cdot \cos v, y = u \cdot \sin v, \frac{\partial z}{\partial u} = ?, \frac{\partial z}{\partial v} = ?$ | $z = u^2 \ln v, \quad u = \frac{y}{x}, v = y \cdot \cos x, dz = ?$ |
| $z = x^2 y - y^2 x,$<br>$x = u \cdot \cos v, y = u \cdot \sin v, \frac{\partial z}{\partial u} = ?, \frac{\partial z}{\partial v} = ?$ | $z = u^2 v - v^2 u, \; u = x \cdot \sin y, v = y \cdot \cos x, dz = ?$ |
| $u = \ln(e^x + e^y); \quad \frac{\partial u}{\partial x} - ?,$ если $\; y = x^3.$ | $z = \ln(u^2 + v^2); \; v = y \sin x, u = x \cos y.$<br>$\frac{\partial z}{\partial x} = ?, \frac{\partial z}{\partial y} = ?$ |
| $z = x^2 e^y, \quad x = \sin t, y = t^3, \frac{dz}{dt} = ?$ | $z = x^2 y^2 - y^2 x, \; y = u \sin v, x = v \cos u.$<br>$\frac{\partial z}{\partial u} = ?, \frac{\partial z}{\partial v} = ?$ |

3. Дана функция $z = f(x, y)$ и точки $P_1(x_1; y_1)$ и $P_2(x_2; y_2)$. Найти приближённое значение данной функции в точке $P_2(x_2; y_2)$.

| | |
|---|---|
| 1. $z = x^y, P_1(1;3), P_2(1{,}02;2{,}97).$ | 6. $z = \sqrt{x^3 + y^2}, P_1(2;1), P_2(1{,}97;1{,}03).$ |
| 2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, P_1(3;4), P_2(2{,}96;4{,}05).$ | 7. $z = arctg\,\frac{x}{y}, \; P_1(2;2), P_2(1{,}98;2{,}06).$ |
| 3. $z = \sqrt{x^3 - 3y^2}, P_1(4;4), P_2(3{,}94;4{,}10).$ | 8. $z = \sqrt{x^3 + y^3}, P_1(1;2), P_2(1{,}02;1{,}97).$ |
| 4. $z = \ln(2x - 5y^2)^{\frac{1}{2}}, \; P_1(3;1), P_2(3{,}02;0{,}97).$ | 9. $z = e^{xy}, P_1(1;1), P_2(1{,}15;1{,}1).$ |
| 5. $z = arctg\,\frac{x}{y}, \quad P_1(1;1), P_2(1{,}03;0{,}95).$ | 10. $z = x^{2y}, P_1(1;2), P_2(0{,}98;2{,}04).$ |

4. Найти экстремум заданной функции

| | |
|---|---|
| 1. $z = 2x^2 - xy + y^2 - 3x - y + 1;$ | 5. $z = 3x^2 + xy - 6y^2 - 6x - y + 9;$ |
| 2. $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 3;$ | 6. $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 6y - 2;$ |
| 3. $z = 2x^2 + xy - y^2 - 7x + 5y + 2;$ | 7. $z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y + 1;$ |
| 4. $z = x^2 - 3xy - y^2 - 4x + 6y + 1;$ | 8. $z = 0{,}5x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 8;$ |

**Д)**

1. Вычислить с помощью свойств и таблицы интегралов:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\int 5x^4 dx$ | 6. $\int 5^x dx$ | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-14}}$ |
| 2. $\int \sqrt{x} dx$ | 7. $\int \frac{5x^2+\sqrt{x}+3x}{x^2} dx$ | 12. $\int \frac{dx}{x^2-9}$ |
| 3. $\int \frac{dx}{x^2}$ | 8. $\int 2^x \cdot 3^x dx$ | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$ |
| 4. $\int \sqrt[12]{x^5} dx$ | 9. $\int \frac{dx}{x^2+16}$ | 14. $\int \frac{\cos^2 x+6}{\cos^2 x} dx$ |
| 5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ | 10. $\int \frac{dx}{13+x^2}$ | 15. $\int \frac{x^4+5}{x^2+2} dx$ |

2. Вычислить внесением линейной функции под знак дифференциала:

| | |
|---|---|
| 1. $\int \frac{dx}{3-7x}$ | 5. $\int \sqrt[3]{4x+3} dx$ |
| 2. $\int 3^{2x} dx$ | 6. $\int \frac{x+5}{\sqrt{x-2}} dx$ |
| 3. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$ | 7. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-9x}}$ |
| 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{17+6x+9x^2}}$ | 8. $\int \frac{x+2}{\sqrt{3x+4}} dx$ |

3. Вычислить при помощи замены переменной:

| | |
|---|---|
| 1. $\int \mathrm{tg} x dx$ | 5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2-3}}$ |
| 2. $\int \mathrm{ctg} x dx$ | 6. $\int \frac{x^3+2x}{\sqrt{x^4+5}} dx$ |
| 3. $\int \frac{x dx}{x^2+9}$ | 7. $\int \frac{\mathrm{e}^x dx}{\mathrm{e}^x+2}$ |
| 4. $\int \frac{x dx}{x^4+16}$ | 8. $\int \frac{\mathrm{tg} x dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}$ |

4. Вычислить при помощи формулы интегрирования по частям:

| | |
|---|---|
| 1. $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$ | 5. $\int \mathrm{e}^{2x} \sin 3x dx$ |
| 2. $\int x^2 \mathrm{e}^{3x-2} dx$ | 6. $\int \arcsin x dx$ |

| | |
|---|---|
| 3. $\int x^2 \sin x dx$ | 7. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ |
| 4. $\int \operatorname{arctg} x dx$ | 8. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ |

5. Вычислить интегралы от дробно-рациональных функций:

| | |
|---|---|
| 1. $\int \frac{5dx}{(2-x)^3}$ | 5. $\int \frac{(5x+2)dx}{x^3+4x^2+4x}$ |
| 2. $\int \frac{(3x+7)dx}{x^2+4x+8}$ | 6. $\int \frac{(x^2+3x+3)dx}{(x+1)(x^2+4x+5)}$ |
| 3. $\int \frac{(7-5x)}{x^2+6x+25} dx$ | 7. $\int \frac{(3x+1)dx}{(x^2+2x-3)(x^2+1)}$ |
| 4. $\frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}} dx$ | 8. $\int \frac{x^3+5x^2+3x}{x^2+2x+5} dx.$ |

6. Вычислить интегралы от тригонометрических функций:

| | |
|---|---|
| 1. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$ | 5. $\int \sin^3 x \ \cos^2 x \, dx$ |
| 2. $\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$ | 6. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ |
| 3. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ | 7. $\int \cos x \sin^{11} x \, dx$ |
| 4. $\int \sin x \cos 2x dx$ | 8. $\int \sin^4 x \ dx$ |

7. Вычислить интегралы от иррациональных функций:

| |
|---|
| 1. $\int x^2\sqrt{4-x^2} dx$ |
| 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$ |
| 3. $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)} dx$ |
| 4. $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+3}}$ |

**E)**

| |
|---|
| 1. Вычислить определенный интеграл приведением к табличному |

| |
|---|
| 1. $\int_0^4 3x^2 dx$ |
| 2. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x dx$ |
| 3. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ |
| 4. $\int_0^1 e^{2x} dx$ |
| 5. $\int_1^2 \frac{dx}{1-2x}$ |
| 6. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x dx$ |

| 2. Вычислить определённый интеграл методом подстановки (замены переменной) |
|---|
| 1. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x dx$ |
| 2. $\int_0^4 x\sqrt{16-x^2} dx$ |
| 3. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ |
| 4. $\int_0^{\pi/6} \cos x \cdot e^{\sin x} dx$ |
| 5. $\int_{-1}^2 x \cdot (x^2-1)^3 dx$ |

| 3. Вычислить методом интегрирования по частям |
|---|
| 1. $\int_0^{\pi/6} (2-x)\sin 3x dx$ |
| 2. $\int_0^1 \arcsin x dx$ |
| 3. $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x} dx$ |
| 4. $\int_0^{\pi/2} (x-1)\cos x dx$ |
| 5. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ |

| 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: |
|---|
| 1. $y = x^2, x = 1, x = 3, y = 0.$ |

| |
|---|
| 2. $x+2y-12=0, y=1, y=4, x=0.$ |
| 3. $y=2x-x^2, y=x.$ |
| 4. $y=\frac{1}{2}x^2, y=4-x.$ |
| 5. $x-2y+4=0, x+y-5=0, y=0.$ |
| 6. $y^2=9x, x=1, x=9.$ |
| 7. $xy=2, x=0, y=1, y=4.$ |
| 8. $y=\ln x, y=0, x=2.$ |
| 9. $y=x+3, y=x^2+1.$ |
| 10. $y=\sin x, x=-\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{3}, x=0.$ |
| 11. $x=4-y^2, x=0.$ |
| 12. $x=\sqrt{y}, y=1, y=4, x=0.$ |
| 13. $xy=4, x+y=5.$ |
| 14. $y=x^3, x=-2, x=1, y=0.$ |
| 15. $y=x^2, y^2=x.$ |

| |
|---|
| 5. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси ох фигуры, ограниченной линиями: |
| 1. $y=3-x, x=0, y=0.$ |
| 2. $y^2=4x, y=0, x=3.$ |
| 3. $y=\sin x, 0\le x\le \pi.$ |
| 4. $y=\frac{1}{x}, x=1, x=3, y=0.$ |
| 5. $y=e^{2x}, x=0, y=0, x=2.$ |
| 6. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси оу фигуры, ограниченной линиями: |
| 1. $y=x^2, y=4.$ |
| 2. $xy=6, y=1, y=6, x=0.$ |
| 3. $y=\frac{x^2}{2}, x=0, y=2\sqrt{2}.$ |
| 4. $x=\sqrt{y-1}, y=2, y=5, x=0.$ |
| 5. $y=x^3, y=8, x=0.$ |

**Рекомендуемая литература:**

а) основная литература:


1. ЭБС Znanium: Линейная алгебра: Учебное пособие / Б.М. Рудык. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 318 с.

2. ЭБС Znanium: Математический анализ. Теория и практика: Учебное пособие / В.С. Шипачев. - 3-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 351 с.
3. ЭБС Znanium: Математический анализ: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 288 с.
4. ЭБС Znanium: Основы математической статистики: Учебник / Г.А. Соколов. - 2-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 368 с.
5. ЭБ "Труды ученых СтГАУ": Гулай, Т. А. Руководство к решению задач по математическому анализу [электронный полный текст] : учеб. пособие для студентов вузов в 2-х ч. Ч. 2 / Т. А. Гулай, А. Ф. Долгополова, Д. Б. Литвин ; Т. А. Гулай, А. Ф. Долгополова, Д. Б. Литвин ; СтГАУ. - Ставрополь : Сервисшкола, 2012. - 2,03 МБ. - (Гр. УМО).
6. Шипачев В.С. Высшая математика. Базовый курс: учебник и практикум для бакалавров / В. С. Шипачев, под ред. А. Н. Тихомирова ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 8-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2014. - 447 с. - (Бакалавр. Базовый курс. Гр.).
7. Гулай, Т. А. Руководство к решению задач по математическому анализу : учеб. пособие для студентов вузов в 2-х ч. Ч. 2 / Т. А. Гулай, А. Ф. Долгополова, Д. Б. Литвин ; СтГАУ. - Ставрополь : Сервисшкола, 2012. - 336 с. - (Гр. УМО).

б) дополнительная литература

4. ЭБ "Труды ученых СтГАУ": Яновский, А. А. Элементы математического анализа [электронный полный текст] :метод. указания / А. А. Яновский ; СтГАУ. - Ставрополь, 2014. - 465 КБ.
5. ЭБС Znanium: Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : Учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. - 2-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 473 с.
6. ЭБС Znanium: Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. - 2-е изд., испр. и перераб. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 240 с.

**Тема:** Теория вероятностей.

**Цель изучения темы:** научиться применять методы теории вероятностей в практической деятельности.

**Задачи:** рассмотреть случайные величины и их законы распределения; изучить методы анализа случайных явлений.

**Студент должен знать:**

1. законы сложения и умножения вероятностей;

2. законы распределения случайных величин;

3. вероятностные методы решения инженерных задач.

**Студент должен уметь:** рассчитывать параметры распределений случайных величин.

**Задания для самостоятельной внеаудиторной работы студентов по указанной теме:**

1) Ознакомиться с теоретическим материалом по теме занятия с использованием конспектов лекций, рекомендуемой учебной литературой.

2) Ответить на вопросы для самоконтроля:

1. Событие. Вероятность события
2. Непосредственный подсчет вероятностей
3. Частота, или статистическая вероятность, события
4. Случайная величина
5. Практически невозможные и практически достоверные события. Принцип практической уверенности
6. Назначение основных теорем. Сумма и произведение событий
7. Теорема сложения вероятностей
8. Теорема умножения вероятностей
9. Формула полной вероятности
10. Теорема гипотез (формула Бейеса)
11. Частная теорема о повторении опытов
12. Общая теорема о повторении опытов
13. Ряд распределения. Многоугольник распределения
14. Функция распределения
15. Вероятность попадания случайной величины на заданный участок
16. Плотность распределения
17. Числовые характеристики случайных величин. Их роль и назначение
18. Характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана)
19. Моменты. Дисперсия. Среднее квадратическое отклонение
20. Закон равномерной плотности
21. Закон Пуассона
22. Нормальный закон и его параметры
23. Моменты нормального распределения
24. Вероятность попадания случайной величины, подчиненной нормальному закону, на заданный участок. Нормальная функция распределения
25. Вероятное (срединное) отклонение

3) Проверить свои знания, разобрав решенные задания и выполнив последующие:

**Разбор типовых задач**

**Задача 1**. В партии из 10 деталей две бракованные. Найти вероятность того, что среди выбранных на удачу четырех деталей окажется одна бракованная.

**Решение:** Пространство элементарных исходов представляет собой в этом случае множество всевозможных упорядоченных наборов из четырех любых деталей. Общее число таких элементарных исходов равно $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!6!} = 210$. Пусть событие А состоит в том, что в выборку попадут три годных детали и одна бракованная. Три годные детали из восьми можно взять $C_8^3$ способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $m = C_8^3 C_2^1 = 112$. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{112}{210} = \dfrac{8}{15}$.

**Задача 2**. В квадрат с вершинами (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) наудачу брошена точка $M(x; y)$. Пусть $x$ и $y$ – координаты этой точки. Найти вероятность того, что сумма координат этой точки не превзойдет 0,5.

**Решение:** В прямоугольной системе координат область $G$ – квадрат со стороной 1, а область $g$ – определяется неравенством $x+y \le 0,5$.

Область $G$ – квадрат, поэтому мера $G$ равна 1. Область $g$ – прямоугольный треугольник, катеты которого равны по 0,5. Таким образом, $P(A)=\frac{мера\,g}{мера\,G}=\frac{0,5\cdot 0,5/2}{1\cdot 1}=0,125$.

**Задача 3**. По каналу связи передаются три сообщения, каждое из которых может быть передано правильно или частично искажено. Вероятность того, что сообщение передано правильно – 0,8. Считая, что сообщение искажается или передается правильно не зависит от количества передач и от результата предыдущей связи найти вероятности следующих событий:

$B$ { все три сообщения переданы верно}

$C$ { одно из трех сообщений искажено}

$D$ { хотя бы одно из трех сообщений искажено}

**Решение:** Обозначим через $A_i$ событие, состоящее в том, что $i$-ое сообщение передано верно. Событие $B=A_1A_2A_3$. Применяя теорему умножения для независимых событий и учитывая, что $P(A_i)=0,8$, вычислим $P(B)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0,8^3=0,512$.

Событие $C$ можно выразить через события $A_1$, $A_2$ и $A_3$ следующим образом: $C=\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}$. Применяя теорему сложения несовместных событий и теорему умножения, найдем вероятность этого события:

$$P(C)=P(\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3})=P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(A_1A_2\overline{A_3})=$$

$$=(1-0,8)\cdot 0,8\cdot 0,8+0,8\cdot(1-0,8)\cdot 0,8+0,8\cdot 0,8\cdot(1-0,8)=0,384.$$

Событие $D=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$. Теорему сложения для несовместных событий применить нельзя, так как события $A_1$, $A_2$ и $A_3$ совместны. Вероятность события $D$ удобно вычислять через вероятность противоположного события $\overline{D}=B=A_1A_2A_3$. Вычислим $P(D)=1-P(B)=1-0,512=0,488$.

**Задача 4**. Монета подброшена 5 раз. Какова вероятность, что герб появится не более 2 раз?

**Решение:** В этой задаче $n=5,\ p=0,5$. По формуле Бернулли находим вероятность события $m\le 2$.

$$P(m\le 2)=P(m=0\,или\,m=1\,или\,m=2)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)=$$

$$=C_5^0(0,5)^0(0,5)^5+C_5^1(0,5)^1(0,5)^4+C_5^2(0,5)^2(0,5)^3=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}=0,5.$$

**Задача 5**. Производится 400 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность 320 попаданий в мишень; в) вероятность того, что число попаданий в мишень будет не менее 300 и не более 350.

**Решение:** а) найдем наивероятнейшее число $m_0$ попаданий в мишень из неравенства $np-q \le m_0 \le np+p$. По условию задачи $n=400, p=0,8, q=1-p=0,2$. Тогда получим $400\cdot 0,8-0,2 \le m_0 \le 400\cdot 0,8+0,8$, значит, $m_0=320$.

б) при больших $n$ ($npq>10$) имеет место приближенное равенство (локальная теорема Лапласа): $P_n(m)=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$

$$P_{400}(320)=\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\varphi\left(\frac{320-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)=\frac{1}{8}\varphi(0)=\frac{0,3989}{8}\approx 0,05.$$

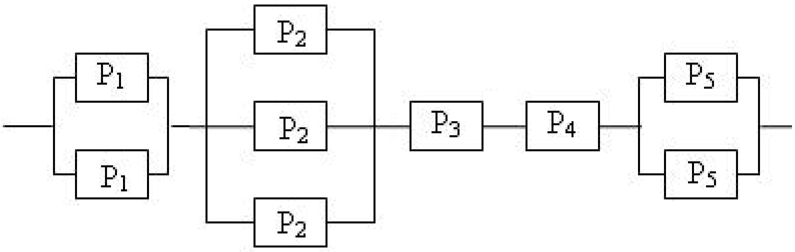
в) при больших $n$ ($npq>10$) имеет место приближенное равенство (интегральная теорема Лапласа): $P_n(m_1 \le m \le m_2)=\Phi\left(\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$. На основании этой формулы получим: $P_n(300 \le m \le 350)=\Phi\left(\dfrac{350-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)-\Phi\left(\dfrac{300-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)=$

$$=\Phi(3,75)-\Phi(-2,5)=\Phi(3,75)+\Phi(2,5)=0,9936.$$

**Задача 6**. Вероятность того, что деталь нестандартна, равна $p$ =0,1. Сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью, равной 0,9544,можно было бы утверждать, что относительная частота появления нестандартной детали отклонится от вероятности $p$ не более, чем на 0,03?

**Решение:** По условию $p=0,1, q=1-p=0,9, \varepsilon=0,03; P\left(\left|\dfrac{m}{n}-0,1\right| \le 0,03\right)=0,9544$. Для решения воспользуемся формулой: $P\left(\left|\dfrac{m}{n}-p\right| \le \varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$. В силу условия задачи $0,9544=2\Phi\left(0,03\sqrt{\dfrac{n}{0,1\cdot 0,9}}\right)=2\Phi\left(0,1\sqrt{n}\right)$. По таблице находим $2\Phi(2)=0,9544$. Отсюда $0,1\sqrt{n}=2$ или $n=400$.

**Задача 7.** Определить надежность схемы, если $P_i$ – надежность i – го элемента




**Решение.** Для работы схемы необходимо, чтобы одновременно происходили следующие события:

A={работал хотя бы один из элементов $P_1$};

B={работал хотя бы один из элементов $P_2$};

C={работал элемент $P_3$};

D={работал элемент $P_4$};

E={ работал хотя бы один из элементов $P_5$};

Вычислим вероятности этих событий:

P(A)=$1-(1-P_1)^2$;

P(B)=$1-(1-P_2)^3$;

P(C)=$P_3$;

P(D)=$P_4$;

P(E)= $1-(1-P_5)^2$.

События A, B, C, D, E – независимы, по теореме умножения вероятностей получим:

P=$[1-(1-P_1)^2][1-(1-P_2)^3]P_3 P_4[1-(1-P_5)^2]$.

Решение остальных заданий варианта базируется на одних и тех же свойствах и теоремах, а поэтому решаются аналогично.

**Задания для самостоятельного выполнения**

1. Ребенок играет с четырьмя буквами разрезной азбуки А, А, М, М. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАМА»?
2. Бросают два игральных кубика. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков четное.

3. В квадрат с вершинами в точках (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) наудачу брошена точка (x,y). Найдите вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y<2x$.
4. Имеется пять билетов стоимостью по одному рублю, три билета по три рубля и два билета по пять рублей. Наугад берутся три билета. Определить вероятность того, что

   а) все три билета стоят вместе семь рублей,

   б) все три билета стоимостью по одному рублю.

5. Из урны, содержащей 5 белых шаров и 5 черных, наудачу достают 6 штук. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров окажется одинаковое число черных и белых (шары отличаются только цветом).
6. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся выучил 35 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого нужно ответить на два вопроса билета или на один вопрос билета и один дополнительный вопрос из другого билета.
7. Из урны, содержащей 5 шаров с номерами от 1 до 5, последовательно извлекаются два шара, причем первый шар возвращается, если номер не равен единице. Определить вероятность того, что шар с номером два будет извлечен при втором извлечении.
8. В каждой из двух урн находятся 5 белых шаров и 10 черных. Из первой урны во вторую наудачу переложили один шар, а затем из второй урны наугад вынули один шар. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны, окажется белым.
9. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.
10. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей:

а) два мальчика,

б) не более двух мальчиков,

в) более двух мальчиков,

г) не менее двух и не более трех мальчиков.

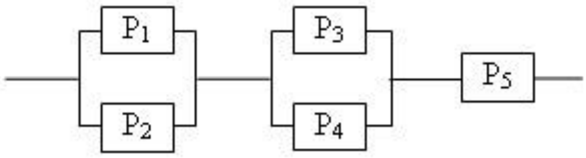
Принять вероятность рождения мальчика равной 0,51.

11. Вероятность получения бракованной детали равна 0,01. Какова вероятность того, что среди 400 деталей бракованных окажется:

а) 3 детали;

б) хотя бы одна.

12. При передаче сообщения на расстояние вероятность искажения одного знака равна 0,01. Какова вероятность того, что при передаче сообщения из 300 знаков: а) не будет ни одного искажения, б) будет два искажения, в) будет хотя бы одно искажение?
13. Определить надежность схемы, если $P_i$ – надежность i – го элемента




**Рекомендуемая литература:**


1. Теория вероятностей и математическая статистика. Кремер Н.Ш. 2-е изд., перераб. и доп. - М.: 2004. — 573 с. Это не только учебник, но и краткое руководство к решению задач.
2. ЭБС Znanium: Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : Учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. - 2-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 473 с.
3. ЭБС Znanium: Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. - 2-е изд., испр. и перераб. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 240 с.
4. Znanium: Основы математической статистики: Учебник / Г.А. Соколов. - 2-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 368 с.


**Тема:** Математическая статистика.

**Цель изучения темы:** научиться применять методы теории вероятностей при анализе массовых случайных явлений.

**Задачи:** рассмотреть методы анализа выборок случайных величин; изучить методы количественного определения отклонении параметров этих выборок от средних значений.

**Студент должен знать:**

1. Числовые характеристики статистического распределения;
2. Выравнивание статистических рядов;
3. Критерии согласия.

**Студент должен уметь:** рассчитывать параметры статистических распределений случайных величин.

**Задания для самостоятельной внеаудиторной работы студентов по указанной теме:**

1) Ознакомиться с теоретическим материалом по теме занятия с использованием конспектов лекций, рекомендуемой учебной литературой.

2) Ответить на вопросы для самоконтроля:

   1. Особенности обработки ограниченного числа опытов. Оценки для неизвестных параметров закона распределения.
   2. Оценки для математического ожидания и дисперсии.
   3. Доверительный интервал. Доверительная вероятность.
   4. Точные методы построения доверительных интервалов для параметров случайной величины, распределенной по нормальному закону.
   5. Оценка вероятности по частоте.
   6. Оценки для числовых характеристик системы случайных величин
   7. Обработка стрельб.
   8. Сглаживание экспериментальных зависимостей по методу наименьших квадратов.

3) Проверить свои знания при помощи заданий:

**Решение типового варианта.**

**Задача 1.** *Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах мишень будет поражена ровно 8 раз. Изменится ли вероятность попадания, если число выстрелов и поражений мишени увеличится в 10 раз?*

**Решение.** *Вероятность поражения мишени при одном выстреле постоянна* $p = 0.75 \Rightarrow q = 1 - 0.75 = 0.25; n = 10; k = 8$. *Воспользовавшись формулой Бернулли, найдем:*

$$P_{10}(8) = \frac{10!}{8!2!} 0.75^8 0.25^2 = 45 * 0.1001 * 0.0625 = 0.281;$$

*при увеличении числа выстрелов и поражений в 10 раз трудно производить расчеты по формуле Бернулли. Так как* $np = 75 > 10; nq = 25 > 10$, *то используя локальную теорему Муавра-Лапласа получим:*

$$P_{100}(80) \simeq \frac{1}{\sqrt{100 * 0.75 * 0.25}} \varphi\left(\frac{80 - 100 * 0.75}{\sqrt{100 * 0.75 * 0.25}}\right) = 0.23 * \varphi(1.15) = 0.047.$$

**Задача 2.** *Даны 5 наблюдений над случайной величиной скорости автомобилей на одном из участков шоссе (км/ч):* $X_1 = 85.9; X_2 = 89.1; X_3 = 72.3; X_4 = 82.5; X_5 = 70.6$. *Требуется построить доверительный интервал для математического ожидания* $m$ *при* $\gamma = 0.95$, *когда дисперсия* $\sigma^2$ *- неизвестна. Как изменится доверительный интервал, если при тех же значениях средней скорости и выборочной дисперсии число наблюдений возрастет в 10 раз?*

**Решение.** *Из условия известно, что* $n = 5;\ X_1 = 85.9; X_2 = 89.1; X_3 = 72.3; X_4 = 82.5; X_5 = 70.6$. *По имеющимся данным вычислим:*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{5}(85.9 + 89.1 + 72.3 + 82.5 + 70.6) = 80.8,$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{5} \cdot 271.49 = 54.29,$$

$$\sqrt{S_X^2} = \sqrt{54.29} = 7.37.$$

*По таблице 4 приложения находим, что при* $n = 5; \gamma = 1 - 2\delta = 0.95 \Rightarrow \delta = 0.025$ *и* $t_\delta(n-1) = t_{0.025}(4) = 2.78$. *Вычислим доверительный интервал:*

$$80.08-2.78\frac{7.37}{\sqrt{5-1}}\leq m\leq 80.08+2.78\frac{7.37}{\sqrt{5-1}};$$

$$69.84\leq m\leq 90.32$$

*Получили доверительный интервал для скорости, которую можно ожидать на данном участке шоссе.*

*Если число наблюдений возрастет в 10 раз (* $n=50$ *), вновь воспользуемся той же формулой для построения интервала. По таблице 4 приложения находим, что* $t_\delta(n-1)=t_{0.025}(49)=2.01$. *Тогда*

$$80.08-2.01\frac{7.37}{\sqrt{5-1}}\leq m\leq 80.08+2.01\frac{7.37}{\sqrt{5-1}};$$

$$77.96\leq m\leq 82.20.$$

**Задача 3.** *Социологические обследования дали следующие результаты. Из 1000 опрошенных людей 849 никогда не обращались за юридической консультацией, из них 649 занимаются предпринимательской деятельностью, а 200 работают на государственных предприятиях. И из 151 обращавшегося респондента 101 человек занимался предпринимательской деятельностью, а 50 – нет. По имеющимся данным:1) построить таблицу сопряженности; 2) оценить условные и безусловные вероятности признаков; 3) оценить тесноту связи между признаками; 4) при уровне значимости* $\alpha=0.01$ *проверить нулевую гипотезу о независимости исследуемых признаков; 5) изменится ли характер зависимости, если все данные увеличить в 25 раз?*

**Решение.** 1. *Пусть признак A – человек занимается предпринимательской деятельностью; признак B – человек обращался за юридической консультацией. Тогда, согласно условию:* $n=1000; n(AB)=101; n(A\bar{B})=649; n(\bar{A}B)=50; n(\bar{A}\bar{B})=200$ *и таблица сопряженности имеет вид*

| Признаки | $B$ | $\bar{B}$ | Всего |
|---|---|---|---|
| $A$ | 101 | 649 | 750 |
| $\bar{A}$ | 50 | 200 | 250 |
| Всего | 151 | 849 | 1000 |

2. *Вычислим оценки условных и безусловных вероятностей.*

$$\hat{P}(A\,|\,B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{101}{151}=0.67, \hat{P}(\bar{A}\,|\,B)=1-0.67=0.33,$$

$$\hat{P}(B \mid A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{101}{750} = 0.135, \hat{P}(\bar{B} \mid A) = 1 - 0.135 = 0.865,$$

$$\hat{P}(\bar{A} \mid \bar{B}) = \frac{200}{849} = 0.24, \hat{P}\left(A \mid \bar{B}\right) = 1 - 0.24 = 0.76,$$

$$\hat{P}(\bar{B} \mid \bar{A}) = \frac{200}{250} = 0.8, \hat{P}\left(B \mid \bar{A}\right) = 1 - 0.8 = 0.2,$$

$$\hat{P}(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{750}{1000} = 0.75, \hat{P}(\bar{A}) = 1 - 0.75 = 0.25,$$

$$\hat{P}(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{151}{1000} = 0.151, \hat{P}(\bar{B}) = 1 - 0.151 = 0.849.$$

*3. Тесноту связи между признаками оценим, вычислив эмпирический коэффициент корреляции событий*

$$\hat{R} = \frac{101 \cdot 200 - 50 \cdot 649}{\sqrt{151 \cdot 849 \cdot 750 \cdot 250}} = \frac{12250}{155039.71} = 0.079\,.$$

*Так как полученное значение коэффициента* $\hat{R}$ *мало, можно предположить, что зависимость между А и В практически отсутствует.*

*4. Найдем значение статистики* $Y_2$

$$Y_2 = \frac{1000\left(\left|101 \cdot 200 - 50 \cdot 649\right| - \dfrac{1000}{2}\right)^2}{151 \cdot 849 \cdot 750 \cdot 250} = 5.74 < 6.635.$$

*Из таблицы 3 приложения нашли при* $\alpha = 0.01$ $\chi^2_{0.01}(1) = 6.635$. *Учитывая, что* $\left|Y_2\right| < \chi^2_{0.01}(1)$ *нулевая гипотеза принимается и делается вывод – обращение за юридической консультацией не зависит от того занимается ли человек своим бизнесом или работает на государственном предприятии.*

$$\varphi = \sqrt{\frac{5.74}{1000}} = 0.075\,.$$

*5. При увеличении данных в 25 раз опять подсчитаем статистику*

$$Y_2 = \frac{1000 \cdot 25\left(\left|101 \cdot 200 - 50 \cdot 649\right| - \dfrac{1000}{2 \cdot 25}\right)^2}{151 \cdot 849 \cdot 750 \cdot 250} = 155.56 > 6.635.$$

*Следовательно, нулевая гипотеза отвергается, что говорит о наличии связи между признаками, оценим тесноту связи:*

$$\varphi=\sqrt{\frac{155.56}{25000}}=0.079,$$

*Теснота связи между А и В остается прежней, ее значения не зависят от числа наблюдений.*

**Задача 4.** *Случайная величина* $X$ *- число лет, которые служащие проработали в торговой компании;* $Y$ *- сколько отпусков за это время они брали в этой компании. Результаты наблюдений над случайными величинами* $X$ *и* $Y$*: приведены в следующей таблице:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *X* | *2* | *3* | *4* | *5* |
| *Y* | *3* | *4* | *6* | *8* |

*Построить уравнения прямых регрессий* $Y$ *по* $X$ *и* $X$ *по* $Y$. *Найти выборочный коэффициент линейной корреляции* $r^*_{XY}$.

**Решение**. *Из условия находим:*

$$n=4;\overline{X}=\frac{1}{4}(2+3+4+5)=3.5;\overline{Y}=\frac{1}{4}(3+4+6+8)=5.25;\overline{XY}=\frac{1}{4}(2\cdot3+3\cdot4+4\cdot6+5\cdot8)=20.5;$$

$$S_X^2=\frac{1}{4}\left[(2-3.5)^2+(3-3.5)^2+(4-3.5)^2+(5-3.5)^2\right]=1.25;$$

$$S_Y^2=\frac{1}{4}\left[(3-5.25)^2+(4-5.25)^2+(6-5.25)^2+(8-5.25)^2\right]=3.69;$$

*Воспользовавшись предложенными формулами, вычислим коэффициенты прямых регрессий* $Y$ *по* $X$ *и* $X$ *по* $Y$.

$$\rho_{Y/X}=\frac{20.5-3.5\cdot5.25}{1.25}=1.7;\rho_{X/Y}=\frac{20.5-3.5\cdot5.25}{3.69}=0.58.$$

*И по формулам построим уравнения прямых регрессий и выборочный коэффициент линейной корреляции.*

$$Y_X-5.25=1.7(X-3.5)\Rightarrow Y_X=1.7X-0.7;$$

$$X_Y-3.5=0.58(Y-5.25)\Rightarrow X_Y=0.58Y+0.45.$$

$$r^*_{XY}=\sqrt{1.7\cdot0.58}=0.99.$$

**Задача 5.** *При обработке наблюдений из 900 торговых точек за количеством проданных шампуней и соответствующих им лечебных бальзамов был найден выборочный коэффициент линейной корреляции* $r^*_{XY} = 0.8$. *По имеющимся данным построить доверительный интервал для коэффициента линейной корреляции* $r_{XY}$ *с доверительной вероятностью* $\gamma = 0.95$.

**Решение.** *По таблице приложения 2 находим для* $\gamma = 0.95$ *соответствующее значение* $U_\delta = 1.96$. *Согласно формуле доверительный интервал выглядит следующим образом:*

$$0.8 - 1.96\frac{1-(0.8)^2}{\sqrt{900}} \le r_{XY} \le 0.8 + 1.96\frac{1-(0.8)^2}{\sqrt{900}}.$$

$$0.8 - 0.023 \le r_{XY} \le 0.8 + 0.023;$$

$$0.777 \le r_{XY} \le 0.823.$$

*Следовательно, при заданной доверительной вероятности истинное значение* $r_{XY}$ *может варьировать в пределах от 0,777 до 0,823 и зависимость между случайными величинами X и Y сильная.*

**Задача 6.** *По выборке* $n = 122$ *найден выборочный коэффициент линейной корреляции* $r^*_{XY} = 0.4$. *При уровне значимости* $\alpha = 0.05$ *проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента линейной корреляции* $H: r_{XY} = 0$ *против* $K: r_{XY} \ne 0$.

**Решение.** *Известно, что* $n = 122$, $r^*_{XY} = 0.4$. *Вычислим статистику* $T$ *:*

$$T = \frac{0.4\sqrt{122-2}}{\sqrt{1-(0.4)^2}} = 4.78.$$

*Из таблицы приложения 4 находим, что при* $\nu = n - 2 = 120, \alpha = 0.05 = 2\delta \Rightarrow \delta = 0.25$, *значение критической точки распределения Стьюдента* $t_\delta(k) = t_{0.025}(120) = 1.9799$. *Поскольку 4,78>1,9799, то есть* $T > t_\delta(k)$, *то нулевая гипотеза отвергается, величины X и Y зависимы, поскольку* $r_{XY} \ne 0$.

**Задача 7.** *При проведении социологического обследования, касающегося выявления жизненных ценностей и приоритетов у людей,.. в качестве одной из проблем выдвигалась задача установить, существует ли зависимость между материальным положением человека и его удовлетворенностью своим образом жизни, которую предполагалось оценить по пятибалльной шкале. Результаты обследования представлены в таблице:*

| *X - среднемесячный доход (тыс. руб)* | *Y – удовлетворенность образом жизни в баллах* |
|---|---|

| | |
|---|---|
| *1. ниже 2* | *3,74* |
| *2. 2-6* | *4,05* |
| *3. 6-10* | *4,68* |
| *4. 10-15* | *4,52* |
| *5. выше 15* | *4,47* |

*Вычислить ранговый коэффициент корреляции Спирмена, установить, зависимы ли величины.*

**Решение.** *Проранжируем величину* $X$ *следующим образом: самому большому доходу «выше 15» присвоим ранг 1; доходу «10-15» - ранг 2 и так далее. Аналогично проранжируем величину* $Y$*, присвоив значению 4,68 ранг 1; значению 4,52 – ранг 2;…; значению 3,74 – ранг 5. Исходная таблица может быть записана следующим образом:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_i(X)$ | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* |
| $R_i(Y)$ | *3* | *2* | *1* | *4* | *5* |

*Воспользовавшись формулой для вычисления рангового коэффициента корреляции Спирмена, получим*

$$\tau_{XY}^{*} = 1 - \frac{1}{5^3 - 5}\left[(1-3)^2 + (2-2)^2 + (3-1)^2 + (4-4)^2 + (5-5)^2\right] = 0.93.$$

*По величине* $\tau_{XY}^{*}$ *можно сделать вывод, что между материальным положением человека и его удовлетворенностью своим образом жизни существует довольно сильная зависимость.*

**Вариант 1.**

1. В ходе этнографической экспедиции по двум этнокультурным группам (районам) Архангельской области были выявлены наиболее часто встречающиеся узоры русской вышивки: конь и крылатая птица. На основе частоты появления этих образов орнамента в обследуемых этнокультурных группах была составлена следующая таблица:

| Район | конь | крылатая птица |
|---|---|---|
| Онежский | 7 | 40 |
| Плисецкий | 11 | 17 |

По имеющимся данным построить таблицу сопряженности и по ней 1) оценить тесноту связи между признаками; 2) при уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить нулевую гипотезу о независимости исследуемых признаков: вид орнамента и принадлежность его к определенной группе.

2. В ходе медицинского обследования стояла задача проверить аллергенность нового препарата. Из 100 пациентов с одним и тем же заболеванием часть принимала старый общеизвестный препарат X, а часть принимала новый препарат Y. Из принимавших старый препарат: у 48 человек была нормальная реакция, а у 4 человек обнаружена аллергия. Среди тех, кто принимал новый препарат: у 42 зафиксирована нормальная реакция,. А у 6 человек аллергия. Проверить гипотезу о равенстве вероятностей возникновения аллергии при применении препаратов X и Y, когда уровень значимости равен 0,02. останется ли принятое решение о проверке данных гипотез справедливым, если при тех же значения частостей число пациентов возрастет в 10 раз?

3. На заводе изготовлен новый игровой автомат, который должен обеспечить появление выигрыша в одном случае из 100 бросаний монеты. Для проверки годности автомата произведено 400 испытаний, где выигрыш появился 5 раз. Оценить вероятность появления выигрыша. Построить приближенные доверительные границы для этой вероятности при $\gamma = 0.9973$, используя: преобразование арксинуса. Как изменится доверительный интервал, если при той же частости появления выигрыша число наблюдений возрастет в 20 раз?

4. Результаты наблюдений над величинами $X$ и $Y$ приведены в следующей таблице:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $1$ | $2$ | $-1$ | $3$ |
| $Y$ | $2$ | $3$ | $1$ | $4$ |

Предполагая, что между $X$ и $Y$ имеется зависимость вида $Y = aX + b$ найти неизвестные коэффициенты $a$ и $b$ по методу наименьших квадратов. Вычислить $Y$ при $X_5 = 1.5; X_6 = 4$.

**Рекомендуемая литература:**

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Кремер Н.Ш. 2-е изд., перераб. и доп. - М.: 2004. — 573 с. Это не только учебник, но и краткое руководство к решению задач.
6. ЭБС Znanium: Балдин, К. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : Учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рукосуев. - 2-е изд. - М.: Дашков и К, 2010. - 473 с.
7. ЭБС Znanium: Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. - 2-е изд., испр. и перераб. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 240 с.
8. Znanium: Основы математической статистики: Учебник / Г.А. Соколов. - 2-е изд. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 368 с.