Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра Математика

Составитель: доцент Литвин Д.Б.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РГР №6

по дисциплине

МАТЕМАТИКА

наименование дисциплины

21.03.02 Землеустройство

направление подготовки

Городской кадастр

профиль(и) подготовки

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Ставрополь, 2019

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1 Случайная величина и ее закон распределения

Случайная величина (СВ) **-** величина, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Различают непрерывные СВ (НСВ) и дискретные СВ (ДСВ).

Случайные величины будем обозначать *X*,*Y*,... а их возможные значения $x_1, x_2, ...; \quad y_1, y_2, ...$

Законом распределения (ЗР) случайной величины называется всякое правило, устанавливающее связь между всеми возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

ЗР может быть задан в различных формах: ряд и многоугольник распределения для ДСВ, аналитическое и графическое представление плотности распределения для НСВ. Функция распределения является универсальной формой представления ЗР как НСВ, так и ДСВ.

Функция распределения (интегральная) *F(x) СВ X* - вероятность того, что *СВ X* примет значение меньше *x:*

$$F(x) = P(X < x). \tag{1}$$

Основные свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$;
2) $F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$; $F(\infty) = P(X < \infty) = 1$.
3) если $x_2 \ge x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$;
4) $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$; (2)

Плотность распределения вероятности СВ $f(x)$- предел отношения вероятности попадания *СВ* на интервал, содержащий точку *x*, к длине этого интервала, когда $\Delta x \to 0$

$$f(x) = F'(x), \text{ откуда } \quad F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{3}$$

Основные свойства плотности вероятности

$$f(x) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1; \quad P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \qquad (4)$$

Пример 1. *Дискретная случайная величина X задана рядом распределения*

x_i	2	4	7
p_i	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ *и начертить ее график.*

Решение.

$x \leq 2, \quad F(x) = P(X < 2) = 0;$

$2 < x \leq 4, \quad F(x) = P(X < 4) = F(2) + P(2 \leq X < 4) = 0 + 0{,}5 = 0{,}5;$

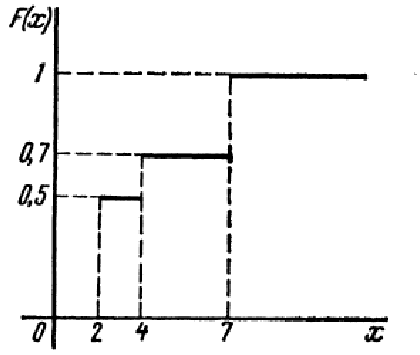
$4 < x \leq 7, \quad F(x) = P(X < 7) = F(4) + P(4 \leq X < 7) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7;$

$x > 7, \quad F(x) = F(7) + P(X \geq 7) = 0{,}7 + 0{,}3 = 1.$

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ 0{,}5 & \text{при } 2 < x \leq 4, \\ 0{,}7 & \text{при } 4 < x \leq 7, \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рисунке.



Пример 2. *Задана непрерывная случайная величина X своей функцией плотности распределения f(x).*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leq \pi/4 \\ A\cos 2x, & \text{при} \quad -\pi/4 < x \leq \pi/4 \\ 0, & \text{при} \quad x > \pi/4 \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент A, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

Решение.

Найдем коэффициент A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Найдем функцию распределения:

$$x \le -\frac{\pi}{4}, \quad F(x) = P\left(X < x\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(t\right)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0\,;$$

$$-\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{4}, \;\; F\left(x\right) = F\left(-\pi/4\right) + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2tdt = \frac{\sin 2t}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}\,;$$

$$x > \frac{\pi}{4}: \quad F\left(x\right) = F\left(\pi/4\right) + \int_{\pi/4}^{x} 0dt = \frac{\sin 2\left(\pi/4\right)}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

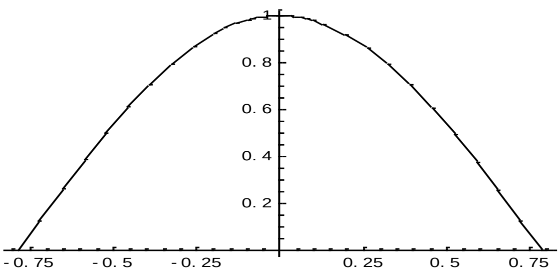
Итак:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le \pi/4; \\ \cos 2x, & при \quad -\pi/4 < x \le \pi/4; \\ 0, & при \quad x > \pi/4. \end{cases}$$

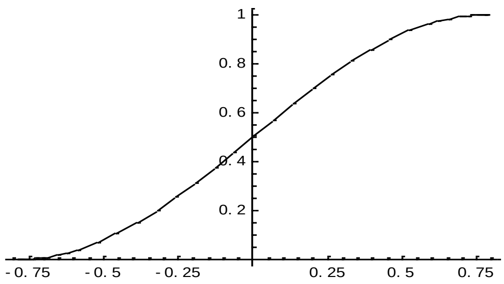
$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le \pi/4; \\ \dfrac{\sin 2x + 1}{2}, & при \quad -\pi/4 < x \le \pi/4; \\ 1, & при \quad x > \pi/4. \end{cases}$$

Построим график плотности f(x) и функции F(x) распределения:

f(x)



F(x)



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$:

- *через плотность распределения* (4):

$$P\left(\frac{\pi}{6}<x<2\right)=\int_{\pi/6}^{2} f(x)dx=\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx+\int_{\pi/4}^{2} 0dx=\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0,067;$$

- *через функцию распределения* (2):

$$P\left(\frac{\pi}{6}<x<2\right)=F(2)-F(\pi/6)=1-\frac{\sin(\pi/3)+1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0,067.$$

1.2 Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание (МО) СВ - средневзвешенное значение СВ

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i; \qquad M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx \tag{5}$$

Свойства МО СВ (здесь С=const):

$$\begin{aligned}
&1)\ M(C)=C;\\
&2)\ M(CX)=C\cdot M(X);\\
&3)\ M(X_1\pm X_2)=M(X_1)\pm M(X_2);\\
&4)\ M(X_1\cdot X_2)=M(X_1)\cdot M(X_2) \text{ - только для независимых СВ;}\\
&5)\ M(X\pm C)=M(X)\pm C.
\end{aligned} \tag{6}$$

Мода $M_o(X)$ - наиболее вероятное значение СВ, значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения. Если распределение имеет два одинаковых максимума, то его называют бимодальным.

Медиана $M_e(X)$ - значение, при котором функция распределения F(x) равна 1/2. Медиана определяется равенствами

$$F\left[M_e(X)\right]=0,5; \qquad P\left[X<M_e(X)\right]=P\left[X>M_e(X)\right].$$

Дисперсией СВ *D(X)* называется средневзвешенный квадрат ее центрированного значения

$$D(X)=M\left((X-a)^2\right), \text{ где } a=M(X).$$

$$D(X)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\,p_i, & \text{для ДСВ}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 f(x)dx, & \text{для НСВ}\end{cases} \quad (7)$$

Дисперсия СВ обладает следующими свойствами (здесь C=const):

$$\begin{aligned}&1)\ D(C)=0;\\ &2)\ D(CX)=C^2D(X);\\ &3)\ D(X)=M(X^2)-M^2(X);\\ &4)\ D(X_1\pm X_2)=D(X_1)+D(X_2).\end{aligned} \quad (8)$$

Среднее квадратическое отклонение (СКО) (стандарт) СВ *X - корень из дисперсии*

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}\,. \quad (9)$$

Начальный теоретический момент k-го порядка α_k *- математическое ожидание (средневзвешенное значение) k-й степени СВ* $\alpha_k=M\left(X^k\right)$

$$\alpha_k=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^k; \qquad \alpha_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx \quad (10)$$

Центральный теоретический момент k-го порядка μ_k *- математическое ожидание (средневзвешенное значение) k-й степени центрированной СВ* $\mu_k=M\left((X-a)^k\right)$:

$$\mu_k=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-a)^k; \quad \mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}[x-a]^k f(x)dx, \text{ где } a=M(X). \quad (11)$$

Очевидно, что $\alpha_1=M(X)$ - МО есть первый начальный момент;

$\mu_1=0$ - первый центральный момент равен нулю;

$\mu_2=D(X)$ - дисперсия есть второй центральный момент СВ.

Центральные моменты выражаются через начальные по формулам:

$$\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2; \quad \mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3; \quad \mu_4=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2-3\alpha_1^4. \quad (12)$$

2 НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Неравенство Чебышева. *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа* ε*, не меньше, чем* $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$*:*

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \text{или} \quad P\left(\left|X-M\left(X\right)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (13)$$

3 ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1 Закон распределения двумерной СВ

Двумерную величину геометрически можно истолковать как случайную точку $M\left(X,Y\right)$ на плоскости *xOy* либо как случайный вектор *OM*.

Функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины называют функцию $F\left(x,y\right)$, определяющую для каждой пары чисел $\left(x,y\right)$ вероятность того, что *X* примет значение, меньшее *x*, и при этом *Y* примет значение, меньшее *y*:

$$F\left(x,y\right)=P\left(X<x,Y<y\right). \qquad (14)$$

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1) $0\leq F\left(x,y\right)\leq 1.$
2) $F\left(x_2,y\right)\geq F\left(x_1,y\right)$, если $x_2>x_1$, $\quad F\left(x,y_2\right)\geq F\left(x,y_1\right)$, если $y_2>y_1$.
3) $F\left(-\infty,y\right)=0,\quad F\left(x,-\infty\right)=0,\quad F\left(-\infty,-\infty\right)=0,\quad F\left(\infty,\infty\right)=1.$
4) $F\left(x,\infty\right)=F_1\left(x\right);\quad F\left(\infty,y\right)=F_2\left(y\right).$
5) $P\left(x_1<X<x_2,y_1<Y<y_2\right)=\left[F\left(x_2,y_2\right)-F\left(x_1,y_2\right)\right]-\left[F\left(x_2,y_1\right)-F\left(x_1,y_1\right)\right].$

Двумерной плотностью вероятности непрерывной двумерной случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения:

$$f\left(x,y\right)=\frac{\partial^2 F\left(x,y\right)}{\partial x\partial y}. \qquad (15)$$

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения по формуле

$$F\left(x,y\right)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f\left(x,y\right)dxdy. \qquad (16)$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D определяется равенством

$$P\left[(X,Y)\subset D\right]=\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy. \qquad (17)$$

Свойства двумерной плотности вероятности (вероятности для ДСВ):

1) $f(x,y)\geq 0$; $\qquad p_{ij}\geq 0;\ \forall i,\forall j$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$; $\qquad \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}=1$, *где* $p_{ij}=p\left(X=x_i,Y=y_j\right)$.

Законы распределения составляющих двумерной СВ

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \qquad f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \qquad (18)$$

$$p_{i,\Sigma}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=p\left(X=x_i\right); \quad p_{\Sigma,j}=\sum_{i=1}^{m} p_{ij}=p\left(Y=y_j\right).$$

Условным законом распределения СВ X называют распределение $f_1(x/y)$ этой СВ (плотности ее вероятности для НСВ) при условии, что вторая СВ *Y* принимает некоторое постоянное значение. Аналогично и для второй СВ $f_2(y/x)$. Для совместного распределения имеют место соотношения:

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y/x)=f_2(y)\cdot f_1(x/y);$$

$$p_{ij}=p_{\Sigma,j}\cdot p\left(x_i/y_j\right)=p_{i,\Sigma}\cdot p\left(y_j/x_i\right), \qquad (19)$$

откуда для условных законов распределения имеем, см. (18):

$$f_1(x/y)=f(x,y)/f_2(y); \qquad f_2(y/x)=f(x,y)/f_1(x);$$

$$p\left(x_i/y_j\right)=p_{ij}/p_{\Sigma,j}; \qquad p\left(y_j/x_i\right)=p_{ij}/p_{i,\Sigma}. \qquad (20)$$

Для независимых СВ условные распределения равны безусловным:

$$f_1(x/y)=f_1(x); \quad f_2(y/x)=f_2(y);$$

$$p\left(x_i/y_j\right)=p_{i,\Sigma}; \qquad p\left(y_j/x_i\right)=p_{\Sigma,j},$$

откуда

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y); \qquad p_{ij}=p_{i,\Sigma}\cdot p_{\Sigma,j}. \qquad (21)$$

3.2 Числовые характеристики случайных векторов

Математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y двумерной случайной величины (X,Y) (двойные интегралы берутся по области возможных значений системы):

$$M(X)=m_x=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i p_{ij}\,; \qquad M(Y)=m_y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_j p_{ij}\,; \tag{22}$$

$$M(X)=m_x=\iint xf(x,y)\,dxdy, \qquad M(Y)=m_y=\iint yf(x,y)\,dxdy;$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i^{\,2}p_{ij}-m_x^{\,2};$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_j-m_y)^2 p_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_j^{\,2}p_{ij}-m_y^{\,2}; \tag{23}$$

$$D(X)=\iint(x-m_x)^2 f(x,y)\,dxdy=\iint x^2 f(x,y)\,dxdy-m_x^{\,2};$$

$$D(Y)=\iint(y-m_y)^2 f(x,y)\,dxdy=\iint y^2 f(x,y)\,dxdy-m_y^{\,2}.$$

Корреляционным моментом μ_{xy} системы (X,Y) называют центральный момент $\mu_{1,1}$ порядка $1+1$:

$$\mu_{xy}=M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right];$$

$$\mu_{xy}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j p_{ij}-m_x m_y; \tag{24}$$

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\,dxdy-m_x m_y. \tag{25}$$

Коэффициент корреляции величин *X* и *Y*:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}, \quad |r_{xy}|\le 1. \tag{26}$$

3.3 Нормальный закон распределения на плоскости

Нормальный закон распределения на плоскости имеет следующую плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (*X, Y*)

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{1}{2\left(1-r_{xy}^2\right)}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}-2r_{xy}\frac{(x-m_x)}{\sigma_x}\cdot\frac{(y-m_y)}{\sigma_y}\right)} \tag{27}$$

Таким образом, нормальный закон на плоскости определяется 5 параметрами: m_x, m_y, σ_x, σ_y, r_{xy}, где m_x, m_y – математические ожидания, σ_x, σ_y – средние квадратические отклонения, r_{xy} – коэффициент корреляции X и Y.

Можно показать, что *для нормального ЗР понятия некоррелированности и независимости равносильны*, т.е. при $r_{xy} = 0$ $\quad f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

При $r_{xy} \neq 0$ случайные величины зависимы, а их условные ЗР также имеют нормальные распределения:

$$f_2(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{y/x}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{y/x}}\left(y - m_{y/x}\right)^2}, \qquad (28)$$

$$f_1(x/y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{x/y}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{x/y}}\left(y - m_{x/y}\right)^2} \qquad (29)$$

где $$\sigma_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2}\ , \qquad \sigma_{x/y} = \sigma_x \sqrt{1 - r_{xy}^2} \qquad (30)$$

- условные СКО случайных величин X и Y соответственно;

$$m_{y/x} = m_y + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - m_x\right), \qquad m_{x/y} = m_x + r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - m_y\right) \qquad (31)$$

- условное математические ожидания величин X и Y соответственно.

Последние выражения показывают, что в условном ЗР, например, величины Y при фиксированном $X=x$ от этого значения *зависит только математическое ожидание, но не дисперсия*.

Уравнения условных математических ожиданий $m_{y/x}$, $m_{x/y}$ (31) можно представить на плоскости линиями, которые называются ***линиями регрессии***.

Для нормального ЗР на плоскости *линии регрессии являются прямыми*, которые пересекаются в центре рассеивания (m_x, m_y).

Типовой вариант задания

1) В каждом из двух таймов футбольного матча обе команды вместе забивают три мяча с вероятностью 0,2, два мяча — с вероятностью 0,2, один мяч — с вероятностью 0,3 и с вероятностью 0,3 не забивают мячей. Найти математическое ожидание общего числа забитых в матче мячей.

2) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & -3<x<0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (–1; 1).

3) Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины X, если известно, что $P\{X<1\}=0{,}1$ и $P\{X>5\}=0{,}2$. Построить кривую распределения и найти ее максимум.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вентцель Е.**С. Теория вероятностей: учебник для студентов вузов. – 10 изд. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 576с.

2. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: уч. пособие. – 12-е изд. – М.: Высшее образование, 2008. - 479с.

3. **Кремер Н.Ш.** Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. - 543с.

4. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: уч. пособие для студентов вузов. – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1997. - 400с.

5. **Письменный Д.Т.** Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288с.

6. **Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б., Мелешко С.В.** Теория вероятностей и математическая статистика. - 2-е изд. - Ставрополь : Агрус, 2013. - 256с.

7. **Литвин Д.Б., Мелешко С.В.** Элементы теории вероятностей: Учебное пособие. – Ставрополь: Сервисшкола, 2017. – 86 с.