Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра __Математика

Составитель: доцент Литвин Д.Б.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РГР №2
по дисциплине

МАТЕМАТИКА

наименование дисциплины

21.03.02 Землеустройство

направление подготовки

Городской кадастр

профиль(и) подготовки

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Ставрополь, 2019

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система вида

$$A_{m\times n}X_n = B_m; \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $A_{m\times n}$ - матрица линейной системы (в общем случае прямоугольная);

$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$ - n-мерный вектор неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}^T$ - m-мерный вектор свободных членов.

Если в системе вектор свободных членов – нулевой вектор, то система называется ***однородной***, в противном случае – ***неоднородной***.

Решить систему — значит найти множество всех ее решений *X*.

СЛАУ, которая имеет хотя бы одно решение называется *совместной*, в противном случае – *не совместной (переопределенной).* Совместная СЛАУ, у которой имеется единственное решение, называется *определенной.* Если решений бесчисленное множество – СЛАУ называют *совместной недоопределенной*.

Матричный метод решения СЛАУ. Обратная матрица

Пусть матрица системы является квадратной (число уравнений равно числу неизвестных $m=n$) и невырожденной $(\det(A) \neq 0)$.

В этом случае матричные уравнения имеют и притом единственные решения:

$$\begin{aligned} A\cdot X = B \to X = A^{-1}B \\ X\cdot A = B \to X = BA^{-1} \end{aligned}. \qquad (2)$$

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** для матрицы *A*, если она удовлетворяет выражениям:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E. \qquad (3)$$

Заметим, что только квадратные, невырожденные ($\det(A)\neq 0$) матрицы имеют обратную матрицу и притом только одну.

Вычисление обратной матрицы через присоединенную:

1) Вычислить определитель матрицы. Если $\Delta=0$, обратной матрицы не существует.

2) Найти алгебраические дополнения $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ всех элементов матрицы.

3) Составить матрицу $\tilde{A}$ из этих алгебраических дополнений.

4) Транспонируя полученную матрицу получить присоединенную $\tilde{A}^T$.

5) Разделить присоединенную матрицу на величину определителя Δ.

6) Сделать проверку: $A\cdot A^{-1}=E$.

Таким образом, обратная матрица определяется по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}^T, \quad \text{при} \quad \det(A)\neq 0. \qquad (4)$$

Пример:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^{-1}-?$$

1) $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ - обратная матрица существует.

2) Найдем все алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-1; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=38; \quad A_{13}=-27;$$

$$A_{21}=1; \; A_{22}=-41; \; A_{23}=29; \; A_{31}=-1; \; A_{32}=34; \; A_{33}=-24.$$

3) Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}.$$

4) Транспонируем полученную матрицу и получим присоединенную:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}.$$

5) Разделим матрицу A_1^T на величину определителя:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

6) Проверка: $A \cdot A^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, A^{-1} - обратная матрица.

Вычисление обратной матрицы элементарными преобразованиями:

1) Составить блочную матрицу вида $\left(A|E\right)$.

2) Путем элементарных преобразований строк привести левую часть блочной матрицы к единичной матрице. Тогда в правой ее части получим искомую обратную $\left(E|A^{-1}\right)$.

К элементарным преобразованиям в данном случае относятся:

— умножение всех элементов строки на постоянное число не равное нулю;

— прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число.

<u>Пример</u>. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. $A^{-1} - ?$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) -3\cdot(1c) \;\square\; \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \div 2 \;\square$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right) -2\cdot(2c) \sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}. \quad \text{Проверка: } A^{-1}A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства обратных матриц:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A; \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \quad \left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}. \qquad (5)$$

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде:

$$AX = B \quad \to \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

Получим A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\tilde{A}^{T}=\frac{1}{-30}\begin{pmatrix}-5 & -1 & -1\\ 10 & 14 & -16\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30}\\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11\\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33\\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Находим вектор *X*.

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\ -\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\ \frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Недостатки матричного метода решения СЛАУ:

— возможность решения систем только с квадратными невырожденными матрицами (устраняется предварительным преобразованием СЛАУ к этому виду);

— существенными вычислительными затратами особенно при решении систем высокого порядка.

Метод Крамера решения СЛАУ

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Этот метод, также как и матричный, без предварительного преобразования позволяет решать только системы с квадратными невырожденными матрицами, однако он более экономичен в вычислительном отношении и позволяет находить решение покоординатно.

Искомые неизвестные определяются следующим образом:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \;\; \dots \;\; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (6)$$

Здесь Δ - *главный определитель* системы, $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ - *частные определители* системы, получаемые из главного путем замены соответствующего столбца столбцом свободных членов.

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1; \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2; \quad x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Общая теория СЛАУ

Подпространства матриц

Матричный метод и метод Крамера применимы только к системам с квадратной и невырожденной матрицей, когда число неизвестных равняется числу уравнений и все уравнения линейно независимы. В этом случае система имеет единственное решение и потому называется *определенной*.

Рассмотрим СЛАУ общего вида (1), т.е. с прямоугольной матрицей, на следующем частном примере

$$A_{m\times n}X_n = B_m; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Данное уравнение можно рассматривать как отображение, которое каждому вектору X_n из n-мерного пространства R^n ставит в соответствие определенный вектор B_m m-мерного пространства R^m. При этом вектор B_m называют образом вектора X_n, а его, в свою очередь, - прообразом B_m. Все множество векторов-образов называется *образом матрицы A* - $\mathrm{Im}(A)$. Это множество является *областью значений E(A) матричного оператора* и представляет собой линейное подпространство пространства R^m, поскольку включает и нулевой вектор: $\mathrm{Im}_m(A_{m\times n}) \subset R^m$. Очевидно, что *множеством определения D(A) матричного оператора* является все линейное пространство R^n: $D(A_{m\times n}) = R^n$.

Образ матрицы совпадает с пространством $Rc(A)$ *ее столбцов:* $\mathrm{Im}(A) = Rc(A)$. Это видно из следующего представления уравнения (7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

откуда следует, что вектор B_m является линейной комбинацией столбцов матрицы A.

Нуль-пространством $Z(A)$ *матрицы A* называется множество решений однородной системы

$$A_{m\times n} X_n = 0_m \text{, например } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Это множество является линейным подпространством пространства R^n: $Z_n(A_{m\times n}) \subset R^n$. Каждый вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$, принадлежащий этому пространству, преобразуется матричным оператором в нулевой вектор $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ пространства R^m. Нуль-пространство матрицы называется также *ядром* этой матрицы *Ker(A)*, а его размерность – *дефектом* матрицы *dfc(A)*.

Рассматривая матрицу как совокупность строк, из выражения (9) заключаем, что нуль-пространство ортогонально пространству строк $Rl(A)$: $Z_n(A) \perp Rl_n(A)$.

СЛАУ общего вида могут или вовсе не иметь решений (*переопределенные или несовместные системы*) или иметь бесконечное множество решений (*недоопределенные системы*).

Поэтому при решении СЛАУ общего вида необходимо выяснить, совместна ли она, т.е. имеет ли она решения. *Из выражения (8) следует, что столбец свободных членов совместной системы представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы системы. В несовместной системе столбец свободных членов нельзя представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы, он линейно независим от столбцов матрицы.* Поэтому вопрос совместности основан на определении рангов основной A и расширенной $A|B$ матриц системы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A|B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера – Капелли (условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик,

Альфре́до Капе́лли (1855 -1910) итальянский математик)

Теорема: *Система совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы*

$$rank(A)=rank(A|B). \tag{10}$$

Если же $rank(A)<rank(A|B)$, то система несовместна (переопределенная).

При этом, если равенство (10) выполняется и этот ранг равен числу неизвестных *r(A)=dim(X)*, то система имеет единственное решение (определенная), а если он меньше числа неизвестных *r(A)<dim(X)*, то система имеет бесчисленное множество решений (недоопределенная).

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$$

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 11\end{vmatrix}=1-6=5\neq 0;\quad r(A)=2.$$

$$A|B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{pmatrix}$$

$$r(A|B)=3.$$

Система несовместна.

Метод Гаусса

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований строк, к которым относятся:

1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы «нулевых» уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Достоинством метода Гаусса является то, что в процессе исключения неизвестных попутно определяется ее совместность. Метод удобнее использовать преобразуя строки расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Эта процедура называется *прямым ходом метода Гаусса*. Последовательное определение неизвестных снизу вверх называется *обратным ходом метода Гаусса*.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Представим систему в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3; \\ 5x_2 - 7x_3 = 11; \\ -x_3 = -2. \end{cases}$$

Выполним обратный ход метода Гаусса:

— из последнего уравнения найдем $x_3 = 2$;

— подставим $x_3 = 2$ во второе уравнение, из которого найдем $x_2 = 5$;

— подставим $x_3 = 2$, $x_2 = 5$ в первое уравнение, откуда $x_1 = 1$.

Таким образом, $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T$. Это определенная система.

Фундаментальная система решений

Вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ будем называть *частным решением* системы линейных уравнений $A_{m\times n} X_n = B_m$, если при подстановке этого вектора в систему получается тождество.

Совокупность всех частных решений системы линейных уравнений назовем *общим решением системы.*

Рассмотрим однородную линейную систему, например, вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна, поскольку у нее есть, по крайней мере, одно частное, называемое *тривиальным*, решение, для которого все неизвестные имеют *нулевое значение*. Все решения системы (11) образуют нуль-пространство (ядро) рассматриваемой матрицы A, а его размерность - дефект ν определяется соотношением

$$\nu = n - r. \qquad (12)$$

Покажем это на примере (11). Приведем систему комбинацией строк к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Видно, что *r=2*. Удалим $m-r$ линейно зависимые от базисных строки (3-ю). Выберем *r* базисных, линейно независимых столбцов – например, 1-й и 3-й. Им соответствуют r базисных переменных – x_1, x_3. Остальные $n-r$ переменные, в нашем случае $-x_2, x_4$, будем называть *свободными (независимыми)*. Перенесем их в правую часть системы, получим

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -3x_2 - 2x_4; \\ 3x_3 = -x_4, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$A^b_{r\times r} X_r{}^b = A^f_{(m-r)\times(n-r)} X^f_{n-r}, \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Получившаяся система является системой «Крамеровского» типа с квадратной невырожденной матрицей $A^b_{r\times r}$, а потому ее можно решать любым известным способом, например матричным:

$$X_r^{\,b} = \left(A_{r\times r}^{b}\right)^{-1} A_{(m-r)\times(n-r)}^{f} X_{n-r}^{\,f},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Полагая вектор свободных переменных $\begin{pmatrix} x_2 & x_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}^T$, где c_1, c_2 - произвольные величины, получим общее решение однородной системы (11)

$$\begin{cases} x_1 = -3c_1 - c_2; \\ x_2 = c_1; \\ x_3 = -1/3c_2; \\ x_4 = c_2. \end{cases} \quad \rightarrow \quad X_n = F_{n\times(n-r)} C_{n-r}; \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Матрица $F_{n\times(n-r)}$ называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) однородной системы уравнений *(11). Она образована $n-r$ вектор-столбцами, которые являются линейно независимыми частными решениями однородной системы, и представляют собой базис нуль-пространства (ядра) матрицы А*. Линейная оболочка этих векторов (множество всех их линейных комбинаций) является общим решением рассматриваемой однородной системы уравнений (11).

Фундаментальная система решений называется *нормальной* (как в выражении (16)), если она образована решениями системы, при которых вектор свободных переменных последовательно принимает значения столбцов единичной матрицы.

Таким образом, общее решение однородной системы линейных уравнений (11) представляет собой линейную оболочку векторов фундаментальной системы решений.

Решение неоднородной СЛАУ

Рассмотрим неоднородную СЛАУ, например вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Будем полагать, что система (17) совместна.

Общее решение неоднородной системы уравнений представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной.

$$X_{неоднород} = X_{однор} + X_{частное}$$

Как и для однородного случая, приведем систему (17) комбинацией строк к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Если система совместна, то, очевидно, должно выполняться условие $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$, тогда последнее уравнение (18) становится тождеством 0=0, и его можно отбросить.

Далее действуем, как и в случае с однородной системой. В результате получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 - b_2 \\ (b_2 - 2b_1)\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 - b_2 \\ 0 \\ 1/3(b_2 - 2b_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 . \tag{19}$$

Сравнивая это решение с решением однородной системы (16), мы видим, что оно отличается от общего решения однородной системы только одним слагаемым – частным решением неоднородной системы.

Решение несовместных СЛАУ по МНК

В завершении этого раздела рассмотрим случай несовместной СЛАУ. Такие системы уравнений часто возникают на практике, когда необходимо оценить некоторый вектор X неизвестных параметров по результатам большого количества неточных измерений. В этом случае в системе $A_{m\times n} X_n = B_m$ число уравнений, т.е. ограничений, накладываемых на переменные, превышает число неизвестных m>n, и система становится переопределенной.

Точного решения X не существует, однако можно получить некоторую оценку X^* этого решения, которая дает наиболее близкий, в определенном смысле, к вектору B вектор AX^*. На практике получил широкое распространение метод наименьших квадратов (МНК). Оценка X^*, оптимальная в смысле МНК, удовлетворяет условию минимума суммы квадратов разностей

$$\left(B - AX^*\right)^T \left(B - AX^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - Ax_i^*\right)^2 \to \min . \tag{20}$$

В результате минимизации выражения (20), получим следующую оптимальную в указанном выше смысле оценку решения несовместной СЛАУ

$$X^* = \left(AA^T\right)^{-1} A^T B . \tag{21}$$

Типовой вариант задания

1. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений графическим методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

4. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 2009. – 328 с.

2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 2007. – 272 с.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. -10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.:, Физматлит, 2006. — 335 с.

5. Литвин Д.Б., Яновский А.А., Элементы векторной алгебры. Учебное пособие. - Ставрополь : ООО "Респект", 2015. - 68с.

6. Высшая математика для экономистов: Учебник для студ. вузов, обучающихся по эконом. спец. / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2005.

7. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Учебник для вузов по эконом. спец. – М.: Инфра-М, 2002.