Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра __Математика

Составитель: доцент Литвин Д.Б.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РГР №3
по дисциплине
МАТЕМАТИКА

наименование дисциплины

21.03.02 Землеустройство

направление подготовки

Городской кадастр

профиль(и) подготовки

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Ставрополь, 2019

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Скалярное произведение векторов, евклидово пространство

Скалярным произведением геометрических векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi. \tag{1}$$

Вещественное линейное пространство E называется ***евклидовым***, если каждой паре элементов (векторов) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из E поставлено в соответствие вещественное число $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, называемое скалярным или внутренним произведением, причем выполнены следующие аксиомы:

$$\begin{aligned}
&1)\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a};\ \text{коммутативность}\\
&2)\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c};\ \text{дистрибутивность}\\
&3)\ (\mathrm{m}\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\mathrm{m}\vec{b}) = \mathrm{m}(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \ \mathrm{m}=\mathrm{const};\ \text{ассоциативность}\\
&4)\ \vec{a}\cdot\vec{a} > 0,\ \vec{a}\neq\vec{0},\quad \vec{0}\cdot\vec{0}=0;\ \text{свойства нормы вектора.}
\end{aligned} \tag{2}$$

Скалярное произведение в координатном представлении

Пусть задан *ортонормированный* базис $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ и два геометрических вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатные столбцы которых имеют вид:

$$a=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}^T;\quad b=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}^T.$$

Скалярное произведение определяется выражением

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a^Tb \tag{3}$$

Последнее выражение легко распространяется и на n-мерные алгебраические векторы.

В n-мерном линейном пространстве алгебраические *векторы a и b называются ортогональными* если их скалярное произведение равно нулю

$$a \perp b \to a^T b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0. \qquad (4)$$

Длина вектора $|a|$ – его модуль или норма – определяется из выражения (3) для частного случая скалярного произведения вектора на самого себя

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad a^T a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |a|^2, \quad |a| = \sqrt{a^T a}. \qquad (5)$$

Для пространств, размерность которых превышает три, норма вектора теряет геометрический смысл.

Угол между векторами линейного пространства для $\vec{a} \neq \vec{o}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$ определяется из (1) и (3)

$$\cos\varphi = \frac{a^T b}{\sqrt{a^T a}\sqrt{b^T b}} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \qquad (6)$$

Скалярное умножение тесно связано с понятием проекции вектора на ось. Различают векторную и скалярную проекции. Пусть задан вектор $\vec{AB}$ и некоторая прямая l. Опустим из точек A и B перпендикуляры на прямую и обозначим их основания A' и B' (см. рисунок 6). Вектор $\vec{A'B'}$ называется (ортогональной) ***векторной проекцией*** вектора $\vec{AB}$ на прямую l и обозначается $Пр_l \vec{AB}$, т.е. $Пр_l \vec{AB} = \vec{A'B'}$.

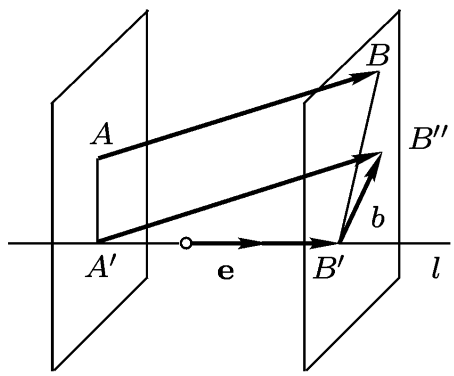

Рисунок 6 – Проекция вектора $\vec{AB}$ на прямую l

Пусть $\vec{e}$ — ненулевой вектор на прямой l. Тогда $\vec{A'B'} = \alpha\vec{e}$. Число α называется ***скалярной проекцией вектора*** $\overrightarrow{AB}$ на прямую l и обозначается $np_l\,\vec{AB}$. Она положительна, если направление $\vec{A'B'}$ совпадает с направлением $\vec{e}$, и отрицательна в противоположном случае.

$$np_l\,\vec{AB} = \left|\vec{AB}\right| \cdot \cos\varphi = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{e}}{|\vec{e}|}.$$

Компоненты вектора в ортонормированном базисе равны его скалярным проекциям на оси координат.

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 3,\quad \vec{a} \perp \vec{b}.$

$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$, т.к.

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4,\quad \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$, $b = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}^T$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a^T b = 6 + 8 - 6 = 8;\quad |\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};\qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$;

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7};\qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4,\quad |\vec{b}| = 6,\quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \pi/3.$

$$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 =$$

$$= 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

$a = \begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}^T$, $b = \begin{pmatrix}4 & 5 & -3\end{pmatrix}^T$; $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 12 + 20 - 15 =17;

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50};$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$;

$\cos\varphi = \dfrac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \dfrac{17}{50};\quad \varphi = \arccos\dfrac{17}{50}.$

Пример. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0;\quad \Rightarrow m = 1.$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1,\quad |\vec{b}| = 2,\quad |\vec{c}| = 3,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{b}\wedge\vec{c} = \dfrac{\pi}{3}.$

$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) =$

$10\vec{a}\cdot\vec{a} + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 14\vec{a}\cdot\vec{c} + 15\vec{a}\cdot\vec{b} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 21\vec{b}\cdot\vec{c} + 20\vec{c}\cdot\vec{a} + 24\vec{b}\cdot\vec{c} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} =$

$= 10\vec{a}\cdot\vec{a} + 27\vec{a}\cdot\vec{b} + 34\vec{a}\cdot\vec{c} + 45\vec{b}\cdot\vec{c} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} =$

=10 + 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.

Векторное произведение векторов

Ориентация базиса

Базис в пространстве называется *правым*, если с конца третьего вектора мы видим кратчайший поворот от первого вектора ко второму направленным против часовой стрелки. Или когда при повороте по кратчайшему расстоянию первого вектора ко второму острие правого буравчика движется вдоль третьей оси. В противном случае базис называется *левым*. На рисунке 8 а) и б) представлены левый и правый базисы в пространстве соответственно.

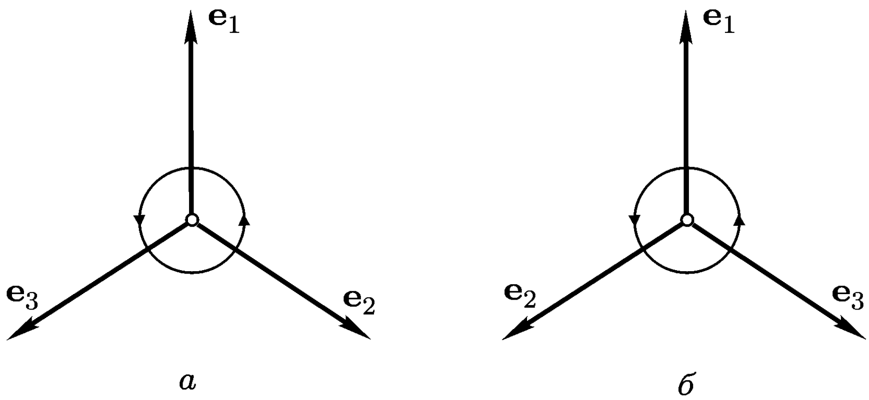

Рисунок 8 - Ориентация базисов в пространстве: а) левая; б) правая

Векторным произведением геометрических векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

1) ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\sin\varphi \geq 0$; $0 \leq \varphi \leq \pi$;

3) дополняет векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ до правой тройки векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

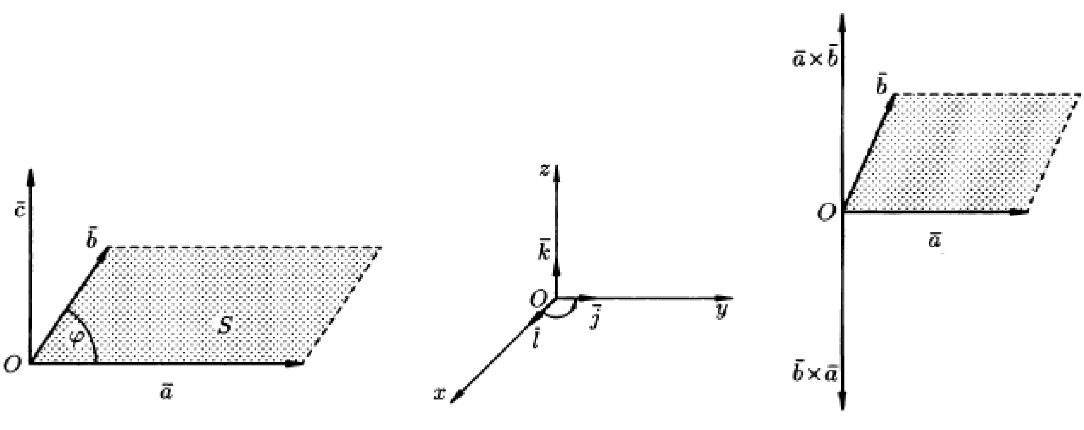

Рисунок 9 - Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Свойства векторного произведения векторов

1) $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ - антикоммутативность векторного произведения;

2) $\vec{a}\times\vec{b}=0$, если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ или $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$;

3) $(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b})$ - ассоциативность;

4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ - дистрибутивность.

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами (см. рисунок):

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}. \tag{7}$$

Векторное произведение в координатном представлении

Пусть задан ортонормированный базис $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ и два геометрических вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатные столбцы которых в этом базисе имеют вид:

$$a=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}^T;\quad b=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}^T,$$

тогда

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Геометрические приложения векторного произведения

Нахождение площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Согласно определению векторного произведения векторов

$$S_{пар}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi=|\vec{a}\times\vec{b}|;\qquad S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|. \tag{9}$$

Выражение для площади параллелограмма (9) справедливо и для случая, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в плоскости OXY, поскольку их координаты можно дополнить нулевой компонентой по оси аппликат

$$a=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & 0\end{pmatrix}^T;\quad b=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & 0\end{pmatrix}^T.$$

Тогда

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & 0\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\vec{k};\quad S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|a_1b_2-a_2b_1\right|. \quad (10)$$

Из последнего выражения выясняется ***геометрический смысл определителя 2-го порядка*** – он равен *ориентированной площади параллелограмма*, построенного на его вектор-столбцах (равно как и на вектор-строках). Очевидно, что площадь параллелограмма равна нулю (при $\left|\vec{a}\right|\neq 0;\left|\vec{b}\right|\neq 0$) только когда образующие его векторы коллинеарны, т.е линейно зависимы. Поэтому, *равенство нулю определителя 2-го порядка (равно как и n-го порядка) является критерием линейной зависимости образующих его столбцов (строк)*.

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

$$a=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\end{pmatrix}^T;\quad b=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}^T.$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-17\\ 7\\ -1\end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\end{pmatrix}^T$$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 3\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\end{pmatrix}^T$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(-1-4)-\vec{j}(-2+4)+\vec{k}(4+2)=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}. \qquad S_\Delta=\frac{\sqrt{65}}{2}\,(\text{ед}^2).$$

<u>Пример.</u> Доказать, что векторы $\vec{a}=7\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}+8\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & -7 & 8\\ 7 & -3 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 5\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

т.к. определитель матрицы равен нулю, то векторы линейно зависимы, т.е. компланарны.

<u>Пример.</u> Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b}$; $3\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$; $\vec{a}\wedge\vec{b}=30^0$.

$$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}=8\vec{b}\times\vec{a}$$

$$S=8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0=4\,(\text{ед}^2).$$

Смешанное произведение векторов

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$, составленное следующим образом: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется векторно-скалярным, или смешанным, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Выясним геометрический смысл выражения $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ и вектор $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$, как показано на рисунке 10.

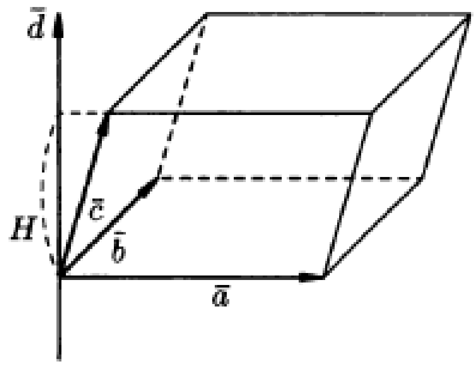

Рисунок 10– Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ численно равно ориентированному объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=S_{пар}\cdot\left(\pm H\right)=\pm V. \qquad (11)$$

Знак объема параллелепипеда определяется ориентацией тройки векторов, его образующих.

Свойства смешанного произведения:

1)Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$. В этом случае не изменяется ориентация тройки векторов.

3) Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$. Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер. Это позволяет записывать смешанное произведение векторов $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ без знаков векторного и скалярного умножения в виде $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

4) Смешанное произведение меняет свой знак при перестановке любых двух векторов-сомножителей, т. е.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b}).$$

5) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$.

Смешанное произведение в координатном представлении

Смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

Приложения смешанного произведения

На основании (11) определим объемы параллелепипеда V_1 и треугольной пирамиды V_2

$$V_1=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|;\quad V_2=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|. \tag{13}$$

Из выражения (12) выясняется ***геометрический смысл определителя 3-го порядка*** – он равен *ориентированному объему параллелепипеда,* построенного на его вектор-столбцах (равно как и на вектор-строках). Очевидно, что объем параллелепипеда равен нулю (при $\left|\vec{a}\right| \neq 0; \left|\vec{b}\right| \neq 0; \left|\vec{c}\right| \neq 0$) только когда образующие его векторы компланарны, т.е линейно зависимы.

По индукции заключаем, что ***геометрическим смыслом определителя n-го порядка*** является ориентированный объем «многогранника», построенного на образующих его вектор-столбцах (строках).

Равенство нулю определителя n-го порядка является критерием линейной зависимости образующих его столбцов (строк).

Пример. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; 3), C(9; 4; 0), D(1; 5; 4) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}^T; \quad AC = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}^T; \quad AD = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}$:

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}^T; \quad BD = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^T; \quad BC = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T.$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left(16+36+4+64-6+6\right)=20(ед^3).$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-8-3)-\vec{j}\,(-2+12)+\vec{k}\,(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{осн}$ = $\sqrt{510}$ / 2 (ед^2)

Т.к. V = $\dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h=\dfrac{3V}{S_{осн}}=\dfrac{120}{\sqrt{510}}$. (ед)

Типовой вариант задания

Задание 1. Написать разложение вектора ***x*** по векторам ***a, b, c*** с координатами

№	***x***	***a***	***b***	***c***
	(15;-20;-1)	(0; 2; 1)	(0; 1;-1)	(5;-3;2).

Задание 2. Найти угол между векторами ***p*** и ***q***, если они заданы через векторы ***a*** и ***b*** с координатами:

№	***a***	***b***	***p***	***q***
	(-1; 2; 8),	(3; 7; -1),	(4a-3b),	(9b-12a)

Задание 3. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, если:

№	A	B	C
	(-2; 4; -6),	(0; 2; -4),	(-6; 8; -10).

Задание 4. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти площадь параллелограмма, длины его диагоналей и угол между ними, если заданы модули векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и угол между этими векторами.

№	$\bar{a} =$	$\bar{b} =$	$\lvert\bar{p}\rvert$	$\lvert\bar{q}\rvert$	$(\bar{p} \wedge \bar{q})$
1	(3p+2q)	(2p-q)	mp=4	mq=3	d=3*pi/4

Задание 5. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 являются вершинами пирамиды. Вычислить ее объем, площадь грани $A_1A_2A_3$ и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

№	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(1;-1;2)	(2;1;2)	(l; 1;4)	(6; -3; 8)

Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 2009. – 328 с.

2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 2007. – 272 с.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. -10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.:, Физматлит, 2006. — 335 с.

5. Литвин Д.Б., Яновский А.А., Элементы векторной алгебры. Учебное пособие. - Ставрополь : ООО "Респект", 2015. - 68с.

6. Высшая математика для экономистов: Учебник для студ. вузов, обучающихся по эконом. спец. / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2005.

7. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Учебник для вузов по эконом. спец. – М.: Инфра-М, 2002.