Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра Математика

Составитель: доцент Литвин Д.Б.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РГР №1

по дисциплине

МАТЕМАТИКА

наименование дисциплины

21.03.02 Землеустройство

направление подготовки

Городской кадастр

профиль(и) подготовки

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Ставрополь, 2019

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Основные определения

Матрицей размерности $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица, вида:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Обычно матрицы обозначают заглавными латинскими буквами. Величины a_{ij}, $i = \{1, 2, ...m\}$, $j = \{1, 2, ...n\}$ называются элементами матрицы.

Матрицу можно рассматривать как упорядоченную совокупность m-мерных алгебраических вектор-столбцов или n-мерных вектор-строк.

Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковые размерности, а их элементы, стоящие на одинаковых местах, равны.

Различают *квадратные, треугольные, диагональные, единичные и др. матрицы.*

Транспонирование

Матрицу A^T называют т***ранспонированной*** по отношению к матрице A, а переход от A к A^T ***транспонированием***, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке как столбцы матрицы A^T, другими словами, $a_{ij}^T = a_{ji}$, $i = \{1, 2, ...m\}$, $j = \{1, 2, ...n\}$, в частности для векторов

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}; \qquad b = a^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

Линейные операции над матрицами – сложение матриц и умножение матрицы на число выполняются по аналогии с соответствующими операциями над алгебраическими векторами.

Сложение (вычитание) матриц определено только для матриц одинаковых размерностей.

Матрица $C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}$ является **суммой** матриц А и В, если ее элементы представляют собой сумму соответствующих элементов исходных матриц:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \{1, 2, ...m\},\ j = \{1, 2, ...n\}.$$

Умножением матрицы *A* на произвольное число α называется матрица *B* той же размерности, что и *A*, все элементы которой умножаются на это число

$$B = \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & ... & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & ... & \alpha a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & ... & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Матрицы и линейные операции над ними удовлетворяют аксиомам **Ошибка! Источник ссылки не найден.** линейного пространства, в частности:

$$A + B = B + A; \quad (C + A) + B = C + (A + B). \qquad (3)$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A; \quad (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A). \qquad (4)$$

Поэтому множество всех матриц одинаковой размерности mxn образуют линейное пространство размерности mn. Например, любую квадратную матрицу второго порядка можно разложить в линейную комбинацию 4-х базисных матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Даны матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; В = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2А + В.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц

Матрица $C_{m\times n} = A_{m\times k} \cdot B_{k\times n}$ является ***произведением матриц*** *A* и *B*, если ее элементы вычислены по формуле «строка на столбец»:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \,. \qquad (5)$$

Операция умножения матриц определена только для согласованных матриц, число столбцов первой из которых равно числу строк второй. Умножение выполняется по формуле «строка на столбец».

Свойства операции умножения матриц.

1)Умножение матриц **не коммутативно**, даже если определены оба произведения

$$AB \neq BA. \qquad (6)$$

Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB = BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

2) Умножение матриц ассоциативно и дистрибутивно:

$$(AB)C=A(BC).$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

3) Если определено произведение *AB*, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Пример. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число α=2.

Найти $A^T B+\alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 \\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B+\alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot1 + 4\cdot4 + 1\cdot3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы

Определители второго и третьего порядков

Определитель второго порядка.

$$\det(A_{2\times2}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (7)$$

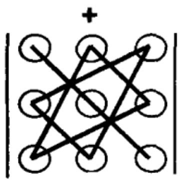
Определитель второго порядка представляет собой разность произведений элементов главной и побочной диагоналей.

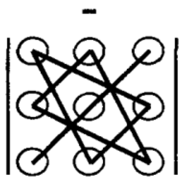
Определитель третьего порядка

$$\det(A_{3\times3}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad (8)$$

Для запоминания формулы гораздо удобнее правило Саррюса или треугольников. Берутся произведения элементов, соединенных линиями со знаком «+» (слева) и со знаком «-» (справа):





Свойства определителей

Свойство 1 («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот: $\det(A) = \det(A^T)$, например

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10; \quad \det(A^T) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10. \qquad (9)$$

Поэтому, в дальнейшем строки и столбцы будем просто называть *рядами определителя.*

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак на противоположный, например

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10. \qquad (10)$$

Следствие: определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 3. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2(2+3) = 10. \qquad (11)$$

Следствие: если определитель содержит нулевой ряд, то он равен нулю.

Замечание. При умножении матрицы на число все ее элементы умножаются на это число, поэтому: $\det(\alpha A_{n\times n}) = \alpha^n \det(A_{n\times n})$, например

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \det(\text{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 24 + 12 - 9 - 12 - 8 = 10;$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad \det(2\text{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2^3 \det(\text{A}) = 24 + 192 + 96 - 72 - 96 - 64 = 80.$$

Свойство 4. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей, например, по первой строке

$$\det(\text{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 8 = 10; \qquad (12)$$

Свойство 5 («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число. Докажем, например, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k \cdot a_{32} \end{vmatrix}.$$

Действительно, используя свойства 4 и 3, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k \cdot a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \Delta + k \cdot 0 = \Delta.$$

Следствие: если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

Свойство 6 («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов определенного ряда на соответствующие им алгебраические дополнения

$$\det(A) = \Delta A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+k} M_{ik} \,. \tag{13}$$

Введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя *n-го* порядка называется подопределитель *(n-1)-го* порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Так, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} . \qquad \text{Например,} \quad A_{11} = M_{11}; \ A_{32} = -M_{32}. \tag{14}$$

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 6 на примере определителя 3-го порядка, разложив его, например, по элементам 1-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

В самом деле, имеем

$$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)=$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=\Delta.$$

Таким образом, свойство 6 позволяет представить определитель *n*-го порядка в виде суммы *n* определителей (*n-1*)-го порядков.

Пример. Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т. к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$=3\cdot\left(7\cdot3\cdot4+(-1)\cdot0\cdot2+5\cdot7-(-1)\cdot3\cdot1-7\cdot7\cdot2-5\cdot0\cdot4\right)+$$
$$+\left(5\cdot3\cdot4+(-1)\cdot7\cdot2+5\cdot7\cdot8-(-1)\cdot3\cdot8-5\cdot7\cdot4-5\cdot7\cdot2\right)-$$
$$-\left(5\cdot0\cdot2+7\cdot1\cdot5+7\cdot3\cdot8-5\cdot0\cdot8-3\cdot1\cdot5-7\cdot7\cdot2\right)=122.$$

Следствие: определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Свойство 7. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю. Так, например,

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0.$$

Свойство 8. $det(AB) = det(A)\cdot det(B)$.

Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти *det (AB).*

1-й способ:

det(A) = 4 – 6 = -2; det(B) = 15 – 2 = 13; det (AB) = det(A) ·det(B) = -26.

2- й способ:

AB = $\begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot 3 \\ 3\cdot 5+4\cdot 1 & 3\cdot 2+4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$,

det (AB) = 7·18 - 8·19 = 126 – 152 = -26.

Свойство 9. Если в матрице A строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Ранг матрицы

Известно, что линейные оболочки столбцов $L_{col}(A)$ и строк $L_{line}(A)$ матрицы A образуют линейные арифметические пространства. Доказывается, что размерности пространств столбцов $\dim L_{col}(A)$ и строк $\dim L_{line}(A)$ равны одной и той же величине, которую называют *рангом* матрицы. Ранг играет важную роль в линейной алгебре и обозначается $rang(A)$, $rank(A)$ или просто $r(A)$

$$r(A) = \dim L_{col}(A) = \dim L_{line}(A).$$

Таким образом, ***ранг матрицы*** – это число линейно независимых столбцов (строк) этой матрицы.

Это означает, что определитель, построенный на этих столбцах (строках) должен быть ненулевым. Поэтому ***ранг матрицы*** – это максимальный из порядков ненулевых миноров, порожденных этой матрицей.

Минором M_S *порядка* s матрицы называется определитель, образованный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных ***s*** строк и ***s*** столбцов.

В матрице размерности $m \times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, например

$$rank\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 2, \text{ т.к. } M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ а } M_3 \text{ не существует.}$$

Таким образом, ***r*** не может превышать наименьшее из чисел m или n

$$rank\left(A_{m\times n}\right) \leq \min\left(m, n\right). \tag{15}$$

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются *базисными.*

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Порядок базисного минора матрицы и есть ранг этой матрицы. Ранг вычисляется или *методом окаймляющих миноров*, или *элементарными преобразованиями рядов матрицы*.

Для определения ранга матрицы используют так называемые *элементарные преобразования* строк или столбцов, которые здесь будем называть рядами матрицы.

Элементарные преобразования матрицы, сохраняющие ее ранг:

1) умножение (деление) ряда на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одного ряда соответствующих элементов другого ряда, умноженных на произвольное число;

3) перестановка рядов;

4) вычеркивание (удаление) нулевых рядов;

5) транспонирование.

<u>Пример:</u> Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow r = 2.$$

Типовой вариант задания

1.Умножить матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

2.Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

3.Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 8 \\ 5 & 18 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 2009. – 328 с.

2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 2007. – 272 с.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. -10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.:, Физматлит, 2006. — 335 с.

5. Литвин Д.Б., Яновский А.А., Элементы векторной алгебры. Учебное пособие. - Ставрополь : ООО "Респект", 2015. - 68с.

6. Высшая математика для экономистов: Учебник для студ. вузов, обучающихся по эконом. спец. / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2005.

7. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Учебник для вузов по эконом. спец. – М.: Инфра-М, 2002.