

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра Математика

Гулай Т. А.

## **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

---

наименование дисциплины

Методические указания по организации самостоятельной  
работы студентов

**38.03.05 Бизнес-информатика**  
наименование направления

Ставрополь  
2019

Самостоятельная работа студента является важной формой усвоения курса математики.

В неё входят: изучение теоретического и практического материала, самостоятельное решение задач, самоконтроль по изученным темам с помощью вопросов, выполнение контрольных, самостоятельных и расчетно-графических работ.

Рассмотрим подробнее особенности самостоятельной работы студента.

Основной частью такой работы является изучение теоретического материала. Необходимый минимум теоретического материала предоставлен в лекционном курсе, учебном пособии и электронном учебно-методическом комплексе (ЭУМК).

Углублённое изучение разделов предлагается осуществить по учебным пособиям, представленным в списке литературы.

При работе с теоретическим материалом ЭУМК советуем придерживаться следующих правил:

- предварительно ознакомиться с содержанием интересующего раздела или темы;

- углублённо изучить текст, позволяющий усвоить главные положения, логическое обоснование излагаемого материала и получаемых выводов (особое внимание следует обращать на определение основных понятий);

- составить план прочитанного текста или законспектировать его.

Рекомендуем составлять конспект (краткое изложение содержания рассматриваемой темы) объёмом в 10 – 15 раз меньше прочитанного текста. В него необходимо выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с ведущим преподавателем. Желательно в конспект вносить собственные мысли и комментарии к содержанию осваиваемого раздела.

Правильно составленный студентом конспект показывает преподавателю степень понимания и усвоения изучаемого теоретического материала.

Расширение и углубление изученного теоретического материала возможно только при решении задач по соответствующим темам.

Основная часть практического материала представлена в ЭУМК и рабочих тетрадях. При этом проверить уровень усвоения материала можно с помощью заданий и тестов для самоконтроля.

Работу с практическим материалом ЭУМК и рабочих тетрадей удобно осуществлять, придерживаясь следующих рекомендаций:

- решение задач должно опираться на изученный базовый теоретический материал, разобранные в ЭУМК, учебных пособиях и рабочих тетрадях примеры;

- решая задачи, нужно обосновывать каждый этап, исходя из теоретических положений курса, при этом если есть несколько путей для решения задачи, то необходимо выбрать из них самый рациональный (желательно до начала вычислений составить краткий план решения задачи);

- решения задач и примеров следует излагать подробно в рабочих или специально заведённых тетрадях, располагая вычисления в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных записей;

- чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями (если необходимо, можно использовать чертежные инструменты);

- решение каждой задачи желательно осуществлять в общем виде с выводом формулы, в которую нужно подставлять числовые значения (если они даны) и довести до окончательного ответа, которого требует условие;

- полученный ответ, если возможно, следует проверить;

- возникшие вопросы по решению задач лучше выписать отдельно на полях тетради. Ответы на них можно получить на консультации или при помощи справочной литературы.

Важнейшим этапом самостоятельной работы студента является осуществление самоконтроля как системы обратных связей, дающих возможность оценивать и регулировать его деятельность по результатам её протекания.

Принципы реализации самоконтроля:

- после изучения определенной темы по теоретическому материалу и решения достаточного количества соответствующих задач воспроизводить по памяти основные определения, свойства и формулировки теорем;

- для закрепления и проверки прочности усвоения изученного материала применять вопросы, приведенные в ЭУМК и данном методическом пособии, (в случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале);

- если недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала, то рекомендуем вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

Важным критерием усвоения теоретического материала считаем умение решать задачи, которое оказывается необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), он может обратиться к ведущему преподавателю для получения от него указаний с помощью консультации.

За консультацией необходимо обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самоконтроля.

В процессе изучения различных тем студент должен выполнить ряд

контрольных, самостоятельных и расчётно-графических работ, которые позволяют преподавателю и студенту судить о степени усвоения студентом соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы.

Приступать к выполнению контрольного задания желательно после решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию.

Итогом самостоятельной работы студента является сдача экзамена.

На экзамене выясняется, прежде всего, отчетливое усвоение всех теоретических и прикладных вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач.

### Самостоятельная работа обучающегося

Виды самостоятельной работы	Очная форма, часов		Заочная форма, часов	
	к текущему контролю	к промежуточной аттестации	к текущему контролю	к промежуточной аттестации
Подготовка к устному опросу	10		10	
Подготовка к тестированию	10		18	
Подготовка к контрольным точкам	8			
Подготовка к написанию контрольной работы				20
Подготовка к зачету		8		10
<b>Итого</b>	<b>28</b>	<b>8</b>	<b>28</b>	<b>30</b>

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

### Вопросы к зачету

1. Понятие о дифференциальном уравнении. Постановка задачи.
2. Основные понятия: обыкновенное дифференциальное уравнение, порядок уравнения, общее и частное решения, общий интеграл, интегральная кривая, интегрирование диф-ференциального уравнения.
3. Задачи экономики, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям.
4. Дифференциальное уравнение первого порядка.
5. Начальные условия. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Геометрический смысл.
6. Метод изоклин. Поле направлений.
7. Неполные дифференциальные уравнения.
8. Дифференциальные уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах.
9. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.
10. Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним.
11. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

12. Уравнение Бернулли.
13. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
14. Линейные дифференциальные высшего порядка: основные понятия.
15. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.
16. Общие свойства решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Структура общего решения.
17. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
18. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения.
19. Уравнения с правой частью специального вида.
20. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.
21. Системы дифференциальных уравнений: основные понятия и определения.
22. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Методы решения.
23. Основные понятия и определения теории разностных уравнений. Задачи экономики, приводящие к разностным уравнениям.
24. Разностное уравнение первого порядка.
25. Разностное уравнение второго порядка.
26. Применение аппарата дифференциальных и разностных уравнений в экономических исследованиях.
27. Естественный рост и задача Бернулли о кредитовании.
28. Рост денежного вклада в сбербанке.
29. Рост выпуска дефицитной продукции.
30. Выбытие фондов. Рост производства с учетом инвестиций.
31. Модель экономического цикла Самуэльсона-Хикса.
32. Паутинообразная модель рынка.
33. Динамическая модель Леонтьева.
34. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений.
35. Разностные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.
36. Метод Эйлера и его модификации.
37. Метод Рунге-Кутты.
38. Метод конечных разностей решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

## УПРАЖНЕНИЯ

### Тема. Дифференциальные уравнения.

1. Найти общее решение уравнений:

а)  $(xy^2 + x)dx - (y + x^2y)dy = 0$ ; б)  $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ ; в)  $y' - 2y = e^{2x}$ .

2. Найти общее решение уравнения:

а)  $y'' - 2y' - 3y = 0$ ; б)  $y'' - 2y' + 5y = 0$ ; в)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

3. Решить задачу Коши  $y' = 12x(y^2 + 16)$ ,  $y(0) = -4$  и укажите промежуток наибольшей длины, на котором решение этой задачи определено.

4. Решить задачу Коши  $y' = \frac{9y}{(15-2x)(x-9)}$ ,  $y(6) = 8$  и вычислить для решения этой задачи значение  $y(3)$ .
5. Найти решение  $x = x(y)$  уравнения  $(x-2y)dx + (10y-2y^3-2x)dy = 0$ , удовлетворяющее условию  $x(2) = 3$ . Вычислить для этого решения значение  $x(3)$ .
6. Найти все решения уравнения  $y' = -\frac{3}{x}y + \frac{4-12x^{21}}{x^9}$ .
7. Решить задачу Коши  $y'' - 6y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 8$  и вычислить для решения этой задачи значение  $y(1)$ .
8. Найти все значения параметра  $b$ , при которых нулевое решение уравнения  $y''' + (6+b)y'' + 5y' - by = 0$  асимптотически устойчиво.
9. Решить уравнение  $(x+2y+4)dx + (2y-5x+16)dy = 0$ .
10. Решить уравнение  $y' = 2y \operatorname{ctg} x + 12 \sin 4x \cdot \sin^2 x$ .
11. Решить систему уравнений
- $$\begin{cases} dx/dt = -4x + 3z, \\ dy/dt = 5x + y - 3z, \\ dz/dt = -5x + y + 5z \quad (\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = \dots). \end{cases}$$
12. Решить уравнение  $y'' + 6y' + 9y = \frac{6e^{-3x}}{x^3}$ .
13. Решить уравнение  $y' = \frac{3y}{x} - 4y^5 x^3$ .
14. Решить задачу Коши  $yy'' + 4y^4(y')^6 = 3(y')^2$ ,  $y(1) = -1, y'(1) = 1$ .
15. Решить задачу Коши  $xy^4 y'' + 4x^4(y')^5 = xy^3(y')^2 + 3y^4 y'$ ,  $y(1) = -1, y'(1) = 1$ .
- 16.
17. Решить уравнение  $y''' - 2y' - 4y = 75 \sin x$  ( $\lambda_1 = 2$ ).
18. Решить уравнение  $(4x^2 - y^2)dx + (6x^2 + 3xy)dy = 0$ .
19. Найти положения равновесия системы уравнений  $\begin{cases} dx/dt = x^2 - e^{y-x}, \\ dy/dt = x^3 - x, \end{cases}$

Определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем.

### Тема. Разностные уравнения

1. Для последовательности  $\{y_k\}$ , удовлетворяющей рекуррентному уравнению  $y_{k+1} = 4y_k - 9k^2 + 5; k = 0, 1, 2, \dots$  и условию  $y_0 = 0$ , вычислить величину  $y_{16}/y_{10}$ .

2. Указать все возможные значения дроби  $y_6/y_9$  для всех тех решений рекуррентного уравнения  $y_{k+2} + 3y_{k+1} + 9y_k = 0; k = 0, 1, 2, \dots$ , для которых она определена.

3. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k - y_k, \\ y_{k+1} = 2x_k + 6y_k; k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

4. Решить неоднородную систему уравнений 
$$\begin{cases} dx/dt = 3x - y + 12e^{7t} \\ dy/dt = 2x + 6y \end{cases}$$
 и изобразить фазовый портрет однородной системы.

5. Указать все возможные значения дроби  $y(x - (\pi/3))/y(x)$  для всех тех решений уравнения  $y'' - 4y' + 13y = 0$ , для которых она определена.

6. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x_{k+1} = -4x_k + 3z_k, \\ y_{k+1} = 5x_k + y_k - 3z_k, \\ z_{k+1} = -5x_k + y_k + 5z_k; k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

7. Решить уравнение

$$y_{k+3} - 2y_{k+1} - 4y_k = 51 \cdot 3^k + 2^{k+1}(20k + 14); k = 0, 1, 2, \dots$$