Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра Математика

Составитель: доцент Литвин Д.Б.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РГР №5

по дисциплине

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

наименование дисциплины

38.03.01 Экономика

направление подготовки

Бухгалтерский учет, анализ и аудит

профиль(и) подготовки

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Ставрополь, 2019

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Решение типового варианта контрольной работы.

Задание 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

а) $(xy+y)dx+(xy+x)dy=0$.

Решение. Попытаемся разделить переменные интегрирования. Для этого вынесем за скобки общий множитель: $y(x+1)dx+x(y+1)dy=0$, разнесем слагаемые: $y(x+1)dx=-x(y+1)dy$; выражая $\frac{dy}{dx}$ из полученного уравнения убедимся в том, что $\frac{dy}{dx}=f_1(x)\bullet f_2(y)$ и, значит, наше уравнение является дифференциальным уравнением в разделяющихся переменных. Разделим переменные. $\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=-\left(\frac{1}{y}+1\right)dy$.

Проинтегрируем получившееся выражение по соответствующим переменным: $\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=-\int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy$.

Получим $\ln|x|+x=-\ln|y|-y+\ln C$, $\Rightarrow \ln|xy|+\ln e^{x+y}=\ln C$.

Таким образом, мы убедились в том, что $xye^{x+y}=C$ - общий интеграл заданного уравнения.

Ответ: $xye^{x+y}=C$.

б) $xy'=x\sin\frac{y}{x}+y$.

Решение. Убедимся в том, что переменные разделить не удается. Поэтому поделим обе части уравнения на *x*.

$y' = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$- Убедимся в том, что производная $\frac{dy}{dx}$ в представленном уравнении зависит только от отношения $\frac{y}{x}$, то есть $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ и, значит, это однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Будем решать его с помощью соответствующей замены.

Введем новую переменную $\frac{y}{x} = U; \quad y' = U'x + U$.

$U'x + U = \sin U + U$;

$U'x = \sin U$;

$\frac{dU}{\sin U} = \frac{dx}{x}$; проинтегрируем выражение

$\int \frac{dU}{\sin U} = \int \frac{dx}{x}$;

$\ln\left|tg\frac{U}{2}\right| = \ln|x| + \ln C$;

$\left|tg\frac{U}{2}\right| = |x|C$;

$\left|tg\frac{y}{2x}\right| = |x|C$;

$y = 2x \cdot arctgxC$ - общее решение уравнения.

Ответ: $y = 2x \cdot arctgxC$.

в) $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$.

Решение. Начинаем вновь с проверки не разделятся ли переменные интегрирования. Убеждаемся, что это не так, и, кроме того, однородным оно тоже не является. Это линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка, так как имеет структуру вида: $P(x)y' + Q(x)y = F(x)$. Будем решать его с помощью стандартной в этом случае, замены: $y = UV; \Rightarrow \quad y' = U'V + V'U$.

$U'V + V'U + UVtgx = \frac{1}{\cos x}$;

$U'V + U(V' + Vtgx) = \frac{1}{\cos x}$;

$V' + Vtgx = 0$;

$\frac{dV}{V} = -tgxdx$;

$\ln|V| = \ln|\cos x|$;

$|V| = |\cos x|$;

$U'\cos x = \frac{1}{\cos x}$;

$dU = \frac{1}{\cos^2 x}dx$;

$U = tgx + C$;

$y = \cos x(tgx + C)$- общее решение уравнения.

Ответ: $y = \cos x(tgx + C)$.

Вариант 1.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$;	в) $2xyy' = (y')^2 - 1$;
б) $xy' - y = x^2$;	г) $xy' + y = 3$.

Вариант 2.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' = y\ln(y/x)$;	в) $x^3y' + x^2y = 1$;
б) $ydx - 2xdy = 2y^4dy$;	г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вариант 3.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;	в) $y'x\ln x = y$;
б) $xy' + y = y^2$;	г) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

Вариант 4.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' + y = 5$;	в) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;
б) $y' - y(1+x) = x$;	г) $x(y' - y) = e^x$.

Вариант 5.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' + xe^{y/x} - y = 0$;	в) $(1+x^2)y' = 2xy$;
б) $dy + ydx = e^{-x}dx$;	г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вариант 6.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $x^2y' - y^2 = x^2$;	в) $(x^2 + 2x + 1)y' - (x+1)y = x - 1$;
б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;	г) $y' = x^2 + 2x - 2y$.

Вариант 7.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $xy' = y\ln(y/x)$;	в) $y' + ytgx = \sin 2x$;
б) $(1+e^x)yy' = e^x$;	г) $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$.

Вариант 8.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x+2y)dx + xdy = 0$;	в) $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$;
б) $ydx - 2xdy = 2y^4dy$;	г) $xy' - 2\sqrt{x^3y} = y$.

Вариант 9.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$;	в) $2xy' - y = 3x^2$;
б) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y$;	г) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вариант 10.

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $\left(1-x^2\right)y' = xy$;	в) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;
б) $y'x + y = x + 1$;	г) $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс.Т.1. -2001.- 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. – 8-е изд.-М.: Физматлит. т.1 – 2001. -697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. - 22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. – 5-е изд., перераб. и доп. –М.: Дрофа. Т.1. – 2003.-703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. – 6-е изд. стер. –М. Физматлит, 2002, -646 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.