Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра Математика

Составитель: доцент Литвин Д.Б.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РГР №4

по дисциплине

МАТЕМАТИКА

наименование дисциплины

21.03.02 Землеустройство

направление подготовки

Городской кадастр

профиль(и) подготовки

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Ставрополь, 2019

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

ПРЯМЫЕ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

Уравнение линии на плоскости

Основные понятия

Уравнением линии (или кривой) на плоскости *Oxy* называется такое уравнение *F(x; y)=0* с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты *x* и *y* каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Всякому уравнению вида $F(x;y)=0$ соответствует, вообще говоря, некоторая линия (возможно вырожденная), свойства которой определяются данным уравнением. Так, уравнению $(x-2)^2+(y-3)^2=0$ соответствует не линия, а точка *(2;3)*; уравнению $x^2+y^2+5=0$ на плоскости не соответствует никакой геометрический образ.

Пример 1. Лежат ли точки *K(-2;1)* и *L(1;1)* на линии $2x+y+3=0$?

Решение: Подставив в уравнение вместо *x* и *y* координаты точки *K*, получим $2\cdot(-2)+1+3=0$. Следовательно, точка *K* лежит на данной линии. Точка *L* не лежит на данной линии, т. к. $2\cdot1+1+3\neq0$.

Параметрическое задание линии на плоскости:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \tag{1}$$

где *x* и *y* - координаты произвольной точки *M(x; y),* лежащей на данной линии, а *t* - переменная, называемая параметром; параметр *t* определяет положение точки *(x; y)* на плоскости.

Уравнения прямой на плоскости

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \qquad k = tg\alpha \tag{2}$$

Число $k = tg\alpha$ называется *угловым коэффициентом* прямой, а уравнение (2) - *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение первой степени относительно х и у в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

где *A*, *B*, *C* - произвольные числа, причем *A* и *B* не равны нулю одновременно.

Уравнения пучка прямых, проходящих через данную точку

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{4}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая должна проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку M_1, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad k \in R. \tag{5}$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1); \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{6}$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Числа *a* и *b* указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

Нормальное уравнение прямой, проходящей через данную точку

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданному ненулевому вектору $\overline{n} = (A; B)$.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x;y)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M}=\left(x-x_0;y-y_0\right)$(см. рис. 11). Поскольку векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_oM}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n}\cdot\overline{M_0M}=0$, то есть

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0 \tag{7}$$

Уравнение (7) называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору*.

Вектор $\bar{n}=\left(A;B\right)$ перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой*.

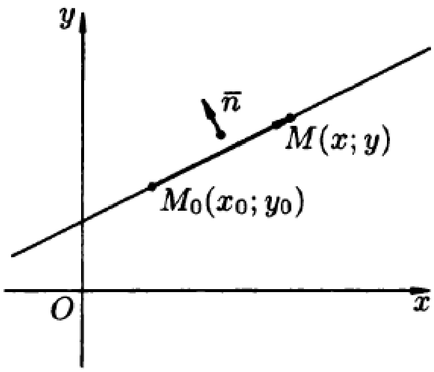

Рисунок 11.

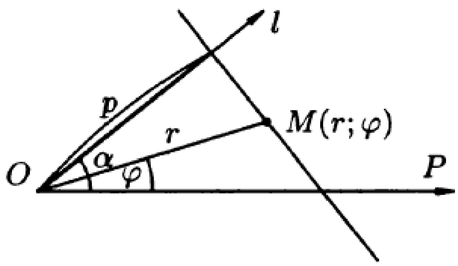

Рисунок 12.

Полярное уравнение прямой

Найдем уравнение прямой в полярных координатах. Ее положение можно определить, указав расстояние p от полюса O до данной прямой и угол α между полярной осью OP и осью l, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (см. рис. 12).

Для любой точки $M(r;\varphi)$ на данной прямой имеем:

$$np_l\overline{OM}=p.$$

С другой стороны,

$$np_l\overline{OM}=\overline{OM}\cdot\cos\left(\alpha-\varphi\right)=r\cdot\cos\left(\varphi-\alpha\right).$$

Следовательно,

$$r\cos(\varphi-\alpha)=p. \tag{8}$$

Полученное уравнение (8) и есть *уравнение прямой в полярных координатах*.

Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая определяется заданием p и α (см. рис. 13). Тогда используя скалярное произведение, получим $\bar{n}\cdot\bar{r}=p, \qquad |\bar{n}|=1$.

Следовательно, уравнение прямой в прямоугольной: системе координат примет вид

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0, \tag{9}$$

Уравнение (9) называется *нормальным уравнением прямой*.

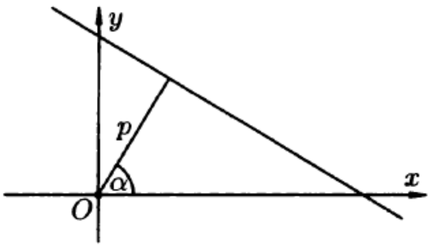

Рисунок 13.

Покажем, как привести общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ к виду (9).

Умножим все члены уравнения (3) на некоторый множитель $\lambda\neq0$ и приравняем его к выражению (9)

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p.$$

Должны выполняться равенства

$$\lambda A=\cos\alpha, \qquad \lambda B=\sin\alpha, \qquad \lambda C=-p. \tag{10}$$

Из первых двух равенств находим $\lambda^2A^2+\lambda^2B^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, откуда

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Множитель λ называется *нормирующим множителем*. Согласно третьему равенству (10) $\lambda C = -p$ знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

Пример 2. Привести уравнение $-3x + 4y + 15 = 0$ к нормальному виду.

Решение: Находим нормирующий множитель $\lambda = \frac{-1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}$. Умножая данное уравнение на λ, получим искомое нормальное уравнение прямой: $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$.

Прямая линия на плоскости. Основные задачи

Угол между двумя прямыми

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис.14).

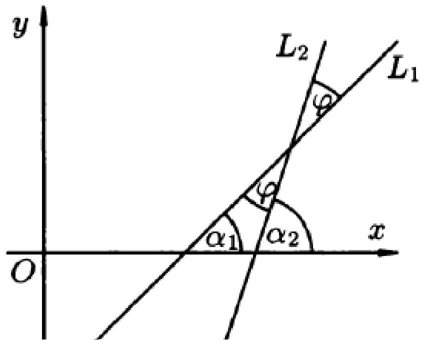

Рисунок 14.

Тогда $$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (11)$$

Условие параллельности двух прямых: $k_2 = k_1$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L уравнением $Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0;y_0)$ (см. рис.15). Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L.

Решение: Расстояние d от точки M_0 до прямой L равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1;y_1)$ - произвольная точка прямой L, на направление нормального вектора $\bar{n}=(A;B)$. Следовательно,

$$d=\left|np_{\bar{n}}M_1M_0\right|=\left|\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|=\frac{\left|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

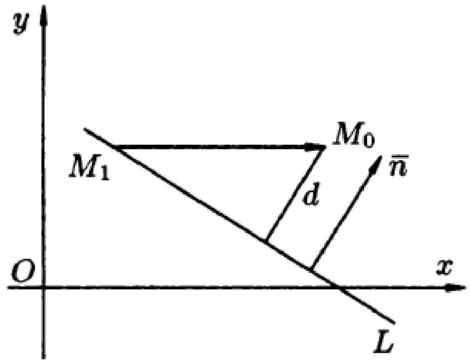

Рисунок 15.

Так как точка $M_1(x_1;y_1)$ принадлежит прямой L, то $Ax_1+By_1+C=0$, т. е. $C=-Ax_1-By_1$. Поэтому

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (12)$$

Пример 3. Найти расстояние от точки M_0 *(2;-1)* до прямой $3x+4y-22=0$.

Решение: По формуле (12) получаем

$$d=\frac{\left|3\cdot 2+4\cdot(-1)-22\right|}{\sqrt{9+16}}=\frac{20}{5}=4.$$

Уравнения поверхности в пространстве

Основные понятия

Уравнением поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение

$$F(x,y,z)=0 \qquad (13)$$

с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются ***текущими координатами*** точек поверхности.

В отдельных случаях уравнение (13) может определять не поверхность, а точку, линию или вовсе не определять никакой геометрический образ. Говорят, «поверхность вырождается». Так, уравнению $2x^2+y^2+z^2+1=0$ не удовлетворяют никакие действительные значения x, y, z. Уравнению $0\cdot x^2+y^2+z^2=0$ удовлетворяют лишь координаты точек, лежащих на оси Ox (из уравнения следует: $y=0, z=0,$ а x - любое число).

Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1(x_0,y_0,z_0)$

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2.$$

Уравнения плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и вектором $\bar{n}=\left(A;B;C\right)$, перпендикулярным этой плоскости. Возьмем на плоскости Q произвольную точку $M(x,y,z)$ и составим вектор

$$\left|M_0M\right| = \left(x - x_0; y - y_0; z - z_0\right).$$

При любом расположении точки M на плоскости Q векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, т. е.

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) называется уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = \left(A; B; C\right)$. Оно первой степени относительно текущих координат x, y и z. Вектор $\bar{n} = \left(A; B; C\right)$ называется нормальным вектором плоскости.

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (15)$$

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то оно принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O\left(0;0;0\right)$. Следовательно, в этом случае *плоскость проходит через начало координат*.

2. Если $C = 0$, то имеем уравнение $Ax + By + D = 0$. Нормальный вектор $\bar{n} = \left(A; B; 0\right)$ перпендикулярен оси *Oz*. Следовательно, п*лоскость параллельна оси Oz;* если $B = 0$- параллельна оси *Oy,* $A = 0$- параллельна оси *Ox*.

3. Если $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O\left(0;0;0\right)$ параллельно оси *Oz,* т. е. плоскость $Ax + By = 0$ *проходит через ось Oz.* Аналогично, уравнениям $By + Cz = 0$ и $Ax + Cz = 0$. отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси *Ox* и *Oy*.

4. Если $A = B = 0$, то уравнение (15) принимает вид $Cz + D = 0$, т. е. $z = -\dfrac{D}{C}$.Плоскость *параллельна плоскости Oxy*. Аналогично, уравнениям

$Ax+D=0$ и $By+D=0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям *Oyz* и *Oxz*.

5. Если $A=B=D=0$, то уравнение (15) примет вид $Cz=0$, т. е. $z=0$. Это *уравнение плоскости Оху*. Аналогично: $y=0$ - уравнение плоскости *Oxz;* $x=0$ - уравнение плоскости *Oyz*.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Найдем уравнение плоскости *Q*, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$ не лежащие на одной прямой.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим векторы

$$\overline{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1),$$

$$\overline{M_2M}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1),$$

$$\overline{M_3M}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1).$$

Эти векторы лежат на плоскости *Q*, следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получаем

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (16)$$

Уравнение (16) есть *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*

Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (17)$$

Нормальное уравнение плоскости

- в векторной форме

$$\bar{r}\cdot\bar{e}-p=0; \qquad (18)$$

- в координатной форме

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \qquad (19)$$

Общее уравнение плоскости (15) можно привести к нормальному уравнению (19) так, как это делалось для уравнения прямой на плоскости. А именно: умножить обе части уравнения (15) на нормирующий множитель $\lambda=\dfrac{\pm1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, , где знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

Плоскость в пространстве. Основные задачи

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Под ***углом между плоскостями*** Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\bar{n}_1=\left(A_1;B_1;C_1\right)$ и $\bar{n}_2=\left(A_2;B_2;C_2\right)$ плоскостей $Q1$ и $Q2$ равен одному из этих углов

$$\cos\varphi=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{\left|\bar{n}_1\right|\cdot\left|\bar{n}_2\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (20)$$

Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Условие перпендикулярности двух плоскостей Q_1 и Q_2:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (21)$$

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны, то будут параллельны и их нормали $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, тогда условие параллельности двух плоскостей Q_1 и Q_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (22)$$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Уравнения линии в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей или как геометрическое место точек, общих двум поверхностям.

Если $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ - уравнения двух поверхностей, определяющих линию L, то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \qquad (23)$$

Уравнения (23) называются ***уравнениями линии* в пространстве**.

Линию в пространстве можно определять *векторным уравнением*

$$\bar{r} = \overline{r(t)} \qquad (24)$$

или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

проекций вектора (24) на оси координат.

Векторное уравнение прямой

Пусть прямая L задана ее точкой: $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и направляющим вектором $\overline{S}=(m;n;p)$.

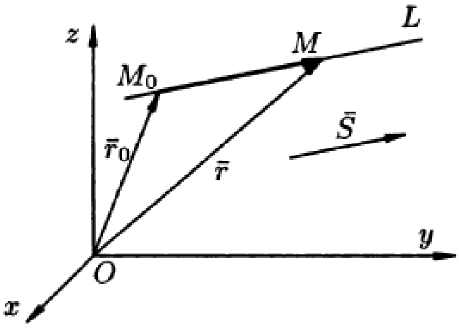

Рисунок 16

Возьмем на прямой: L произвольную точку $M(x;y;z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\overline{r}_0$ и $\overline{r}$. Очевидно, что три вектора $\overline{r}_0, \overline{r}$ и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

$$\overline{r}_0=\overline{r}+\overline{M_0M}. \qquad (25)$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий: на прямой: L, параллелен направляющему вектору $\overline{S}$, поэтому $\overline{M_0M}=t\overline{S}$, где t - скалярный множитель, называемый параметром, который может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой.

Получим ***векторное уравнение прямой***

$$\overline{r}=\overline{r}_0+t\overline{S}. \qquad (26)$$

Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\overline{r}=(x;y;z)$, $\overline{r}_0=(x_0;y_0;z_0)$, $t\overline{S}=(tm;tn;tp)$, уравнение (26) можно записать в виде

$$x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}=(x_0+tm)\overline{i}+(y_0+tn)\overline{j}+(z_0+tp)\overline{k}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \qquad (27)$$

Они называются *параметрическими уравнениями прямой*, в пространстве.

Канонические уравнения прямой

Из параллельности векторов $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и $\overline{S} = (m; n; p)$ получаем ***канонические уравнениями прямой*** в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{28}$$

Уравнения (28) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (27), исключив параметр *t*.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (28) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2;-4;1)$ перпендикулярно оси *Oz* (проекция вектора $\overline{S}$ на ось *Oz* равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z = 1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z - 1 = 0$.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть прямая *L* проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, тогда на основании (28) получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{29}$$

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Уравнения (30) называют *общими уравнениями прямой*.

От общих уравнений (30) можно перейти к каноническим уравнениям (28) или (29).

1) Координаты точки M_0 на прямой L получаем из системы уравнений (30), придав одной из координат произвольное значение (например, z =0).

Так как прямая L перпендикулярна векторам $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$, то за направляющий вектор $\overline{S}$ прямой L можно принять векторное произведение $\overline{n}_1 \times \overline{n}_2$

$$\overline{S} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \tag{31}$$

2) Канонические уравнения прямой легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнения (29).

Пример. Написать канонические уравнения прямой L, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Решение 1. Использование формулы (28).

Положим $z = 0$ и решим систему $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x - y = -5. \end{cases}$ Находим точку $M_0(-2;1;0) \in L$.

Найдем направляющий вектор (31)

$$\overline{S}(m,n,p) = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 3-2 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

На основании (28) получим $\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-3}$.

Решение 2. Использование формулы (29).

Пусть $M_1=M_0\left(-2;1;0\right)\in L.$ Найдем вторую точку $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)$ положив $y=0$ и решив систему $\begin{cases} x-z=-1, \\ 2x-3z=-5. \end{cases}$ - получим $M_2\left(2;0;3\right)$;

$M_1M_2=\left(2;0;3\right)-\left(-2;1;0\right)=\left(4;-1;3\right)$.

На основании (29) уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}.$$

Прямая в пространстве. Основные задачи

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $S_1=\left(m_1;n_1;p_1\right)$ и $S_2=\left(m_2;n_2;p_2\right)$.

Поэтому, по формуле для косинуса угла между векторами, получаем

$$\cos\varphi=\frac{\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2}{\left|\overline{S}_1\right|\cdot\left|\overline{S}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (32)$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (32) следует взять по модулю.

Если *прямые* L_1 и L_2 *перпендикулярны*, то $\cos\varphi=0$, следовательно:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Если *прямые* L_1 и L_2 *параллельны*, то параллельны их направляющие векторы S_1 и S_2. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Пример. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{3} \text{ и } \begin{cases} 2x+y-z-1=0, \\ 2x-y+3z+5=0. \end{cases}$$

Решение: Очевидно, $\overline{S}_1=(2;-1;3)$, а $\overline{S}_2=\overline{n}_1\times\overline{n}_2$, где $\overline{n}_1=(2;1;-1)$, $\overline{n}_2=(2;-1;3)$. Отсюда следует, что $\overline{S}_2=(2;-8;-4)$. Так как $\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2=4+8-12=0$, то $\varphi=90°$.

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Их направляющие векторы соответственно $S_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $S_2=(m_2;n_2;p_2)$ (см. рис. 17).

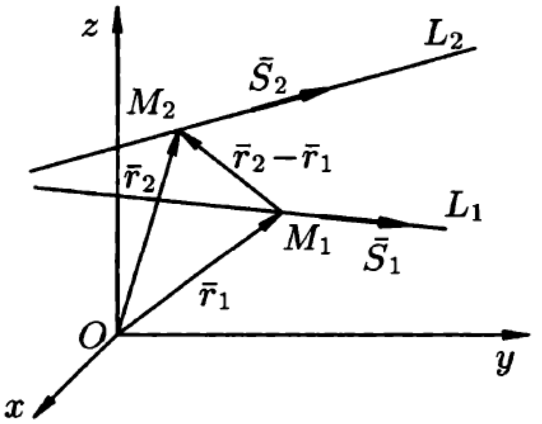

Рисунок 17

Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, радиус-вектор которой обозначим через $\overline{r}_1$; прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$, радиус-вектор которой обозначим через $\overline{r}_2$, тогда

$$\overline{r}_2-\overline{r}_1=\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы S_1, S_2 и $\overline{M_1M_2} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения:

$$\left(\overline{r}_2 - \overline{r}_1\right)\overline{S}_1\overline{S}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{33}$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, то есть либо пересекаются, если $\overline{S}_2 \neq \lambda \overline{S}_1$, либо параллельны, если $\overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2$.

Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0,$, а прямая L уравнениями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ - угол между векторами $\overline{n} = \left(A; B; C\right)$ и $\overline{S} = \left(m; n; p\right)$ (см.рис. 18), тогда $\cos\theta = \dfrac{\overline{n} \cdot \overline{S}}{\left|\overline{n}\right| \cdot \left|\overline{S}\right|}$.

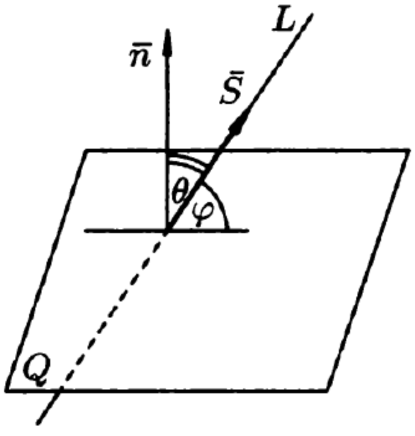

Рисунок 18

Найдем синус угла φ, считая $\varphi \le \frac{\pi}{2}$: $\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$.

Так как $\sin\varphi \ge 0$, получаем

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{34}$$

Если *прямая L параллельна плоскости Q,* то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ перпендикулярны, а потому $\bar{S} \cdot \bar{n} = 0$, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0$$

является ***условием параллельности*** прямой и плоскости.

Если прямая L перпендикулярна плоскости Q, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ параллельны, поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

являются ***условиями перпендикулярности*** прямой и плоскости.

Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{35}$$

с плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{36}$$

Для этого надо решить систему уравнений (35) и (36). Проще всего это сделать, записав уравнения прямой (35) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{37}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости (36), получаем уравнение $A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0$ или

$$t(Am+Bn+Cp)+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0 \qquad . (38)$$

1) Если прямая L не параллельна плоскости, т. е. если $Am+Bn+Cp\neq 0$, то из равенства (38) находим значение t:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}. \qquad (39)$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

2) Рассмотрим теперь случай, когда $Am+Bn+Cp=0(L\parallel Q)$:

а) если $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то прямая L параллельна плоскости и пересекать ее не будет (уравнение (38) решения не имеет, так как имеет вид $0\cdot t+F=0$, где $F\neq 0$;

б) если $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то уравнение (38) имеет вид $t\cdot 0+0=0$; ему удовлетворяет любое значение t, любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Заключаем: прямая лежит в плоскости. Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases} \qquad (40)$$

является ***условием принадлежности прямой плоскости***.

Типовой вариант задания

1. Даны координаты вершин треугольника ABC. $A(-12,-3)$, $B(12,-10)$, $C(-6,\ 14)$.

   Требуется:

   a) составить уравнение линии BC;
   b) составить уравнение высоты, проведенной из вершины А;
   c) вычислить длину высоты АК, проведенной из вершины А;
   d) вычислить внутренний угол при вершине B.

2. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки $M_1,\ M_2$ *и* M_3:

   $M_1(-3,\ 4,\ -7)$, $M_2(1,\ 5,\ -4)$, $M_3(-5,\ -2,\ 0)$, $M_0(-12,\ 7,\ -1)$.

3. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} 2x-y-3z+1=0, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$

4. Найти точку и угол пересечения прямой и плоскости: $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$ и $x+2y+3z-14=0$.

Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 2009. – 328 с.

2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 2007. – 272 с.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. -10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.:, Физматлит, 2006. — 335 с.

5. Литвин Д.Б., Яновский А.А., Элементы векторной алгебры. Учебное пособие. - Ставрополь : ООО "Респект", 2015. - 68с.

6. Высшая математика для экономистов: Учебник для студ. вузов, обучающихся по эконом. спец. / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2005.

7. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Учебник для вузов по эконом. спец. – М.: Инфра-М, 2002.