

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра Математика

Составитель: доцент Литвин Д.Б.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РГР №4
по дисциплине
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

наименование дисциплины

38.03.01 Экономика

направление подготовки

Бухгалтерский учет, анализ и аудит

профиль(и) подготовки

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Ставрополь, 2019

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

Интегральное исчисление функции одной переменной.

При решении задач этой темы необходимо знать:

1. Определение и свойства неопределенного интеграла.
2. Таблицу основных интегралов.
3. Основные методы интегрирования.
4. Стандартные методы интегрирования наиболее часто встречающихся классов функций.
5. Определение, свойства и способы вычисления определенного интеграла.
6. Несобственные интегралы и их свойства.
7. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Таблица основных интегралов

$$1 \quad \int dx = x + C;$$

$$2 \quad \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$$

$$3 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4 \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad 4a \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5 \quad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$6 \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$7 \quad \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$8 \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$9 \quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$10 \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| \sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right| + C;$$

$$11 \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$12 \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

Образец решения варианта

Задание 1: Вычислить интеграл:

$$а) \int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx;$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}};$$

$$в) \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx;$$

$$г) \int 3^{2-7x} dx;$$

$$д) \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$$

$$е) \int e^x \cdot \sin e^x dx;$$

$$ж) \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx;$$

$$з) \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx;$$

$$и) \int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x} dx;$$

Решение:

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (1) и (2) табличного интегрирования:

$$\begin{aligned} \int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx &= \int \left(x^5 + 4 \cdot x^{-3} - x^{\frac{2}{3}} - 7 \right) dx = \int x^5 dx + 4 \int x^{-3} dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx - 7 \int dx = \\ &= \frac{x^{5+1}}{5+1} + 4 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 7x + C = \frac{x^6}{6} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 7x + C = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{x^2} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5} - 7x + C; \end{aligned}$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \left| \begin{array}{l} t = 1 + 2x; \\ dt = 2dx; \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{4}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C = 2(1+2x)^{\frac{1}{4}} + C = 2\sqrt[4]{1+2x} + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx \left| \begin{array}{l} t = x^5 \\ dt = 5x^4 dx \\ x^4 dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{5} dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (12)}

$$= -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} x^5 + C;$$

$$\text{г) } \int 3^{2-7x} dx \left| \begin{array}{l} t = 2 - 7x, \\ dt = -7dx, \\ dx = -\frac{1}{7} dt \end{array} \right| = \int 3^t \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) dt = -\frac{1}{7} \int 3^t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (4)}

$$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} + C = -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^{2-7x}}{\ln 3} + C;$$

$$\text{д) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{1+x^2} dx \end{array} \right| = \int t dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C;$$

$$е) \int e^x \cdot \sin e^x dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \sin t dt =$$

{ для нахождения интеграла применим формулу (5) }

$$= -\cos t + C = -\cos e^x + C;$$

$$ж) \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$$

{ для нахождения интеграла применим формулу (8) }

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C;$$

$$з) \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2 - (\sqrt{7})^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - (\sqrt{7})^2}} =$$

{ для нахождения интеграла применим формулу (10) }

$$= \ln \left| \sqrt{t^2 - (\sqrt{7})^2} + t \right| + C = \ln \left| \sqrt{e^{2x} - 7} + e^x \right| + C;$$

$$и) \int \frac{\sin 5x dx}{9 - \cos^2 5x} = \left| \begin{array}{l} t = \cos 5x \\ dt = -5 \sin 5x dx \\ \sin 5x dx = -\frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{5} dt}{9-t^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2-3^2} =$$

{ для нахождения интеграла применим формулу (9) }

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C;$$

$$к) \int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx = \int \frac{x \sin x^2}{\cos x^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = \cos x^2 \\ dt = -2x \sin x^2 dx \\ x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

{ для нахождения интеграла применим формулу (3) }

$$= -\frac{1}{2} \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln|\cos x^2| + C;$$

$$л) \int \frac{3^x}{9^x + 4} dx = \int \frac{3^x}{(3^x)^2 + 2^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} =$$

{ для нахождения интеграла применим формулу (7) }

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2 \ln 3} \operatorname{arctg} \frac{3^x}{2} + C;$$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям, используя формулу $\int U \cdot V' dx = U \cdot V - \int U' \cdot V dx$ (13):

$$м) \int x^2 \cos x dx = \left. \begin{array}{l} U = x^2; \quad U' = 2x \\ V' = \cos x; \quad V = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} U = 2x; \quad U' = 2 \\ V' = \sin x; \quad V = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x - (2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx) =$$

{ для нахождения интеграла применим формулу (6) }

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

$$н) \int \arccos x dx = \left. \begin{array}{l} U = \arccos x; \quad U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; \quad V = x \end{array} \right| = x \cdot \arccos x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

{ второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (2) }

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left. \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ -x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

в итоге получаем $\int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$;

о) $\int \frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$.

Под знаком интеграла правильная рациональная дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} &= \frac{x^2 + 3x + 6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \\ &= \frac{A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x-3)}; \end{aligned}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$x^2 + 3x + 6 = Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{array}{l} x^2 : 1 = A + B + C \\ x^1 : 3 = -5A - 3B - 2C \\ x^0 : 6 = 6A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = 1 + B + C \\ 8 = -3B - 2C \\ A = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B = -8, \\ C = 8. \end{array} \right.$$

Тогда $\frac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{1}{x} - \frac{8}{x-2} + \frac{8}{x-3}$.

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределённого интеграла, получим:

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{8}{x-2} + \frac{8}{x-3} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - 8 \int \frac{dx}{x-2} + 8 \int \frac{dx}{x-3} =:$$

{ для нахождения интегралов применим формулу (3) }

$$= \ln|x| - 8 \ln|x-2| + 8 \ln|x-3| + C;$$

п) $\int \frac{x^6}{x^2 - x + 1} dx.$

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2 - x + 1} = x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int \left(x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right) dx = \int x^4 dx + \int x^3 dx - \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

{для нахождения первых трёх интегралов применим формулу (2), для четвёртого – формулу (1), последний интеграл найдем с помощью формулы (7)}

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C;$$

р) $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)}.$

Найдем интеграл используя универсальную тригонометрическую

подстановку:
$$\left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2} \left(2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} - 2 \cdot \frac{2t}{1 + t^2} \right)} = \int \frac{1 + t^2}{t(t^2 - 4t + 3)} dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)} = \frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-3} =$$

$$= \frac{A(t-1)(t-3) + Bt(t-3) + Ct(t-1)}{t(t-1)(t-3)}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$1+t^2 = At^2 - 4At + 3A + Bt^2 - 3Bt + Ct^2 - Ct.$$

Отсюда следует, что

$$\left. \begin{array}{l} t^2: 1 = A + B + C \\ t^1: 0 = -4A - 3B - C \\ t^0: 1 = 3A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = -1, \\ C = \frac{5}{3}, \end{cases}$$

Тогда $\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)} = \frac{1}{3t} - \frac{1}{t-1} + \frac{5}{3(t-3)}.$

Интегрируя почленно полученное равенство, получим::

$$\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t-1} + \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t-3} =$$

{для нахождения интегралов применим формулу (3)}

$$= \frac{1}{3} \ln|t| - \ln|t-1| + \frac{5}{3} \ln|t-3| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \right| + C;$$

с) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2-2} + \sqrt[4]{3x^2-2}}.$

Произведем замену: $3x^2 - 2 = t, dt = 6x dx, 3x dx = \frac{1}{2} dt.$

Получим: $\int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t} + \sqrt[4]{t}} =$

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ есть 4, поэтому

введем следующую замену:

$$\left| \begin{array}{l} t = z^4 \\ dt = 4z^3 dz \\ z = \sqrt[4]{t} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{4z^3 dz}{\sqrt{z^4} + \sqrt[4]{z^4}} = 2 \int \frac{z^2}{z^2 + z} dz = 2 \int \frac{z^2}{z(z+1)} dz = 2 \int \frac{z}{z+1} dz =$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{z+1} \right) dz = 2 \int dz - 2 \int \frac{dz}{z+1} =$$

{для нахождения интегралов применим формулы (1) и (3)}

$$= 2z - 2 \ln|z+1| + C = 2\sqrt[4]{3x^2 - 2} - 2 \ln \sqrt[4]{3x^2 - 2} + C;$$

г) $\int \cos 3x \cos 5x dx.$

Найдем интеграл, используя формулу тригонометрических преобразований

$$\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos(3x - 5x) + \cos(3x + 5x)) = \frac{1}{2} (\cos(-2x) + \cos 8x) = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 8x)$$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя формулу (6), получим:

$$\int \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} (-\sin 8x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (-\sin 2x) + C = -\frac{1}{16} \sin 8x - \frac{1}{4} \sin 2x + C;$$

у) $\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx =$

$$= \int \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx = \left\{ \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \right\} = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - 2 \cdot \frac{1}{4} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{3}{8} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx =$$

{для нахождения интегралов применим формулы (1) и (6)}

$$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + C = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C; ;$$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} =:$

$$\left. \begin{aligned} t &= \sqrt{e^{2x} - 1}, \\ e^{2x} &= t^2 + 1, \\ x &= \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1), \\ dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

{ для нахождения интеграла применим формулу (7) }

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \sqrt{e^{2x} - 1} + C.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$а) \int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}};$$

$$б) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

Решение:

а) Несобственный интеграл I рода.

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} = \left. \begin{array}{l} t = x^2 + 4 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2} dt \\ x_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4 \\ x_2 = -\infty \Leftrightarrow t_2 = \infty \end{array} \right| = \int_4^{\infty} \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_4^b \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

{ для нахождения интеграла применим формулу (2) }

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(t^{\frac{1}{2}} \Big|_4^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\sqrt{t} \Big|_4^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sqrt{b} - 2) = \infty \quad - \text{ интеграл расходится.}$$

б) Несобственный интеграл II рода.

$x = 4$ является точкой разрыва подынтегральной функции, поэтому:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}} =$$

{ для нахождения интеграла применим формулу (8) }

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin \frac{x}{4} \Big|_0^{4-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \right) - \arcsin 0 \right) = \frac{\pi}{2} \quad - \text{ интеграл сходится.}$$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$;

б) длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

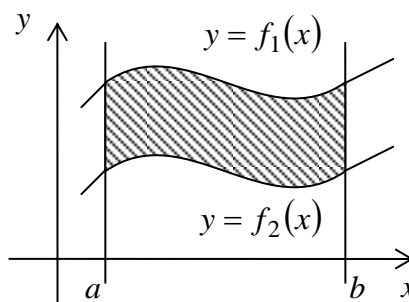
в) объем тела, полученного вращением фигуры $y = \sin x$; $y = 0$; $0 \leq x \leq \pi$, вокруг оси Ox .

Решение:

а) Существуют несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

▪ Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ - сверху, $y = f_2(x)$ - снизу, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$ определяется формулой

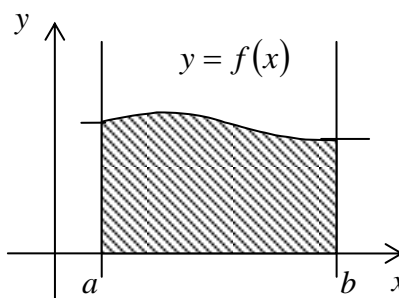
$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \quad (14);$$



▪ Площадь фигуры, ограниченной кривой заданной параметрически уравнениями $(y = f(x), x \in [a; b])$ \Leftrightarrow

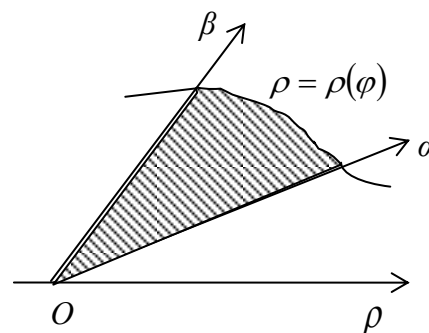
$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$, определяется формулой

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt \quad (15);$$



▪ Площадь фигуры, заданной в полярной системе координат, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, определяется

формулой: $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$ (16).



В нашем случае линии, ограничивающие фигуру, заданы в декартовых координатах, поэтому мы будем использовать формулу (14).

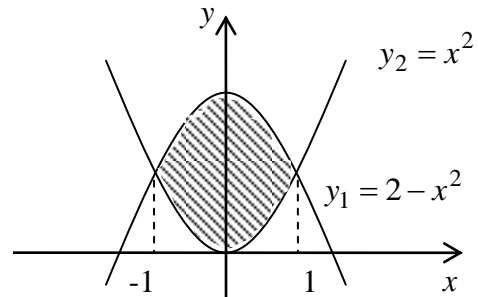
Найдем координаты точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$$

$$S = \int_{-1}^1 ((2 - x^2) - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx =$$

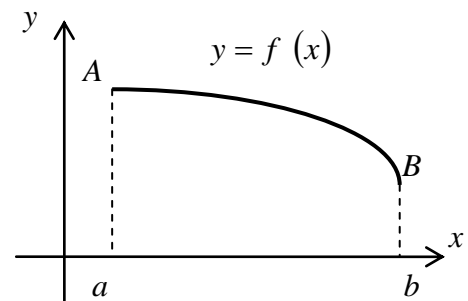
$$= 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{8}{3};$$



б) В зависимости от способа задания уравнения кривой существуют следующие формулы нахождения длины дуги кривой.

▪ Для кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$ $x \in [a; b]$ длина дуги находится по формуле

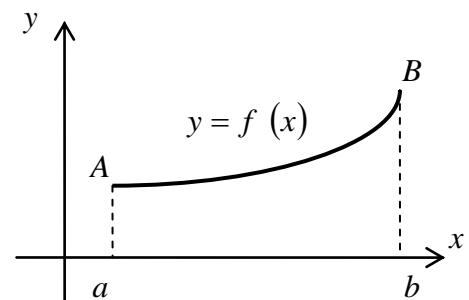
$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (17);$$



▪ Для кривой, заданной параметрически уравнениями $(y = f(x), x \in [a; b]) \Leftrightarrow$

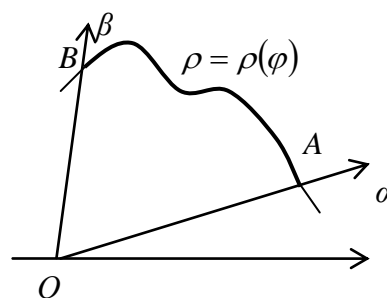
$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$ длина дуги находится по

формуле $l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (18);$



▪ Для кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $\varphi \in [\alpha; \beta]$ длина дуги находится по формуле

$$l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi \quad (19).$$



В нашем случае кривая задана параметрически, поэтому для вычисления её длины мы применим формулу (18).

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), & \begin{cases} x'(t) = 3(1 - \cos t), \\ y = 3(1 - \cos t); & \begin{cases} y'(t) = 3 \cdot \sin t. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

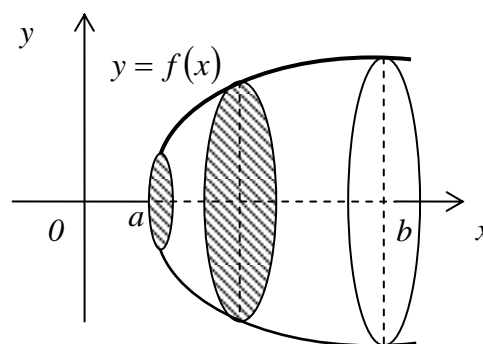
$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{(3(1 - \cos t))^2 + (3 \sin t)^2} dt = 3 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \left\{ \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \right\} =$$

$$= 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \left\{ 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right\} = 3 \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)} dt =$$

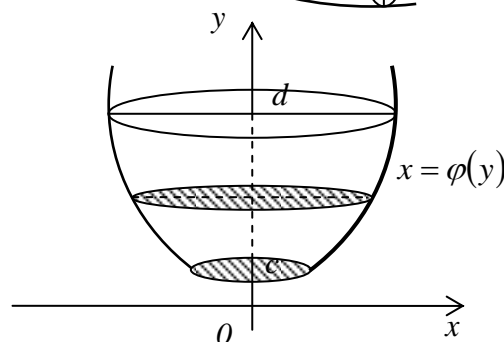
$$= 6 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -6 \cdot 2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = -12 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = -12 \cdot (0 - 1) = 12;$$

в) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox , определяется

формулой: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ (20).

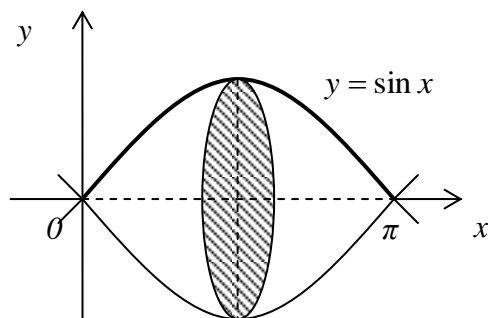


Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$,



$y = d$ ($c < d$), то объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy , по аналогии с формулой (20), равен: $V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$ (21).

В условиях нашей задачи $y = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$



$$\begin{aligned}
 V_x &= -\pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} = \\
 &= \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x dx \right) = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \left(\left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) = \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$

в) $\int \frac{x^2}{(1+3x^3)^2} dx;$

г) $\int \frac{x}{1+3x^2} dx;$

д) $\int \frac{\cos x}{1-2\sin x} dx;$

е) $\int e^{-x^2} x dx;$

ж) $\int \sin 2x dx;$

з) $\int \left(\cos \frac{x}{3} + 1 \right) dx;$

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$

Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \left(x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - 11 \right) dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}; & \text{в) } \int \frac{xdx}{(5x^2+1)^2}; \\ \text{г) } \int 7^x \sqrt{3 \cdot 7^x + 4} dx; & \text{д) } \int \frac{x^2}{1+3x^3} dx; & \text{е) } \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+4} dx; \\ \text{ж) } \int \sin 5x dx; & \text{з) } \int \frac{dx}{1+3x^2}; & \text{и) } \int \operatorname{tg} 3x dx; \end{array}$$

Вариант 3.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3 \right) dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}; & \text{в) } \int \frac{x^2}{(1-4x^3)^2} dx; \\ \text{г) } \int \frac{xdx}{x^2+5}; & \text{д) } \int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx; & \text{е) } \int e^{-2x^2} \cdot x dx; \\ \text{ж) } \int a^{3x} dx; & \text{з) } \int (2 + \sin 2x) dx; & \text{и) } \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx; \end{array}$$

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \left(1 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^4} \right) dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}; & \text{в) } \int \frac{xdx}{(3+x^2)^3}; \\ \text{г) } \int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx; & \text{д) } \int \frac{x^2}{1+4x^3} dx; & \text{е) } \int \frac{e^x}{1-2e^x} dx; \\ \text{ж) } \int e^{-x^3} x^2 dx; & \text{з) } \int \sin 2x dx; & \text{и) } \int \frac{dx}{\cos^2 3x}; \end{array}$$

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \left(x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt[3]{3x} \right) dx; & \text{б) } \int \frac{xdx}{(1+x^2)^5}; & \text{в) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}; \end{array}$$

$$\Gamma) \int \frac{dx}{x+3};$$

$$\Delta) \int \frac{\cos x}{1+3\sin x} dx;$$

$$\text{е)} \int e^{2x} dx;$$

$$\text{ж)} \int 2^{-x^2} x dx;$$

$$\text{з)} \int (1-\sin 3x) dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{dx}{\cos^2 4x};$$

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \left(2x^7 - \frac{3}{\sqrt{x}} + e^x \right) dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{x^2 dx}{(1+3x^3)^3};$$

$$\text{в)} \int \sqrt{1-5x} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{e^x}{e^x+4} dx;$$

$$\text{е)} \int e^{\sin 2x} \cos 2x dx;$$

$$\text{ж)} \int 2^{-x^2} x dx;$$

$$\text{з)} \int \frac{dx}{\sin^2 3x};$$

$$\text{и)} \int \text{tg } 2x dx;$$

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{x^3 - 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{x^2 dx}{(1-2x^3)^2};$$

$$\text{в)} \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\text{г)} \int \frac{\cos 2x}{1-\sin 2x} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{x}{4x^2-3} dx;$$

$$\text{е)} \int e^{\cos 3x} \sin 3x dx;$$

$$\text{ж)} \int 2^{-3x^2} x dx;$$

$$\text{з)} \int \sin \frac{x}{5} dx;$$

$$\text{и)} \int \frac{dx}{\cos^2 3x};$$

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 1 \right) dx;$$

$$\text{б)} \int \sqrt{2x+3} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x}{(1+4x^2)^2} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{5-x};$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{4x-x \ln x};$$

$$\text{е)} \int x e^{x^2-3} x dx;$$

$$\text{ж) } \int x \cos 2x^2 dx;$$

$$\text{з) } \int \left(1 - \sin \frac{x}{5}\right) dx;$$

$$\text{и) } \int \operatorname{ctg} 2x dx;$$

Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \left(2 - 3\sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{x^3}\right) dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{xdx}{(1+3x^2)^5};$$

$$\text{в) } \int \sqrt{1-2x} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{x^2}{1+2x^3} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx;$$

$$\text{е) } \int e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$\text{ж) } \int \sqrt{3^x} \sqrt{5^x} dx;$$

$$\text{з) } \int \frac{x^3}{\sin^2 x^4} dx;$$

$$\text{и) } \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx;$$

Вариант 10.

Задание 1: Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \left(\sqrt{x} - 2x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx;$$

$$\text{б) } \int (1 - \sin 2x)^5 \cos 2x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{г) } \int \frac{x^3 dx}{1+4x^4};$$

$$\text{д) } \int \frac{\sin x}{1+2\cos x} dx;$$

$$\text{е) } \int 2^{-x^3} x^2 dx;$$

$$\text{ж) } \int (e^x + 1)^2 dx;$$

$$\text{з) } \int e^x \sin e^x dx;$$

$$\text{и) } \int \cos 3x dx;$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб. для вузов: в 3 т. - 5-е изд., стер. - М.: Дрофа. - (Высшее образование. Современный учебник). т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. - 2003. - 509 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т. - Изд. стер. - М.: Интеграл - Пресс. Т.1. - 2001. - 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. - 8-е изд. - М.: Физматлит. т.1 - 2001. - 697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. - 22-е изд., перераб. - СПб: Профессия, 2003. - 432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: в 3-х томах. - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Дрофа. Т.1. - 2003. - 703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. - 6-е изд. стер. - М. Физматлит, 2002, - 646 с.

7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд.-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.