ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Шибаев В.П.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Б1.Б.02 Математические методы в биологии

Шифр и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

36.04.02 Зоотехния

Шифр и наименование направления подготовки

Кормление сельскохозяйственных и домашних животных

наименование профиля

Программа академической магистратуры

Ориентация ОП ВО в зависимости от вида(ов) профессиональной деятельности

Магистр

Квалификация выпускника

Очная, заочная

Форма обучения

Ставрополь, 2019

Целями практических занятий по дисциплине является формирование у магистров навыков построения математических моделей для применения в научных исследованиях и использования этих результатов в профессиональной деятельности.

1 занятие. Составление математических моделей задач линейного программирования.

Цель: научиться построению системы ограничений и целевой функции.

Вопросы:

1. Методология построения моделей.
2. Математические и экономические модели.
3. Этапы экономического моделирования.
4. Основные типы моделирования.

Задачи для решения.

1.5. Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 80 ден. ед. и содержит: 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 10 ден. ед. и содержит 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не более 16 ед.

1.6. На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов. Другие условия задачи приведены в таблице.

Тип аппарата	Производительность работы линий, шт. в сутки		Затраты на работу линий, ден. ед. в сутки		План, шт.
	1	2	1	2	
A	4	3	400	300	50
B	6	5	100	200	40
C	8	2	300	400	50

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

1.7. Необходимо распилить 20 бревен длиной по 5 м каждое на бруски по 2 м и 3 м; при этом должно получиться равное количество брусков каждого размера.

Составить такой план распила, при котором будет получено максимальное число комплектов и все бревна будут распилены (в один комплект входит по одному бруску каждого размера).

2 занятие. Геометрический метод решения задач линейного программирования.

Цель: научиться решать задачи линейного программирования в прямоугольной декартовой системе координат.

Вопросы:

1. Что представляет собой множество допустимых решений задачи линейного программирования?

2. Где может находиться оптимальное решение задачи линейного программирования?

3. Как найти координаты нормального вектора? Что указывает этот вектор?

4. Уравнение семейства параллельных прямых, перпендикулярных векторов.

5. Как решить задачу линейного программирования на min?на max?

6. Может ли задача линейного программирования иметь бесконечное множество решений?

7. Может ли задача линейного программирования не иметь решения?

Задачи для решения.

4.6. $F = x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4.7. $F = 2x_1 - x_2 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ -x_1 - 2x_2 \ge -10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4.8. $F = x_1 - x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le -8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4.9. Текст условия приведен в задаче **1.4**.

4.10. Текст условия приведен в задаче **1.5**.

Задачи **4.11**, **4.12** решить геометрически, предварительно приведя их к стандартной форме.

4.11.

$F = -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$

4.12.

$F = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5.$

3 занятие. Симплекс-метод.

Цель: Научить решать задачи линейного программирования аналитическим методом.

Вопросы:

1. Схема решения задач линейного программирования.
2. Что лежит в основе симплексного метода?
3. Геометрический смысл симплексного метода.
4. Чему соответствует оптимальное решение симплекс-метода геометрически?
5. Как сократить число перебираемых допустимых базисных решений?

6. Идея симплекс-метода (решение задач на maximin целевой функции аналитически).

7. Критерии оптимальности задач на maximinцелевой функции Z при решении аналитически.

8. Построение первой симплекс-таблицы. В каком виде должна быть задана система ограничений? Как ее следует преобразовывать?

9. Как выбирают разрешающий столбец при решение задач на min?

10. Как выбирают разрешающую строку?

11. Что называют разрешающим элементом?

12. Что будет в случае, если в разрешающем столбце нет положительных элементов?

13. Алгоритм перехода к симплекс-таблице №2.

14. Критерий оптимальности решения задачи на min с помощью симплекс-таблиц.

15. Как выбирают разрешающий столбец при решении задачи на max?

16. Критерий оптимальности решения задач на max с помощью симплекс-таблиц.

17. Метод искусственного базиса (М-метод).

Задачи для решения.

5.12. $F = 2x_1 - 6x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

5.13. $F = 2x_1 - x_2 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

5.14. $F = x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

5.15. $F = 2x_1 - x_2 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ -x_1 - 2x_2 \ge -10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

5.20. $F = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -1, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$

5.21. $F = -6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 8x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 \leq -1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

5.22. $F = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$

5.23. $F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 6, \\ -x_1 + x_3 \leq 2, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

5.24. $F = 4x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 2x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 0, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

5.25. $F = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 14x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 35, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$

4 занятие. Двойственные задачи линейного программирования.

Цель: научиться составлению модели двойственной задачи по заданной модели исходной задачи.

Вопросы:

1. Как составляется расширенная матрица исходной задачи?

2. Принцип составления транспонированной матрицы?

3. Как формируется двойственная задача на основании составленной транспонированной матрицы и условии не отрицательности переменных.

Задачи для решения.

6.12. $F = x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -2, \\ x_1 - 2x_2 \ge -13, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

6.13. $Z = 10y_2 - 3y_3 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 3, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

6.14. Текст условия приведен в задаче **1.4**.

6.15. $F = x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

6.16. Для изготовления четырех видов продукции (А, Б, В, Г) используются три вида ресурсов (I, II, III). Другие условия задачи представлены в таблице

Ресурсы	Запас ресурсов, ед.	Нормы расхода сырья на единицу продукции, ед.			
		А	Б	В	Г
I	3400	2	1	0,5	4
II	1200	1	5	3	0
III	3000	3	0	6	1
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		7,5	3	6	12

Необходимо: 1. Определить план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

2. Сформулировать экономически, записать и решить двойственную задачу. Пояснить экономический смысл полученных объективно обусловленных оценок ресурсов.

3. Найти интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменению запаса ресурсов каждого вида.

4. Определить изменение максимальной прибыли от реализации продукции при увеличении запаса ресурса I на 40 ед., ресурса III — на 50 ед. и уменьшении запаса ресурса II на 30 ед. Оценить раздельное влияние этих изменений и суммарное влияние.

5. Определить нормы заменяемости ресурсов.

6. Сопоставить оценку затрат и прибыли по оптимальному плану и каждому виду продукции.

7. Оценить целесообразность введения в план пятого вида продукции Д, нормы расхода сырья на единицу которого соответственно равны 2, 4, 2 ед., а прибыль — 15 ден. ед.

6.17. Используя геометрическое решение двойственной задачи и теоремы двойственности, решить задачу линейного программирования

$$F = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \le -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \ge 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

5 занятие. Транспортная задача.

Цель: составление опорного плана транспортной задачи методом потенциалов.

Вопросы:

1. Три типа транспортных задач линейного программирования.

2. Математическая модель транспортной задачи по критерию стоимости.

3. Закрытая и открытая модели транспортной задачи.

4. Матрицы С иХтранспортной задачи.

5. Что называется оптимальным планом транспортной задачи?

6. Построение первоначального плана транспортной задачи:

1. методом северо-западного угла;
2. методом минимального элемента
3. методом аппроксимации.

7. Метод потенциалов (понятие набора, цикла, потенциалов).

8. Необходимое и достаточное условие оптимальности плана перевозок транспортной задачи.

9. Система потенциалов (вид уравнений, количество уравнений, количество неизвестных, метод решения).

10. Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов.

11. Формулировка транспортной задачи по критерию времени (в общем виде).

12. Определение кратчайших расстояний по данной сети.

Задачи для решения.

В задачах **7.10, 7.11**: **а)** составить экономико-математическую модель задачи; **б)** найти оптимальное распределение поставок и минимальные затраты на перевозку, выполнив первоначальное распределение поставок методом наименьших затрат.

7.10.

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос		
		1	2	3
		60	60	50
1	50	2	3	2
2	70	2	4	5
3	60	6	5	7

7.11.

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		450	250	100	100
1	200	6	4	4	5
2	300	6	9	5	8
3	100	8	2	10	6

Решить транспортные задачи **7.10** (см. выше), **7.12, 7.13,** составив первоначальное распределение поставок методом “северо-западного” угла.

7.12.

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		15	25	8	12
1	25	2	4	3	6
2	18	3	5	7	5
3	12	1	8	4	5
4	15	4	3	2	8

7.13.

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		50	50	40	60
1	30	5	4	6	3
2	70	4	5	5	8
3	70	7	3	4	7

В задачах **7.14, 7.15** закончить решения транспортных задач начиная с заданных распределений поставок.

7.14.

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		15	25	8	12
1	95	5 / 45	4 / 50	13	9
2	35	2	7	9 / 35	8
3	55	9	7 / 35	11	7 / 20
4	75	1	6	1	1 / 35

7.15.

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		50	10	20	40
1	30	5	6	1 / 20	2 / 10
2	50	3 / 10	1 / 10	5	2 / 30
3	20	8 / 20	4	2	5
4	20	6 / 20	5	2	4

7.16. Решить транспортную задачу.

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос					
		1	2	3	4	5	6
		10	35	15	25	55	10
1	30	5	7	1	5	4	9
2	5	7	5	8	6	3	4
3	45	6	4	8	3	2	5
4	50	3	1	7	4	2	3

6 занятие. Задачи сетевого планирования.

Цель: использовать элементы сетевого планирования в целях оптимизации поставленных задач.

Вопросы:

1. Понятие сетевой модели.
2. Что называется сетевым графиком?
3. В каких случаях сетевой график называется структурным?
4. Основные понятия сетевого графика (определение и обозначение); событие (определение, обозначение, свойства); путь (определение, обозначение, полный, критический)
5. Ошибки при построении сетевого графика.
6. Линейная диаграмма сетевого графика (способ построения, нахождения $a_{кр}$и $t_{кр.}$).

Задачи для решения.

В задачах **14.7**, **14.8** построить сетевой график. Найти продолжительность выполнения комплекса работ, временные характеристики событий и работ. В скобках указана продолжительность работ.

14.7. Сделать деревянный ящик (работу выполняет один человек). Разместить доски в соответствии с размерами ящика (15 мин); разрезать доски (12 мин); склеить части ящика (40 мин); прибить к крышке ящика петли (8 мин); подождать, пока ящик высохнет, и вытереть его (15 мин); петли (с крышкой) прибить к ящику (10 мин).

14.8. Заменить колесо машины (работу выполняют два человека). Достать из багажника домкрат и инструменты (40 с); снять диск с колеса (30 с); освободить колесо (50 с); поставить домкрат под машину (26 с); поднять машину (20 с); из багажника взять запасное колесо (25 с); снять гайки и колесо (20 с); установить запасное колесо на ось (10 с); завинтить (не сильно) гайки на оси (15 с); опустить машину и собрать домкрат (25 с); поставить домкрат обратно в багажник (10 с); завинтить гайки на оси до конца (12 с); положить плохое колесо и инструменты в багажник (40 с); поставить на место диск колеса (10 с).

14.9. Для сетевого графика (рис. 14.17) найти все полные пути, критический путь; рассчитать ранние и поздние сроки свершения событий, начала и окончания работ; определить резервы времени полных путей и событий, резервы времени (полные, частные резервы первого вида, свободные и независимые) работ и коэффициенты напряженности работ.

14.10. Как изменится срок выполнения проекта (*см.* рис. 14.17), резервы времени работ и событий, коэффициенты напряженности работ, если увеличить продолжительность работы $t(9, 10)$ на величину: а) $R_п(9, 10)$; б) $R_1(9, 10)$; в) $R_с(9, 10)$; г) $R_н(9, 10)$?

14.11. Как изменится срок выполнения проекта (*см.* рис. 14.17), резервы времени работ и событий, коэффициенты напряженности работ, если продолжительность каждой работы $t(i, j)$ увеличить на величину: а) $R_п(i, j)$; б) $R_1(i, j)$; в) $R_с(i, j)$; г) $R_н(i, j)$? Для случаев б), в) и г) найти все критические пути сетевого графика.

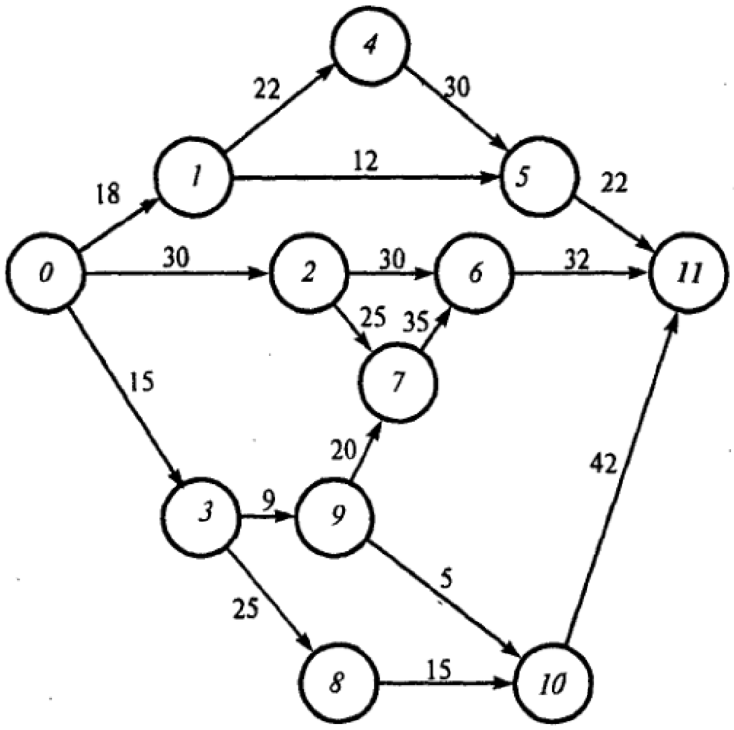


Рис. 14.17

14.12. В табл. 14.6 указаны оценки времени выполнения работ сетевого графика, данные ответственными исполнителями и экспертами.

Таблица 14.6

№ п/п	Работа (i, j)	Оценки времени выполнения работы, сутки		
		оптимистическая $t_о(i, j)$	пессимистическая $t_п(i, j)$	наиболее вероятная $t_{нв}(i, j)$
1	*(1,2)*	5	9	6
2	*(1,3)*	2	7	5
3	*(1,4)*	4	10	8
4	*(3,4)*	9	14	11
5	*(2,5)*	7	13	10
6	*(4,5)*	1	4	3

Необходимо: а) построить сетевой график; б) определить средние (ожидаемые) значения продолжительности работ; в) определить критический путь и его длину. Полагая, что продолжительность критического пути распределена по нормальному закону, найти: а) вероятность того, что срок выполнения комплекса работ не превысит 17 суток; б) максимальное значение продолжительности выполнения проекта, которое можно гарантировать с надежностью 0,95.

14.13. По данным табл. 14.7 необходимо: 1) построить сетевой график; 2) определить критический путь и стоимость проекта при минимально возможных значениях продолжительности всех работ; 3) найти минимальную стоимость проекта при том же сроке его завершения; 4) рассчитать и построить оптимальную зависимость стоимости проекта от продолжительности его выполнения, используя в качестве первоначального варианта сетевого графика: а) план с максимальными значениями продолжительности всех работ и соответственно минимальной стоимостью проекта; б) план, полученный в результате выполнения п.3.

Таблица 14.7

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки		Коэффициент затрат на ускорение работы
	min	max	min	max	
(1,2)	4	5	2	15	5
(1,3)	4	3	2	11	4
(1,4)	12	150	9	180	10
(2,3)	6	11	5	30	19
(2,4)	7	18	6	30	12
(3,4)	10	10	8	20	5
(3,5)	24	147	19	212	13
(4,5)	10	4	7	25	7
(5,6)	3	2	2	5	3

1. Основные понятия

Моделью называют условный образ какого-либо объекта, приближенно воссоздающий этот объект с помощью некоторого языка.

Например, $S=V\cdot t$ – математическая модель движения.

Математическая модель экономического объекта – это его гомоморфное отображение в виде совокупности неравенств уравнений и логических отношений.

Гомоморфизм – это такое соотношение между двумя системами, что каждому элементу и каждому отношению первой системы соответствует первый элемент и первое отношение второй системы (но не наоборот).

Экономико-математическая модель – это математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта.

Этапы моделирования заключаются в следующем:

1. Ставят цели задачи исследования, проводят качественное описание объекта в виде экономической модели.
2. Формируют модель изучаемого объекта.
3. Осуществляют анализ математической модели.

К типам моделей относятся:

1. Макроэкономические модели, которые описывают экономику, как единое целое, связывая между собой математические и финансовые показатели (потребления, инвестиции, занятость);
2. Микроэкономические модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики.

Микроэкономическое моделирование занимает основную часть экономико-математической теории.

Оптимизационные задачи линейного программирования можно разделить на несколько классов:

1. Задача об использовании ресурсов (задача планирования производства).
2. Задача о составлении рациона (задача о диете, смесях).

3. Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования).
4. Задача о раскрое материала (задача о распиле досок).
5. Транспортная задача.

2. Общая задача линейного программирования

В общем виде математическая постановка задачи *математического программирования* состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i$; $(i = 1,2,\ldots m)$, где f и g_i; – заданные функции, а b_i – некоторые действительные числа.

Задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. Если все функции f и g_i линейные, то соответствующая задача является задачей линейного программирования. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является задачей нелинейного программирования.

Пусть дана система m уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kr} \end{cases}$$

Z=

Необходимо найти такое решение системы X =), при котором линейная функция Z принимает оптимальное значение.

Эту систему называют системой ограничений, а функцию Z – целевой функцией, линейной функцией, линейной формой и функцией цели.

В общем виде задачу линейного программирования можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j \le b_j \quad (2)$$

$$\sum_{j=k}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (3)$$

$$Z = \sum_{j=k}^{n} c_i x_{ij} \to \max(min) \quad (4)$$

Оптимальным решением или оптимальным планом задачи линейного программирования называется решение X =) системы ограничений, при котором линейная функция Zпринимает оптимальное решение.

Если система ограничений состоит из одних неравенств, то задача называется стандартной. Если же из уравнений, то задача называется канонической. Если из уравнений и неравенств, то – общей.

Чтобы перейти от стандартной формы к каноническому виду, вводят дополнительные неотрицательные переменные со знаком «+», если $\le$, и со знаком «$-$ », если $\ge$.

То есть неравенство

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \qquad (5)$$

можно заменить выражением

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \qquad (6)$$

Задания для решения в аудитории

I. ***Составить экономико-математическую модель задач линейного программирования.***

1. *Задача об использовании ресурсов (задача о планировании производства).*

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единиц продукции, задано в таблице.

Прибыль от единицы продукции P_1 и P_2 соответственно 2 и 3 условных единиц. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции		Запасы ресурсов
	P_1	P_2	
S_1	1	3	18
S_2	2	1	16
S_3	-	1	5
S_4	3	-	21

2. *Задача о составлении рациона (задача о диете, о смесях).*

Имеется три вида корма I, II иIII, содержащие питательные вещества S_1, S_2, S_3 и S_4. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице.

Питательное вещество (витамины)	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма			Необходимый минимум питательных веществ
	I	II	III	
S_1	4	3	4	16
S_2	3	2	5	30
S_3	9	12	4	18
S_4	2	4	3	12

Стоимость 1 кг корма соответственно 2, 3 и 2 условных единиц. Составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в которой содержания каждого вида питательного вещества было бы не менее установленного предела.

3. Из Москвы в Санкт-Петербург необходимо перевести оборудование трех типов: I типа – 95 единиц, IIтипа – 100 единиц, IIIтипа – 185 единиц. Для перевозки оборудования завод может заказать три вида транспорта. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определенный вид транспорта, приведено в таблице.

Тип оборудования	Вид транспорта		
	T_1	T_2	T_3
I	3	2	1
II	4	1	2
III	3	5	4

Стоимость перевозки (не учитывая тип оборудования) равна соответственно 2, 4 и 3 условные единицы. Записать в математической форме условие перевозки оборудования из Москвы в Санкт-Петербург.

4. Для производства двух видов сельскохозяйственных культур (картофель, лук) выделен участок пашни размером 200 га и трудовые ресурсы в размере 8500 чел/дн. Найти оптимальное сочетание площадей размещения культур с целью получения максимальной прибыли. Сбыт продукции не ограничен.

показатели / продукция	Затраты труда на 1 га чел/дн.	Урожайность, ц/га	Себестоимость 1 ц, усл.ед.	Цена реализации 1 ц, усл.ед.	Прибыль с 1 га, усл.ед.

картофель	50	230	180	200	4600
лук	10	110	120	150	3300

5. Человек должен потреблять в сутки некоторое количество питательных веществ для поддержания работоспособности (белки, жиры, углеводы, вода, витамины). Запасы этих веществ в различных видах пищи различны. Виды питательных веществ, минимальная дневная норма каждого из них и количество питательных веществ, содержащихся в различных видах пищи даны в таблице. Стоимость единицы пищи вида *A* составляет 2 условные единицы, *B* – 3 условные единицы. Требуется так организовать питание, чтобы стоимость его была наименьшей, но организм получил бы не меньше минимальной суточной нормы питательных веществ всех видов

Питательные вещества	Виды пищи		Минимальная норма
	A	*B*	
Жиры	1	5	10
Белки	3	2	12
Углеводы	2	4	16
Вода	0,5	1,5	2
Витамины	5	3	10

Записать целевую функцию Z и систему ограничений в общем виде.

3. Графический метод решения задач линейного программирования.

Наиболее простым и наглядным методом линейного программирования является графический метод. Он применяется для решения задач линейного программирования с двумя переменными.

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \quad (7)$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(min)$$

Среди всех точек области Dнайти ту, которая обращает в максимум или минимум целевую функцию Z.

Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 = b_i$, $i=1,2,\dots m$. Условия неотрицательности определяют полуплоскости, соответственно, с граничными прямыми $x_1=0, x_2=0$. Система совместна, поэтому полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых являются решением данной системы. Совокупность этих точек называют многоугольником решений. Он может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, неограниченной многоугольной областью.

Таким образом, геометрически задача линейного программирования представляет собой отыскание такой точки многоугольника решений, координаты которой доставляют линейной функции цели максимальное (минимальное) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многоугольника решений.

Важное свойство линии уровня линейной функции состоит в том, что при параллельном смещении линии в одну сторону уровень только возрастает, а при смещении в другую сторону – убывает.

Графический метод решения задач линейного программирования состоит из следующих этапов:

1. Строится многоугольная область допустимых решений задачи линейного программирования – область допустимых значений.

2. Строится вектор-направленности целевой функции в какой-нибудь точке X_0принадлежащей области допустимых значений – $\overline{N} = (C_1, C_2)$.

3.Линия уровня $C_1x_1+C_2x_2 = a$ (a–постоянная величина) - прямая, перпендикулярная вектору –направленности$\overline{N}$ – передвигается в направлении этого вектора в случае максимизации $f(x_1,x_2)$ до тех пор, пока не покинет пределов область допустимых значений. Предельная точка (или точки) области при этом движении и является точкой максимума $f(x_1,x_2)$.

4. Для нахождения ее координат достаточно решить два уравнения прямых, получаемых из соответствующих ограничений и дающих в пересечении точку максимума. Значение $f(x_1,x_2)$, найденное в получаемой точке, является максимальным.

При минимизации $f(x_1,x_2)$ линия уровня перемещается в направлении, противоположном вектору-градиенту. Если прямая при своем движении не покидает область допустимых значений, то соответствующий максимум или минимум $f(x_1,x_2)$ не существует.

Если линия уровня параллельна какому-либо функциональному ограничению задачи, то оптимальное значение целевой функции Z будет достигаться в любой точке этого ограничения, лежащей между двумя оптимальными угловыми точками, и, соответственно, любая из этих точек является оптимальным решением задачи линейного программирования.

Рассмотрим графическое решение задач линейного программирования на следующем примере.

Задача 1.*О планировании выпуска продукции пошивочному предприятию. (Задача о костюмах).*

Намечается выпуск двух видов костюмов - мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко/день трудо/затрат. На мужской костюм - 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 человеко/день трудо/затрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко/дней трудо/затрат. Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского - 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

***Модель задачи*.**

Введем следующие обозначения: x_1 - число женских костюмов; x_2 - число мужских костюмов.

Прибыль от реализации женских костюмов составляет $10x_1$, а от реализации мужских $20x_2$, т.е. необходимо максимизировать целевую функцию

$$Z = 10 \times x_1 + 20 \times x_2 \rightarrow max.$$

Ограничения задачи имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 150 \\ 2x_1 + 0,5x_2 \le 240 \\ x_1 + 3,5x_2 \le 350 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 60 \end{cases}$$

Первое ограничение по труду $x_1 + x_2 \le 150$. Прямая $x_1 + x_2 = 150$ проходит через точки (150, 0) и (0, 150).

Второе ограничение по лавсану $2x_1 + 0,5x_2 \le 240$. Прямая $2x_1 + 0,5x_2 \le 240$ проходит через точки (120, 0) и (0, 480). Третье ограничение по шерсти $x_1 + 3,5x_2 \le 350$. Добавим ограничение по количеству мужских костюмов $x_2 \ge 60$. Решением этого неравенства является полуплоскость, лежащая выше прямой $x_2 = 60$.

Для определения направления движения к оптимуму построим вектор-направленности $\overline{N}$, координаты которого являются точка с координатами (10;20).

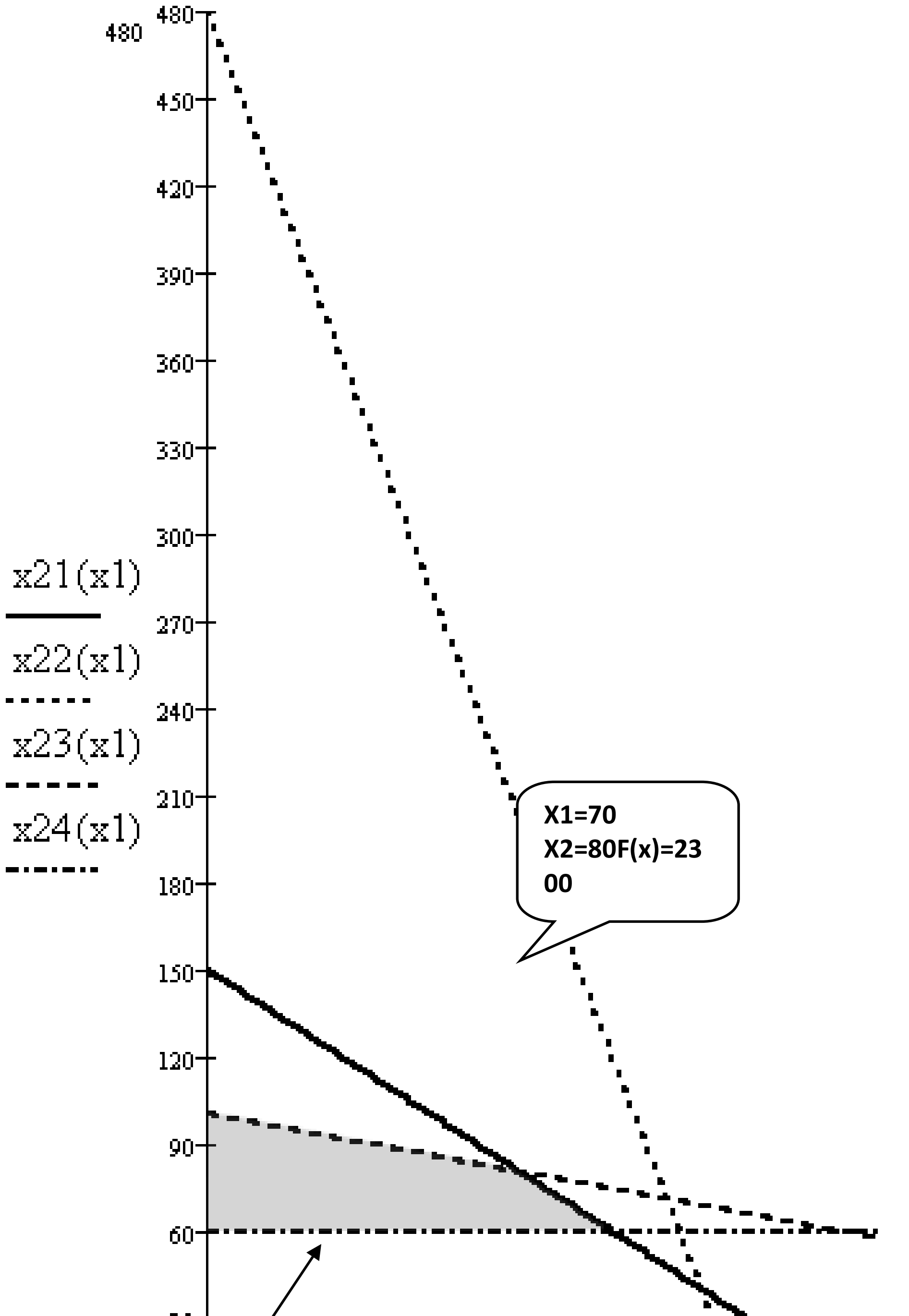
Что бы построить этот вектор, нужно соединить точку (10;20) с началом координат. При максимизации целевой функции необходимо двигаться в направлении вектора-направленности, а при минимизации — в противоположном направлении.

В нашем случае движение линии уровня будем осуществлять до ее выхода из области допустимых решений. В крайней, угловой точке достигается максимум целевой функции. Для нахождения координат этой точки достаточно решить два уравнения прямых, получаемых из соответствующих ограничений и дающих в пересечении точку максимума: $\boldsymbol{x_1 + 3.5 \times x_2 = 350}$

$\boldsymbol{x_1 + x_2 = 150}$.

Отсюда легко записать решение исходной ЗЛП: $max f(x) = 2300$ и достигается при $x_1=70$ *и* $x_2=80$ (рис. 1.)

Рис.1. Максимум целевой функции достигается в точке (70, 80).



Замечание:Возможен вариант, когда область D не ограничена снизу. Тогда решение такой задачи на минимум невозможно. Аналогично, когда область D не ограничена сверху, тогда невозможно решение задачи на максимум.

Задания для решения в аудитории

II. Геометрический метод решения задач линейного программирования:

1. Найти $Z_{max} = x_1 - x_2$ при ограничении $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$
2. Найти $Z_{max} = x_1 + 2x_2$ при ограничениях $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 30 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$
3. Найти $Z_{min} = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 1 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$
4. Найти $Z_{max} = -2x_1 + x_2$ при ограничениях $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq -1 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$
5. Найти $Z_{max} = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 4x_1 - 3x_2 \geq -12 \\ x_2 \leq 5 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти координаты вершин области
2. Построить многоугольник решений
3. Построить вектор $\overline{N} = (c_1, c_2)$ и l_0
4. Найти $Z_{\max}$ или $Z_{\min}$

№ варианта	Система ограничений	Целевая функция
1.	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 19 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 28 \leq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7 \leq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{max} = -2x_1 + 3x_2 + 10$
2.	$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 32 \geq 0 \\ x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 20 \leq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{min} = 3x_1 + x_2 + 6$
3.	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 7 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 14 \leq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 9 \leq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{max} = x_1 + 4x_2 + 18$
4.	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 27 \leq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7 \leq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{min} = 3x_1 + x_2 + 5$
5.	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 15 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 25 \leq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 9 \leq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{max} = 6x_1 + 2x_2 + 2$
6.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 28 \leq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 15 \leq 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3 \geq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{min} = -2x_1 + 2x_2 + 11$
№	Система ограничений	Целевая функция

варианта		
7.	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 14 \geq 0 \\ 7x_1 + x_2 - 66 \leq 0 \\ x_1 - 2x_2 + 12 \geq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{max} = x_1 + 5x_2 + 15$
8.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 35 \leq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 5 \leq 0 \\ 5x_1 - x_2 - 21 \geq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{min} = 7x_1 + 2x_2 - 8$
9.	$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 7x_2 - 32 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 20 \leq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{max} = 3x_1 + x_2 + 6$
10.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 28 \leq 0 \\ 5x_1 - x_2 - 19 \geq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7 \leq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{min} = -2x_1 + 3x_2 + 10$
11.	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 27 \leq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7 \leq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{max} = 3x_1 + x_2 + 5$
12.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 14 \leq 0 \\ 5x_1 - x_2 + 7 \geq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 9 \leq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{min} = x_1 + 4x_2 + 18$
13.	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 28 \leq 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 15 \leq 0 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$	$Z_{max} = -2x_1 + 2x_2 + 11$
№ варианта	Система ограничений	Целевая функция

14.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 25 \le 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 9 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 - 15 \ge 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{min} = 6x_1 + 2x_2 + 2$
15.	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 21 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 35 \le 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 5 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{max} = 7x_1 + 2x_2 - 8$
16.	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 14 \ge 0 \\ 7x_1 + x_2 - 66 \le 0 \\ x_1 - 2x_2 + 12 \ge 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{min} = x_1 + 5x_2 + 15$
17.	$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + 7x_2 - 32 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 20 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{max} = x_1 + 7x_2 + 5$
18.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 28 \le 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 - 19 \ge 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{min} = 2x_1 + 4x_2 + 10$
19.	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 7 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 14 \le 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 9 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{max} = 2x_1 + 4x_2 + 5$
20.	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 7 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 27 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{min} = x_1 + 2x_2 + 5$
№ варианта	Система ограничений	Целевая функция

21.	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 9 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 - 25 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 - 15 \ge 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{max} = x_1 + 2x_2 - 3$
22.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 28 \le 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 15 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3 \ge 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{min} = x_1 + 2x_2 + 8$
23.	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 14 \ge 0 \\ 7x_1 + x_2 - 66 \le 0 \\ x_1 - 2x_2 + 12 \ge 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{max} = 7x_1 + x_2 + 5$
24.	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 5 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 - 21 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 32 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{min} = x_1 + 2x_2 + 2$
25.	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 7 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 - 19 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 28 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{max} = 2x_1 + 4x_2 + 10$
26.	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 20 \le 0 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + 7x_2 - 32 \ge 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{min} = x_1 + 7x_2 + 5$
27.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 27 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3 \ge 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{max} = x_1 + 2x_2 + 5$
№ варианта	Система ограничений	Целевая функция

28.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 14 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 + 7 \ge 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 9 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{min} = 2x_1 + 4x_2 + 5$
29.	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 28 \le 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 15 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{max} = x_1 + 2x_2 + 8$
30.	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 9 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 - 15 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 25 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{min} = x_1 + 2x_2 - 3$
31.	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 5 \le 0 \\ 5x_1 - x_2 - 21 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 35 \le 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{max} = x_1 + 2x_2 + 2$
32.	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 14 \ge 0 \\ 7x_1 + x_2 - 66 \le 0 \\ x_1 - 2x_2 + 12 \ge 0 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$	$Z_{min} = 7x_1 + x_2 + 5$

4. Симплексные таблицы. Симплекс-метод в общем виде.

Если система ограничений задана в стандартной форме, то ее переводят в каноническую путем добавления переменных x_3, x_4.

Пусть дана совместная система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3 \end{cases} \quad (8)$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 \to min$$

Пусть ранг этой системы равен 3, значит, базисных переменных три. Разрешим систему

x_1, x_2, x_3, а x_4, x_5 - свободные.

относительно

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (a_{14}x_4 + a_{15}x_5) \\ x_2 = \beta_2 - (a_{24}x_4 + a_{25}x_5) \\ x_3 = \beta_3 - (a_{34}x_4 + a_{35}x_5) \end{cases} \quad (9)$$

$$Z = \gamma_0 - (\gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5)$$

Причем, чтобы начальное решение было допустимым, необходимо выполнения следующего условия $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \beta_3 > 0$.

Составим симплекс-таблицу № 1.

свободные / базисные	b_1		x_4		x_5
x_1	β_1		a_{14}		a_{15}
x_2	β_2		a_{24}		a_{25}
x_3	β_3		a_{34}		a_{35}
Z	γ_0		γ_4		γ_5

Просмотрим элементы последней строки, и среди γ_4 и γ_5 (γ_0 не учитывать) найдем наименьшее положительное. Пусть это γ_4. Это означает, что x_4 входит в Z со знаком «$-$», поэтому, для уменьшения значения Z нужно увеличить x_4, но увеличивать x_4 можно до тех пор, пока все остальные x_i будут неотрицательными. Столбец, содержащий x_4, называется **разрешающим**. Если в последней строке нет положительных коэффициентов, то все свободные переменные входят в Z с положительными коэффициентами и $Z_{\min}$ достигается при равенстве нулю всех свободных переменных.

Составим отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца.

min = $\left\{\beta_1/a_{14};\ \beta_2/a_{24};\ \beta_3/a_{34}\right\}$ (10)

По min отношений выбирают строку, которую называют разрешающей.

Пусть min является отношение β_2/a_{24}, тогда строка x_2 – разрешающая.

Элемент, стоящий на пересечении разрешающего столба и разрешающей строки, называется **разрешающим**.

$\boxed{a_{24}}$ - разрешающий элемент, значит x_4 нужно перевести в базисные, а x_2 - в свободные переменные.

Замечание.Если в разрешающем столбце нет положительных коэффициентов, то функция $Z_{\min}$ не существует, то есть целевая функция Z – не ограничена снизу.

Алгоритм перехода к симплекс-таблице № 2.

1. Неизвестные переменные x_2 и x_4 меняют местами.
2. Разрешающий элемент a_{24} заменяют обратной величиной.
3. Остальные элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент.
4. Элементы разрешающего столбца, кроме разрешающего элемента, делят на разрешающий элемент и меняют знаки на противоположные.
5. Все элементы разрешающего столбца симплекс-таблицы № 2получают по правилу прямоугольника.

Тогда симплекс-таблица № 2 имеет вид:

свободные / базисные	b_1	x_2	x_5
x_1		$-a_{14}/a_{24}$	

x_4	β_2/a_{24}		a_{25}/a_{24}
x_3		$-a_{34}/a_{24}$	
Z		$-\gamma_4/a_{24}$	

Полагаем x_2 = 0, x_5 = 0, получаем значение новых базисных неизвестных

$x_1 = \beta_1 a_{24} - \beta_2 a_{14}/a_{24}$ и т. д.

Рассмотрим выражение для функции Z. По условию $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$. Разрешающий элемент больше нуля по выбору, значит $\gamma_4\beta_2/a_{24} \geq 0$.

Следовательно, функция Z уменьшилась. Значит, если в последней строке все элементы неположительные, то есть ≤ 0 , то базисное решение оптимальное и задача решена. В противном случае переходим к симплекс-таблице № 3.

При решении задачи на max:

1. Разрешающий столбец выбирают, просматривая строку Z, кроме γ_0 и среди всех γ_4 и γ_5, находят отрицательный элемент наибольший по модулю. Этому элементу и соответствует разрешающий столбец.
2. Разрешающую строку выбирают по min отношений свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца.
3. На их пересечении оказывается разрешающий элемент.
4. Алгоритм перехода к симплекс-таблице № 2 тот же, что и для min.
5. Критерий оптимальности на max, если в последней строке Z нет отрицательных коэффициентов.

Замечание.Если первоначальное базисное решение не является допустимым (т.е. все значения положительны), то применяют метод искусственного базиса или М-метод.

Задания для решения в аудитории

III. Симплекс-метод

Задания для решения в аудитории

Решить задачи симплекс-методом

1. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_2 \le 5 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \qquad Z_{max} = 2x_1 + 3x_2$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_{1,2,3,4,5} \ge 0 \end{cases} \qquad Z_{min} = 3 - x_4 + x_5$$

3. $$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5 \\ x_{1,2,3,4,5,6} \ge 0 \end{cases} \qquad Z_{min} = x_1 + x_2 + x_3$$

Задания для самостоятельного решения

1. Составить экономико-математическую модель задачи
2. Решить задачу графически и сделать вывод
3. Решить задачу симплекс-методом

Вариант № 1

Кирпичный завод выпускает кирпичи двух марок. Для их изготовления применяется глина трех видов *А, В* и *С*. По месячному плану завод должен выпустить 10 единиц кирпича марки Iи 15 единиц кирпича марки II. В таблице указаны расход различных видов глины для производства 1 единицы кирпича каждой марки и месячный запас глины. Какова наибольшая прибыль, если известно, что от реализации 1 единицы кирпича марки I завод получает прибыль 4 условные единицы, а марки II – 7 условных единиц.

Марка кирпича	Количество глины на 1 единицу кирпича		
	A	*B*	*C*
I	1	0	1
II	0	2	2
Запасы глины	15	36	47

Вариант № 2

Предприятие имеет три типа металлообрабатывающих станков *A, B* и *C*, на которых изготовляются изделия вида 1 и 2. Изделия первого вида вырабатываются на станках *A* и *C,* а изделия второго вида – на станках всех трех видов, то есть *A, B* и *C*. Производственная мощность станков отдельных типов представлена в таблице. Прибыль на единицу изделия 1 составляет 2 условные единицы, на единицу изделия 2 – 4 условные единицы. Определить такие объемы производства изделий 1 и 2, чтобы предприятие получило максимальную прибыль.

Тип станка	Производственная мощность (тысяч штук в год)
A	6 изделий 1 или 6 изделий 2
B	4 изделия 2
C	5 изделий 1 или 10 изделий 2

Вариант № 3

На промышленном предприятии изготавливаются два продукта: 1 и 2. Эта продукция производится с помощью оборудования U_1, U_2 и U_3, которое в течение дня может работать соответственно 24000, 40000 и 27000 секунд. Нормы времени, необходимые для производства единицы продукции с помощью соответствующего оборудования, приводятся в таблице. Прибыль от производства изделия 1 составляет 9 условных единиц, а изделия 2 – 6 условных единиц. Найти такой объем производства, чтобы прибыль была максимальной. (24000 сек. = 24 тыс.сек. ит.д.)

Изделия	Оборудование		
	U_1,	U_2	U_3,

1	3	8	9
2	6	4	3
Время работы в течение дня	24	40	27

Вариант № 4

Производственный цех деревообрабатывающей промышленности ежемесячно имеет в своем распоряжении 48 м^3 пиломатериалов и 45 м^3 стекла. В цехе изготовляют два вида шкафов: конторские и библиотечные. Расход материалов на один шкаф каждого вида приведен в таблице. Цена реализации конторского шкафа – 2000 усл.ед., а библиотечного – 4000 усл.ед. Определить такой ассортимент производства, при котором месячный доход будет максимальным.

Вид шкафа	Сырье	
	пиломатериалы	стекло
конторский	0,3	-
библиотечный	0,3	1,5
Запасы	48	45

Вариант № 5

Завод изготовляет два вида изделия на экспорт с помощью машин U_1и U_2. Максимальное время работы машины U_1 – 8 часов, а машины U_2 – 12 часов в сутки. Расход времени работы машин (в сутки) представлен в таблице. Валютная прибыль от продажи единицы изделия 1 составляет 3 $, а изделия 2 – 4 $ США. Рассчитать производственный план на сутки при максимальной валютной прибыли.

Изделие	Машины	
	U_1	U_2
1	1	2,5

2	4	2
Максимальное время работы машины(в сутки)	8	12

Вариант № 6

Производственная мощность цеха сборки составляет 120 изделий типа А и 360 изделий типа В. Технический контроль пропускает в сутки 200 изделий того или иного типа (безразлично). Изделия типа А вчетверо дороже изделий типа В. Требуется спланировать выпуск готовой продукции так, чтобы предприятию была обеспечена наибольшая прибыль.

Вариант № 7

Для изготовления изделий двух видов склад может отпустить металла не более 80 кг, причем на изделие Iвида расходуется 2 кг, а на изделие IIвида – 1 кг металла. Требуется спланировать производство так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль, если известно, что изделий Iвида требуется не более 30 штук, а изделий IIвида не более 40 штук, причем одно изделие Iвида стоит – 5 усл.ед., а IIвида – 3 усл.ед.

Вариант № 8

На предприятии, в состав которого входят четыре производственных цеха, изготовляются изделия двух видов. Производственные мощности цехов в расчете на сутки соответственно составляют m_1 – 12 час., m_2 – 8 час., m_3 – 16 час., m_4 – 12 час. Нормы времени, необходимого для изготовления единицы изделия в соответствующих цехах, даны в таблице. Прибыль от продажи единицы изделия 1 составляет 2 тыс.усл.ед., а изделия 2 – 3 тыс.усл.ед. Составить такой производственныйплан, при котором предприятие получит максимальную прибыль.

Цех	Изделие		m_i
	1	2	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	-	16
4	-	4	12

Вариант № 9

На велосипедном заводе выпускают гоночные и дорожные велосипеды. Производство устроено так, что вместо двух дорожных велосипедов завод может выпустить один гоночный, причем гоночный велосипед приносит в 1,5 раза больше прибыли. Завод может произвести 700 дорожных велосипедов в день, однако склад может принять не более 500 велосипедов в день. Сколько нужно выпустить в день гоночных и дорожных велосипедов, чтобы завод получал максимальную прибыль?

Вариант № 10

Предприятие выпускает два вида изделий. Эта продукция производится с помощью оборудования U_1, U_2 и U_3, максимальный годовой фонд времени работы которого составляет соответственно 24 тыс., 50 тыс. и 42 тыс. часов. Данные о затрате времени работы оборудования на производство единицы изделия приведены в таблице. Прибыль от производства изделия первого вида составляет 10 единиц, а изделия второго вида – 5 единиц. Найти такой производственный план, чтобы прибыль была максимальной.

Изделия	Затраты времени работы оборудования		
	U_1	U_2	U_3
1	3	8	10
2	6	5	8

Вариант № 11

Для изготовления продукции двух видов A и B требуется использовать сырье четырех видов S_1, S_2, S_3 и S_4. Запасы сырья ограничены и выражены в условных единицах. Количество единицы сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, и доход, получаемый от реализации единицы продукции, даны в таблице. Составить такой план выпуска продукции, чтобы доход предприятия был максимальный.

Виды сырья	Виды продукции		Запасы
	A	B	
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13

S_3	-	3	15
S_4	3	-	18
Доход	7	5	-

Вариант № 12

Для изготовления столов и шкафов употребляются два вида древесины. Расход каждого вида древесины на каждое изделие задано таблицей. Доход мастерской от реализации одного стола – 12 усл.ед, а шкафа – 15 усл.ед. Определить, сколько столов и шкафов должна изготовлять мастерская, чтобы обеспечить максимальный доход.

Изделие	Древесина	
	I	II
Стол	0,15	0,2
Шкаф	0,2	0,1
Запасы древесины	60	40

Вариант № 13

На производство товарного картофеля и лука выделен участок пашни 200 га и 8500 чел./дней трудовых ресурсов. Найти оптимальное сочетание площадей их размещения с целью получения максимальной прибыли. Сбыт продукции по видам не ограничен.

Показатели	Картофель	Лук
Затраты труда на 1 га, чел/дней	40	50
Урожайность, ц/га	230	110
Себестоимость 1 ц, руб.	8	25
Цена реализации 1 ц, руб.	12	35

Вариант № 14

Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что изделий В необходимо выпустить не менее, чем изделий А.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 изделие, кг		Запасы сырья, кг
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации 1 изделия, усл.ед.	30	40	-

Вариант № 15

Завод располагает 36 тоннами стали. Из этой стали можно изготовить либо комбайны, либо трактора. На каждый комбайн уходит 4 тонны стали, а на трактор – 800 кг. Доход от реализации одного комбайна 2 тыс.усл.ед., а одного трактора – 300 усл.ед. Какой должна быть производственная программа завода, чтобы доход от продажи единицы продукции был наибольшим?

Вариант № 16

Озеро можно заселить двумя видами рыб: А и В. Средняя масса рыбы равна 2 кг для вида А и 1 кг для вида В. В озере имеется два вида пищи: P_1 и P_2. Средние потребности одной рыбы вида А составляет 1 ед. корма P_1 и 3 ед. корма P_2 в день, для рыбы В соответственно 2 и 1 единиц. Ежедневный запас пищи поддерживается на уровне 500 ед.вида P_1 и 900 ед. вида P_2. Как следует заселить озеро рыбами, чтобы максимизировать общую массу рыб?

Вариант № 17

Найти оптимальное сочетание посевов пшеницы и картофеля на площади 8000 га по критерию максимума прибыли, если экономические показатели их производства заданы таблицей.

Экономические	Затраты на 1 га посевов	Размер ресурсов

показатели	пшеница	картофель	
Механизированный труд, чел/дней	0,6	4,6	10000
Конно-ручной труд, чел/дней	2	22	50000
Урожайность, ц/га	20	100	-
Прибыль, руб/ц	6	3	-

Вариант № 18

Для производства двух видов изделий А и В используются три типа технологического оборудования. На производство единицы изделия А оборудованияI типа используется 3 часа,II типа – 4 часа, оборудования IIIтипа – 5 часов. На производство единицы продукции В соответственно 6 часов, 3 часа и 2 часа. На производство всех видов изделий предприятие может представить оборудование Iтипа не более чем на 102 часа,II типа – не более чем на 91 час, IIIтипа – не более чем на 105 часов. Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет 7 усл.ед., а изделия В – 9 усл.ед. Составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Вариант № 19

Имеются два изделия, которые должны в процессе производства пройти обработку на четырех станках. Время обработки каждого изделия на каждом из этих станков задано таблицей. Станки можно использовать соответственно в течение 45, 100, 300 и 50 часов. Цена реализации изделия А – 6 усл.ед, В – 4 усл.ед. В каком количестве необходимо производить изделия А и В, чтобы получить максимальную прибыль?

Изделия	Станки			
	1	2	3	4
А	2	4	3	1
В	0,25	2	1	4

Вариант № 20

Для изготовления шкафов и сервантов деревоперерабатывающий завод использует древесину четырех видов. Запасы древесины, количество единиц древесины каждого вида, необходимого для приготовления одного шкафа и одного серванта, а также прибыль от реализации единицы продукции даны в таблице. Составить такой план выпуска продукции, который обеспечил бы наибольшую прибыль от реализации продукции.

Изделие	Древесина				Прибыль
	1	2	3	4	
Шкаф	-	4	2	1	2
Сервант	4	-	2	2	3
Запасы древесины	120	160	120	180	-

Вариант № 21

О некотором производстве двух видов продукции дана информация в таблице. Решить задачу оптимального использования ресурсов на максимум общей стоимости.

Ресурсы	Нормы затрат на единицу продукции		Запасы
	1	2	
Труд	1	3	200
Сырье	1	2	80
Оборудование	1	4	140
Цена	40	80	-

Вариант № 22

Завод может изготовить два типа изделий. Изделия проходят обработку в трех цехах. В планируемом периоде требуется изготовить хотя бы по одному изделию каждого типа. Определить производственную программу завода для получения максимальной прибыли.

№ цеха	Трудоемкость изготовления одного изделия, тыс.нормо-час	Полезный фонд времени работы,

			тыс.нормо-час
I	2	4	20
II	1	1	6
III	2	1	10
Прибыль, млн.руб.	8	6	-

Вариант № 23

Цех для производства двух видов продукции использует четыре группы оборудования в количестве 12, 8, 16 и 12 единиц соответственно. Доход от единицы продукции первого вида составляет 12 усл.ед., а второго – 30 усл.ед. Для производства единицы продукции первого вида необходимо занять соответственно 2, 1, 4 и 0 единиц групп оборудования, а для производства единицы продукции второго вида – 2, 2, 0 и 4 соответственно. Сколько продукции каждого вида следует выпустить, чтобы доход предприятия оказался наибольшим?

Группа оборудования	Вид продукции		Количество оборудования в группе
	1	2	
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12
Доход	12	30	-

Вариант № 24

Фермер имеет 10 га пашни и 460 чел./дней трудовых ресурсов. Пашню он планирует использовать на производство товарного картофеля и лука с целью получения максимальной прибыли. Сбыт по видам не ограничен.

Показатели	Картофель	Лук
Затраты труда на 1 га, чел./дней	40	50

Урожайность, ц/га	200	110
Себестоимость 1 ц, тыс.руб.	100	200
Цена реализации 1 ц, тыс.руб.	150	300

Вариант № 25

Для производства продукции двух видов B_1 и B_2 используют три вида сырья A_1, A_2 и A_3. Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором доход от реализации всей продукции будет максимальный.

Вид сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		B_1	B_2
A_1	70	10	7
A_2	80	8	10
A_3	5	1	-
Доход	-	3	1

Вариант № 26

На двух станках № 1 и № 2 производится два вида продукции A_1и A_2. Для изготовления единицы продукции A_1 станок № 1 использует два часа, а станок № 2 – один час; для A_2 – соответственно 1 час и 2 часа. В течение суток станок № 1 может работать не более 10 часов, а станок № 2 – не более 8 часов. Составить план, обеспечивающий производству наибольшую прибыль, если прибыль от реализации единицы продукции A_1 составляет 5 усл.ед., а единицы продукции A_2 – 2 усл.ед.

Вариант № 27

На основании информации, приведенной в таблице, решить задачу оптимального использования ресурсов на максимум общей стоимости.

Ресурсы	Нормы затрат на единицу продукции		Запасы
Труд	1	4	200

Сырье	1	1	80
Оборудование	1	11	140
Цена	40	60	-

Вариант № 28

Мебельная фабрика выпускает книжные полки и шкафы. Их производство ограничено наличием необходимых ресурсов(древесно-стружечных плит, высококачественных досок и стекла). Нормы затрат ресурсов на единицу продукции, запасы ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице 1. Требуется составить производственный план выпуска продукции с учетом имеющихся ресурсов, который обеспечивал бы наибольшую прибыль.

Виды ресурсов	Виды продукции		Запасы ресурсов
	Полки	Шкафы	
древесно-стружечные плиты	3	2	27
высококачественные доски	2	4	28
стекло	2	3	23
Прибыль	4	7	-

Вариант № 29

Предприятие выпускает 4 вида продукции и использует 3 типа основного оборудования: токарное, фрезерное, шлифовальное. Затраты на изготовление единицы продукции приведены в таблице; там же указан общий фонд рабочего времени, а также цена изделия каждого вида.

Тип оборудования	Нормы расхода сырья на одно изделие		Общий фонд рабочего времени
	А	Б	
Токарное	2	1	300
Фрезерное	1	0	70
Шлифовальное	1	2	340

Цена изделия	8	3	-

Вариант № 30

При производстве изделий А и Б на фабрике применяются сталь, медь и алюминий. Данные о запасах сырья, расходах на одно изделие и прибыли от продажи одного изделия - в таблице. Определить план выпуска продукции, приносящий максимальную прибыль.

Сырье	Виды изделия		Запасы
	А	Б	
Медь, кг	10	70	570
Сталь, кг	20	50	420
Алюминий, кг	40	10	600
Прибыль, усл.ед.	3	8	-

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
<<Ставропольский государственный университет>>

Кафедра математики

Математическое моделирование урбоэкосистем

Методические материалы по выполнению
семинарских и практических занятий

35.04.09 - Ландшафтная архитектура

Ставрополь - 2014

ПОНЯТИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Экономико-математическая модель – это математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта.

Типы моделей

1. Макроэкономическая модель списывает экономику как единое целое, связывая между собой укреплённые математические и финансовые показатели (ВНП, потребления, инвестиции, занятость).
2. Микроэкономическая модель описывает взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики либо поведение отдельных составляющих в рыночной экономике. Микроэкономическое моделирование занимает основную часть экономико-математической теории.
3. Теоретические.
4. Прикладные.
5. Равновесные.
6. Стохастические.
7. Динамические.
8. Детерминированные.

ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача линейного программирования. Допустимые и оптимальное решение задачи линейного программирования

К задачам линейного программирования относятся:

1. Задача об использовании ресурсов (задача планирования производства).
2. Задача о составлении рациона (задача о диете, смесях).
3. Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования).
4. Задача о раскрое материала (задача о распиле досок).
5. Транспортная задача.

Общая задача линейного программирования имеет вид:

Дана система m неравенств n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ .... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n \le b_{k+1} \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_{1,2,3,...n} \ge 0 \end{cases}$$

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ - линейная функция.

Необходимо найти такое решение системы $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при котором линейная функция Z принимает оптимальное, (т.е. max или min) значение.

Эту систему называют системой ограничений, а функцию Z – целевой функцией, линейной функцией, линейной формой и функцией цели.

В общем виде задачу можно записать так:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_{ij} \le b_i, \\ \sum_{i=k}^{n} a_{ij}x_{ij} = b_i, \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

$$Z = \sum_{j=kh}^{n} c_i x_{ij} \to \max(\min)$$

Оптимальным решением или ***оптимальным планом*** задачи линейного программирования называется решение $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системы ограничений, при котором линейная функция Z принимает оптимальное решение.

Пример 1. Фермер на своем участке выращивает огурцы и помидоры. Чтобы не потерять урожай, он использует азотные, калийные, фосфатные удобрения и навоз. Чтобы удобрить один гектар огурцов ему необходимо 20 ед. азотных удобрений, 40 – калийных, 10 – фосфатных, 20 – навоза; помидоров – 10 – калийных, 15 – фосфатных, 10 – навоза. Его запасы удобрений следующие: азотных – 120, калийных – 320, фосфатных – 160, навоза – 180. Прибыль с 1 га площади, засаженной огурцами – 5000 у.д.е., а помидорами – 3000 у.д.е. Сколько гектаров огурцов и помидоров необходимо обработать для получения максимальной прибыли.

Решение. В качестве переменных выберем площади, занимаемые под посадки огурцов (переменная X) и помидоров (переменная Y). Обозначим используемые ресурсы: азотные удобрения – S_1, калийные – S_2, фосфатные – S_3, навоз – S_4. Тогда данные условия задачи можно свести в наглядную таблицу:

Ресурсы	Затраты удобрений, ед/га		Соотношение	Запасы
	X	Y		
S_1	20	0	$\le$	120
S_2	40	10	$\le$	320
S_3	10	15	$\le$	160
S_4	20	10	$\le$	180
Прибыль	5000	3000	max	

В общем случае графа "Соотношение" не является необходимой, в данном случае она введена для увеличения наглядности при построении модели.

Математическая модель задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} 20X \le 120; \\ 40X + 10Y \le 320; \\ 10X + 15Y \le 160; \\ 20X + 10Y \le 180; \\ X, Y \ge 0. \end{cases}$$

$$Z = 5000X + 3000Y \to \max$$

Добавленное нами условие неотрицательности переменных соответствует их смыслу: невозможно засеять отрицательную площадь.

Наиболее простым и наглядным методом решения задач линейного программирования является **графический метод**. Он применяется для решения задач линейного программирования с двумя переменными, заданными в неканонической форме.

Пусть дана система линейных неравенств: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2. \end{cases}$

Уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, определяет на плоскости x_1Ox_2 прямую, которая разбивает эту плоскость на две полуплоскости, каждая из которых лежит по одну сторону от прямой. Системе неравенств удовлетворяет множество точек (x_1,x_2), лежащих в пересечении полуплоскостей, заданных неравенствами системы.

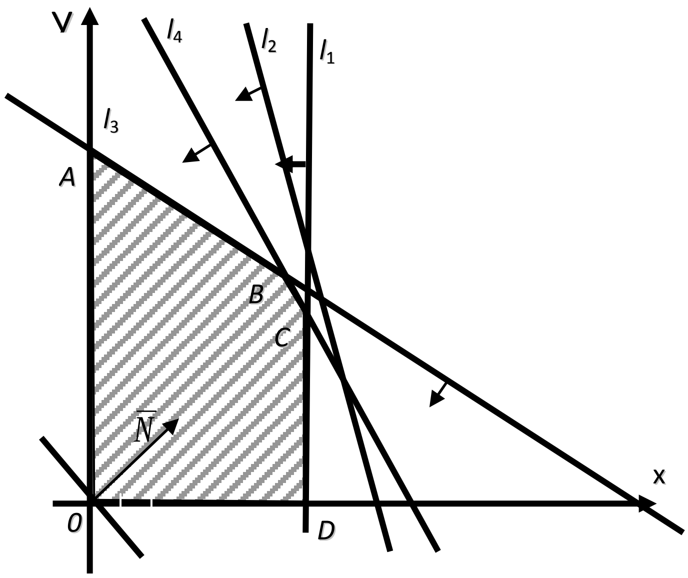
Для нахождения экстремального значения целевой функции при геометрическом методе решения используют на плоскости x_1Ox_2 вектор, который обозначается $\overline{N}$.Этот вектор показывает направление наискорейшего изменения целевой функции. Координаты вектора $\overline{N}$ являются коэффициентами целевой функции Z, т.е. $\overline{N}(c_1;c_2)$.

Для нахождения решения графическим методом необходимо:

1) найти область допустимых решений системы ограничений задачи;
2) построить радиус - вектор $\overline{N}(c_1;c_2)$;
3) провести линию уровня l_0, которая перпендикулярна $\overline{N}$;
4) переместить линию уровня по направлению вектора $\overline{N}$ для задач на максимум и в направлении, противоположном $\overline{N}$, для задач на минимум.

5) найти координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней.

Пример 2. Решим задачу из примера 1 графическим способом. Построим полуплоскости, заданные системой ограничений в первом квадранте системы координат (выбор первого квадранта обусловлен неотрицательностью переменных X и Y). Результирующей областью решений является многоугольник ABCDO. Построим вектор $\vec{N}(5000;3000)$ или подобный ему (с пропорциональными координатами). Построим линию уровня, перпендикулярную вектору $\vec{N}$. Возможными точками решения являются точки B и C.



Найдем координаты этих точек и вычислим значение целевой функции в каждой из них.

Для точки B	Для точки C
$\begin{cases} 10X + 15Y \le 160; \\ 20X + 10Y \le 180. \end{cases}$	$\begin{cases} 20X \le 120; \\ 20X + 10Y \le 180. \end{cases}$
B (5,5; 7)	C (6; 6)
Z=27500+21000=48500 у. д. е.	Z=30000+18000=48000 у. д. е.

Большая прибыль соответствует точке B, следовательно оптимальным использованием земельных ресурсов является распределение площадей 5,5 га под посадку огурцов и 7 га – помидоров. При этом будет получена прибыль в размере 48500 у. д. е.

Анализ моделей на чувствительность

Анализ моделей на чувствительность - это процесс, реализуемый после получения оптимального решения. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным измерениям исходной модели. В задаче об ассортименте продукции, может представлять интерес вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение увеличение и уменьшение спроса на продукцию или запасов исходного сырья. Возможно, также потребуется анализ влияния рыночных цен на оптимальное решение.

При таком анализе всегда рассматривается комплекс линейных оптимизационных моделей. Это придает модели определенную динамичность, позволяющую исследователю проанализировать влияние возможных изменений исходных условий на полученное ранее оптимальное решение. Динамические характеристики моделей фактически отображают аналогичные характеристики, свойственные реальным процессам. Отсутствие методов, позволяющих выявлять влияние возможных изменений параметров модели на оптимальное решение, может привести к тому, что полученное (статическое) решение устареет еще до своей реализации. В данном разделе для проведения анализа модели на чувствительность используются графические методы.

Рассмотрим основные задачи анализа на чувствительность на примере 2.

Задача 1. Анализ изменений запасов ресурсов.

После нахождения оптимального решения представляется вполне логичным выяснить, как отразится на оптимальном решении изменение запасов ресурсов. Для этого необходимо ответить на два вопроса:

1.На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции Z?

2.На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции Z?

Прежде чем ответить на поставленные вопросы, классифицируем ограничение линейной модели, как связывающие (активные) и несвязывающие (неактивные) ограничения. Прямая, представляющая связывающее ограничение, должна проходить через оптимальную точку. В противном случае, соответствующее ограничение будет несвязывающим. На рисунке 1 связывающими ограничениями являются ограничения (1) и (3), представленные прямыми L_1и L_3, соответственно, т.е. те, которые определяют запасы исходных ресурсов. Ограничение (1) определяет запасы сырья А. Ограничение (3) определяет соотношение спроса на выпускаемую продукцию.

Если некоторое ограничение является связывающим, то соответствующий ресурс относят к разряду дефицитных ресурсов, т.к. он используется полностью. Ресурс, с которым ассоциировано несвязывающее ограничение, следует отнести к разряду недефицитных ресурсов (т.е. имеющихся в некотором избытке). В нашем примере несвязывающие ограничения (2) и (4). Следовательно ресурс - сырьеВнедефицитный, т.е. имеется в избытке, а спрос на продукцию $П_2$ не будет удовлетворен полностью.

При анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений определяются:

1) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение

2) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденное ранее оптимальное значение целевой функции.

В нашем примере сырьеАи соотношение спроса на выпускаемую продукцию Π_1 и II_2являются дефицитными ресурсами.

Рассмотрим сначала ресурс - сырье А.

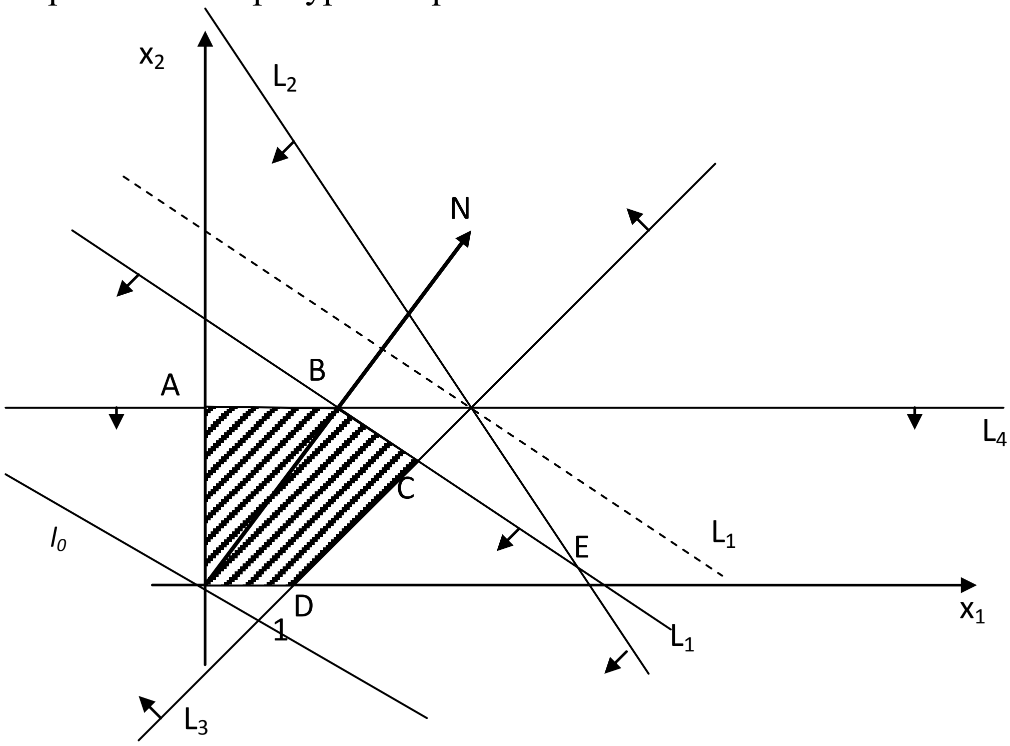


Рис. 2

На рис. 2 при увеличении запаса этого ресурса прямая L_1, перемещается вверх, параллельно самой себе, до точкиК, в которой пересекаются линии ограничений – L_2, L_3, L_4. В точкеКограничения (2), (3) и (4) становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка К, а пространством (допустимых) решений становится многоугольник АКДО. В точкеКограничение (1) (для ресурса А) становится избыточным, т.к. любой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не влияет, ни на пространство решений ни на оптимальное решение. Таким образом, объем ресурсаАне следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение (1) становится избыточным, т.е. прямая (1) проходит через новую оптимальную точку К. Этот предельный уровень определяется следующим образом. Устанавливаются координаты точкиК, в которой пересекаются прямые L_2, L_3 и L_4, т.е. находится решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 13, \\ x_1 - x_2 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

В результате получается x_1=3 и x_2=2. Затем путем подстановки координат точкиКв левую часть ограничения (1) определяется максимально допустимый запас ресурса А: $2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$

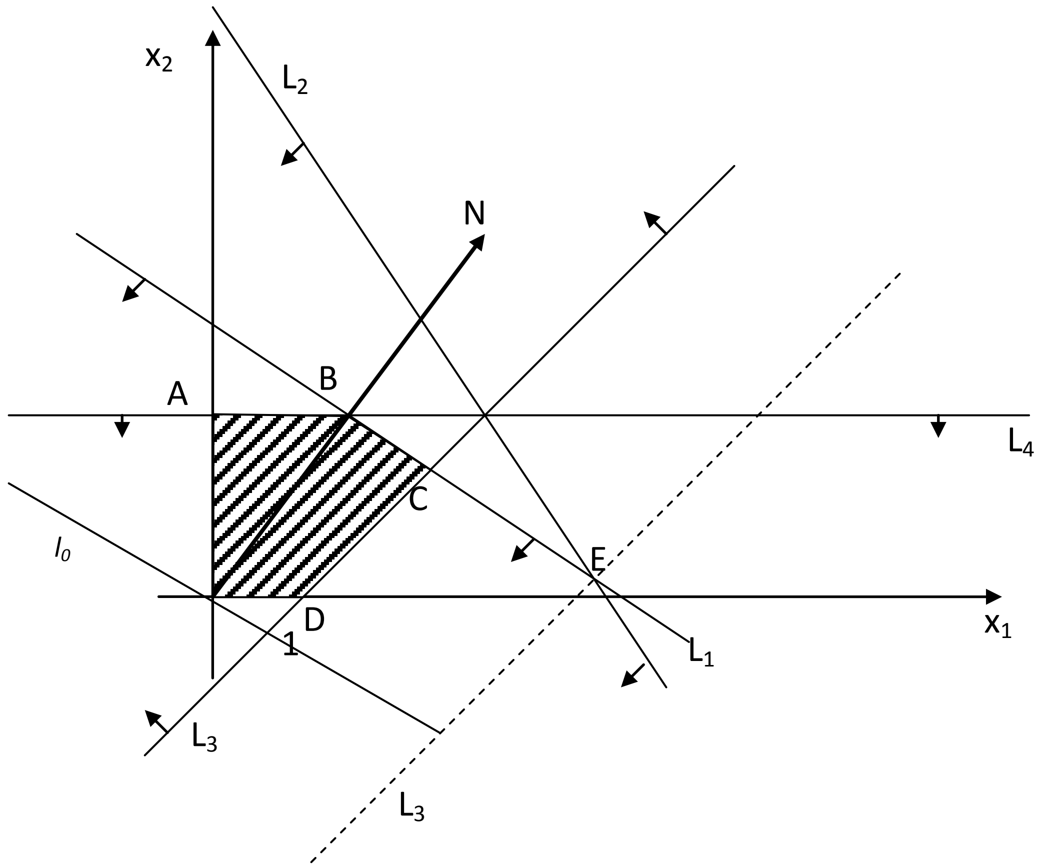


Рис. 3

Рис. 3 иллюстрирует ситуацию, когда рассматривается вопрос об изменении соотношения спроса на продукцию П$_1$и П$_2$. Новой оптимальной точкой становится точка E, где пересекаются прямые L$_1$ и L$_2$. Координаты данной точки находятся путем решения системы уравнений (1) и (2)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 = 13 \end{cases}$$

В результате получается $x_1 = 4{,}2;\ \ x_2 = 0{,}2$, причем суточный спрос на продукцию П$_1$ не должен превышать спроса на продукцию П$_2$ на величину $x_1 - x_2 = 4{,}2 - 0{,}2 = 4$ ден. ед..Дальнейшее увеличение разрыва в спросе на продукцию П$_1$ и П$_2$, не будет влиять на оптимальное решение.

Рассмотрим вопрос об уменьшении правой части несвязывающих ограничений. Ограничение (4) $x \le 2$ фиксирует предельный уровень спроса на продукцию П$_2$. Из рис.1 следует, что не изменяя оптимального решения, прямую L$_4$(AB) можно опускать вниз до пересечения с оптимальной точкой C. Так как точка C имеет координаты $(2{,}4;\ 1{,}4)$, уменьшение спроса на продукцию П$_2$ до величины x_2=1,4 никак не повлияет на оптимальность ранее полученного решения.

Рассмотрим ограничения (2) $3x_1 + 2x_2 \le 13$, которое представляет собой ограничение на недефицитный ресурс - сырье B. И в этом случае правую часть - запасы сырья B можно уменьшать до тех пор, пока прямая L$_2$не достигнет точки C. При этом правая часть ограничения (2) станет равной

$3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 2{,}4 + 2 \cdot 1{,}4 = 10$, что позволяет записать это ограничение в виде $3x_1 + 2x_2 \le 10$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если суточный запас ресурса В уменьшить на 3 единицы. Результаты проведенного анализа можно свести в следующую таблицу:

	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, ед.	Максимальное увеличение дохода от изменения ресурса, у.д.е.
1	Дефицитный	12-9=+3	17-12,8=14,2
2	Недефицитный	10-13=-3	12,8-12,8-0
3	Дефицитный	4-1=+3	13,4-12,8=+0,6
4	Недефицитный	1,4-2=-0,6	12,8-12,8=0

Идея симплекс-метода

Симплекс-метод был предложен американским учёным Данцингом и опубликован в 1951 г. Хотя ещё в 1939 г. российский учёный Кантарович разработал идеи этого метода.

Симплекс – это простейший выпуклый многогранник.

$$\begin{cases} N = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

В настоящее время название симплекс используется независимо от формы линейных ограничений.

Схема решения задачи

1. Указывается способ вычисления начального допустимого решения задачи.
2. При помощи признака оптимальности проверяется, не является ли это решение оптимальным.
3. По выбранному начальному решению строятся другие решения, более близкие к оптимальному.

Доказано, что таким путём через конечное число шагов (итераций) можно получить оптимальное решение задачи. В ходе решения задачи симплекс-методом можно установить, не являются ли условия противоречивыми, т. е. алгоритм симплекс-метода устанавливает, является ли задача разрешимой.

Если система ограничений состоит только из одних неравенств, то задача называется стандартной. Если же из уравнений, то задача называется канонической, если из уравнений и неравенств, то – общей.

Переход от стандартного значения системы ограничений к каноническому

Чтобы перейти от стандартной формы к каноническому виду, вводят дополнительные неотрицательные переменные со знаком «+», если ≤, и со знаком «-», если ≥. Т. е. неравенство

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$

можно заменить выражением

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \le b_1$$

Составление симплекс-таблицы №1

Пусть дана совместная система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3 \end{cases}$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 \to \min$$

Пусть ранг этой системы равен 3, значит, базисных переменных три. Разрешим систему относительно x_1, x_2, x_3, а x_4, x_5 – свободные.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (a_{14}x_4 + a_{15}x_5) \\ x_2 = \beta_2 - (a_{24}x_4 + a_{25}x_5) \\ x_3 = \beta_3 - (a_{34}x_4 + a_{35}x_5) \end{cases}$$

$$Z = \gamma_0 - (\gamma_4x_4 + \gamma_5x_5)$$

Причём, чтобы начальное решение было допустимым, необходимо, чтобы

$$\beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0,\ \beta_3 > 0.$$

Составим симплекс-таблицу №1

Б \ Св	β_i	x_4	x_5
x_1	β_1	a_{14}	a_{15}
x_2	β_2	a_{24}	a_{25}
x_3	β_3	a_{34}	a_{35}
Z	γ_0	γ_4	γ_5

Алгоритм перехода от симплекс-таблицы №1 к симплекс-таблице №2

Просмотрим элементы последней строки и среди γ_4 и γ_5 (γ_0 – не рассматривать) найдём наименьшее положительное. Пусть это γ_4. Это означает, что x_4 входит в Z со знаком "–", поэтому для уменьшения Z нужно увеличивать x_4, но увеличивать x_4 можно до тех пор, пока все остальные x_i будут неотрицательными. Столбец, содержащий x_4, называется разрешающим. Если в последней строке нет положительных коэффициентов, то все свободные переменные входят в Z с положительными коэффициентами, и Z_{min} достигается при равенстве нулю всех свободных переменных.

Составим отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца.

$$\min = \left\{ \frac{\beta_1}{a_{14}}; \frac{\beta_2}{a_{24}}; \frac{\beta_3}{a_{34}} \right\}$$

По min отношений выбирают строку, которую называют разрешающей.

Пусть min является отношение $\frac{\beta_2}{a_{24}}$, тогда строка x_2 –разрешающая.

О. Элемент, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называется разрешающим.

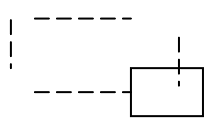
$\boxed{a_{24}}$, значит, x_4 нужно перевести в базисные, а x_2 – в свободные переменные.

Замечание. Если в разрешающем столбце нет положительных коэффициентов, то функция Z_{min} не достигнет, т.е. Z – не ограничена снизу.

Алгоритм перехода к симплекс-таблице №2

1. Неизвестные x_2 и x_4 меняют местами.
2. Разрешающий элемент a_{24} заменяют обратной величиной.
3. Остальные элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент.
4. Элементы разрешающего столбца, кроме разрешающего элемента, делят на разрешающий элемент и меняют знаки.
5. Все элементы разрешающего столбца симплекс-таблицы №2 получают по правилу прямоугольника.

$a_{ie}a_{ik}$



$a_{je}a_{jk}$

$a_{je} = (a_{ie} \cdot a_{jk} - a_{je} \cdot a_{ik}) / a_{jk}$

Пример 1. Для изготовления 2-х видов продукции тортов (P_1) и пирожных (P_2) кондитерский цех используется четыре вида сырья: мука (S_1), сахар (S_2), яйца (S_3), ароматизаторы (S_4). Запасы сырья, технологические коэффициенты приведены в таблице.

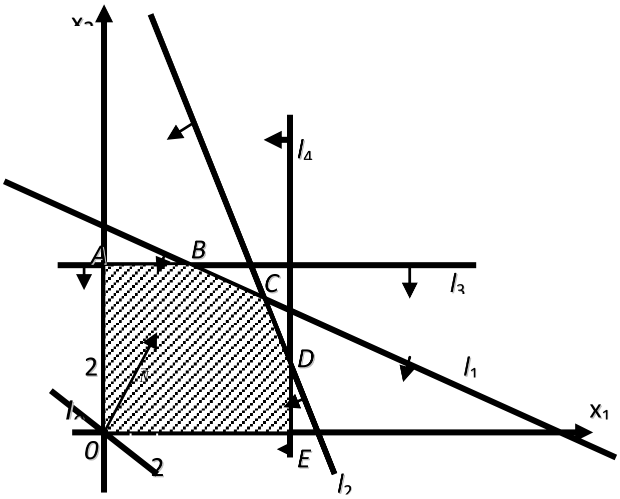
Виды сырья	Технологические коэффициенты		Запасы
	Торты P_1	**Пирожные P_2**	
Мука S_1	1	3	18
Сахар S_2	2	1	16
Яйца S_3	0	1	5
Ароматизаторы S_4	1	0	7

Необходимо составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, если прибыль от продажи продукции вида P_1=2 у.е., а P_2=3 у.е.

Решение. Обозначим x_1 - количество единиц продукции вида P_1, которое необходимо выпустить предприятию, x_2- количество единиц продукции вида P_2. Тогда, используя технологические коэффициенты, можно записать систему ограничений, которая показывает, что количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превысить имеющихся запасов.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \le 7 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \qquad Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

В декартовой системе координат строим многоугольник решений системы неравенств. Очевидно, что точкой максимума является точка С.



Находим ее координаты и значение целевой функции в ней.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18, \\ 2x_1 + x_2 = 16. \end{cases} \qquad C(6;4)$$

$$-5x_2 = -20$$

$$x_2 = 4$$

$$Z_{\max} = Z(6;4) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 12 + 12 = 24.$$

Таким образом, кондитерскому цеху, с целью получения максимальной прибыли в размере 24 у. д. е., рекомендовано выпускать продукции вида P_1 - 6 шт; вида P_2 - 4 шт в единицу времени.

Пример 3.

Хозяйству требуется не более десяти 3-х-тонных машин и не более восьми 5-тонных. Отпускная цена машины одной марки 2000 ден.ед., другой марки 4000 ден. ед. Хозяйство может выделить для приобретения машин 40 000 ден. ед. Сколько следует приобрести машин каждой марки в отдельности, чтобы их общая суммарная грузоподъемность была максимальной?

Решение.

$$\begin{cases} x_1 \le 10, \\ x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 = 20, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases} \qquad Z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$

перейдем к канонической форме задания, введя дополнительные переменные $x_3, x_4 \ge 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m = 3, n = 4, r(A) \le 3$$

Составим матрицу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \ne 0 \qquad r = 3$$

В системе можно оставить три базисных и одну свободную.

Пусть $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$ – базисные, $\boldsymbol{x_4}$ – свободная. Выразим базисные переменные через x_4.

$$x_2 = 8 - x_4$$

$$x_1 = 20 - 2x_4 = 20 - 16 + 2x_4 = 4 + 2x_4$$

$$x_3 = 10 - x_1 = 10 - 4 - 2x_4 = 6 - 2x_4$$

$$Z = 3(4 + 2x_4) + 5(8 - x_4) = 12 + 6x_4 + 40 - 5x_4 = 52 + x_4$$

Отсюда,

$$\begin{cases} x_1 = 4 - (-2x_4), \\ x_2 = 8 - (x_4), \\ x_3 = 6 - (2x_4). \end{cases} \qquad Z = 52 - (-x_4)$$

Симплекс-таблица №1

Св / Б	b_i	x_4
x_1	4	-2
x_2	8	1
x_3	6	2
Z	52	-1

$\min\left\{8/1; 6/2\right\} = 3$, значит x_3 перевести в свободные, а x_4 – в базис.

Симплекс-таблица №2

Св / Б	b_i	x_3
x_1	10	1
x_2	5	-½
x_4	3	½

Z	55	½

1. Разрешающий элемент 2 заменяют обратной величиной ½.
2. Элементы разрешающей строки делят на разрешающий элемент 2.
3. Элементы разрешающего столбца делят на разрешающий элемент и меняют знаки.
4. Остальные элементы заменяют по правилу прямоугольника $\frac{4\cdot 2-(-2\cdot 6)}{2}=10$.
5. Так как в строке Z (γ_0 не рассматривается), коэффициенты положительны, то план оптимальный.

$$Z = 55 \quad x_1 = 10; \quad x_2 = 5; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 3$$

$$X = (10;5;0;3).$$

Проведем анализ востребованности ресурсов. Для этого подставим полученные значения в исходные неравенства.

$10 \le 10$ (полностью удовлетворяет требованиям по трехтонным машинам)

$5 \le 8$ (не полностью удовлетворяет требованиям по пятитонным машинам)

$10+5=15\le 20$ (использованы не все денежные ресурсы)

Z_{max}=55т.

Транспортная задача. Закрытая и открытая модели

Транспортные модели (задачи) — специальный класс задач линейного программирования. В классической постановке эти модели описывают перемещение (перевозку) какого – либо товара из пункта отправления (например, места производства продукции) в пункт назначения (склад, магазин и т. п.). Назначение транспортной задачи – определение объемов перевозок из пунктов отправления в пункты назначения с минимальной суммарной стоимостью перевозок. При этом должны быть учтены ограничения, связанные с объемом предложения (производства) и спроса (потребности). Предполагается, что стоимость перевозки по маршруту прямо пропорциональна объему груза, перевозимого по этому маршруту.

В общем виде задача транспортного типа может быть сформулирована следующим образом.

Имеется m пунктов производства (иногда их называют пунктами отправления) с объемами производства, равными $a_1, \dots, a_m$ соответственно. Рассматривается также n пунктов потребления (пунктов назначения) с объемами потребления (спросом) $b_1, \dots, b_n$ соответственно. Известны транспортные издержки (затраты) по перевозке единицы продукции из каждого пункта производства в каждый из пунктов потребления: c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции из пункта производства i в пункт потребления j ($i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$). Задача состоит в определении плана перевозки продукции из пунктов производства в пункты потребления, минимизирующего суммарные транспортные расходы и удовлетворяющего ограничениям на объемы предложения и спроса.

Для наглядности модель транспортного типа можно представить в виде таблицы (называемой также *транспортной* или *распределительной таблицей*):

Пункт производства	Пункт потребления				Объем производства
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…		…	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
	Объем потребления				
	b_1	b_2	…	b_n	

Транспортную таблицу называют иногда *табличной* или *матричной моделью* транспортной задачи.

Задачи транспортного типа часто представляют в *сетевой постановке*, в которой каждому пункту производства или потребления соответствует своя вершина, а возможным способам перевозки – ребро сети с указанной стоимостью перевозки единицы продукции. Для сетевых моделей (задач о кратчайшем пути, максимальном потоке и т. д.) разработаны специальные эффективные методы решения (см. рабочую тетрадь «Элементы теории графов и сетевого планирования»).

Необходимо отметить целочисленный характер транспортной задачи (в первую очередь ее решения), поэтому транспортные задачи относятся также к целочисленному программированию, для которого тоже существуют специальные алгоритмы решения.

Для того чтобы транспортная задача имела допустимые планы, необходимо и достаточно выполнение равенства $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Это условие называют также ***условием баланса***, если оно выполнено, то транспортную задачу называют ***сбалансированной***. Транспортную модель также называют ***закрытой***, если суммарный объем производства равен суммарному спросу, т. е. выполняется условие баланса.

Если выполняется одно из условий

а) перепроизводство $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$;

б) дефицит $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$,

то модель транспортной задачи называют ***открытой*** (несбалансированной). Для разрешимости транспортной задачи с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую:

1. При выполнении условия а) необходимо ввести $(n+1)$-й фиктивный пункт потребления, объем спроса которого равен величине дисбаланса $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Соответствующие стоимости перевозок $c_{i\,n+1}$ $(i = \overline{1,m})$ полагаются равными нулю или, при наличие дополнительной информации, соответствующим значениям штрафов за хранение продукции на складе производителя и т.п.

При выполнении условия б) вводится фиктивный пункт производства A_{m+1}, объем производства которого равен величине дисбаланса $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Стоимости перевозок $c_{m+1\,j}$ $(j = \overline{1,n})$ от этого фиктивного поставщика полагаются равными нулю или, при наличии дополнительной информации, соответствующим значениям штрафов за недопоставку продукции и т. п. Например, чтобы гарантировать удовлетворение спроса некоторого пункта потребления в задаче с условием дефицита можно назначить очень высокую стоимость перевозок (штраф) от фиктивного пункта производства до этого пункта потребления.

Транспортная задача, как задача линейного программирования, может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения транспортных задач разработан специальный метод, имеющий те же этапы, что и симплексный метод, а именно:

1) нахождение исходного опорного решения;
2) проверка этого решения на оптимальность;
3) переход от одного опорного решения к другому.

Если m – число пунктов отправления, а n – число пунктов назначения, то уравнений составлено $m + n$, а переменных – m·n.

Можно также показать, что если одно из уравнений системы лишнее (оно является следствием остальных), то его можно исключить из системы.

Таким образом, в общем случае система транспортной задачи должна иметь m + n – 1 – уравнений с m·n – переменными.

План перевозок, в которых число базисных неизвестных равно $m+n-1$ называется ***невырожденным***. Если меньше этого числа, то план вырожденный, и значит, ввести перевозку с нулевым тарифом.

Построение исходного допустимого плана в транспортной задаче методом минимального элемента

По аналогии с другими задачами линейного программирования решение транспортной задачи начинается с построения допустимого базисного плана.

1. В плане заполняется клетка, которая соответствует min тарифу.

2. Затем заполняется клетка с min тарифом среди оставшихся и т. д.

3. Если на некотором шаге возникнет ситуация, когда несколько min элементов одинаковых, то выбираем тот, у которого меньше индекс i.

Метод потенциалов решения транспортных задач

Как уже отмечалось ранее, математическая модель транспортной задачи имеет ряд особенностей:

1) все ограничения представлены уравнениями;

2) коэффициенты при неизвестных в ограничениях равны либо 0, либо 1.

Поэтому данные особенности позволили преобразовать симплекс-метод в метод потенциалов, и тем самым существенно упростить решение транспортной задачи. Таким образом, найденное исходное опорное решение (методом min элемента либо методом северо-западного угла) проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если опорное решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система m + n действительных чисел U_i и V_j, удовлетворяющих условиям:

1) $U_i + V_j = C_{ij}$ – для всех заполненных клеток x_{ij};

2) $U_i + V_j \leq C_{ij}$ – для свободных клеток.

Числа U_i и V_j называются ***потенциалами***. В распределительную таблицу добавляют строку V_j и столбец U_i.

Для улучшения плана составляется цикл с одной из непотенциальных клеток, причем эта непотенциальная клетка должна являться одной из вершин цикла, а остальные вершины должны обязательно соответствовать перевозкам.

Цикл перераспределения ресурсов составляют по следующим правилам:

1. Этот цикл представляет собой замкнутый многоугольник с вершинами в загруженных клетках (за исключением вершины, которая является не потенциальной клеткой), и звеньями, лежащими вдоль строк и столбцов матрицы.

2. Ломаная линия должна быть связанной в том смысле, что из любой ее вершины можно попасть в любую другую вершину по строке или столбцу.

3. В каждой вершине цикла встречаются только два звена, одно из них располагается по строке, другое – по столбцу.

4. Число вершин цикла ***четное***, все они в процессе перераспределения делятся на загружаемые и разгружаемые.

5. В каждой строке (столбце) имеются две вершины: одна загружаемая, другая – разгружаемая.

Пример 1

На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т. соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т. соответственно. Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1т. продукции заданы матрицей (усл. ед.) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

1. В плане заполняется клетка, которая соответствует min тарифу.

2. Затем заполняется клетка с min тарифом среди оставшихся и т.д.

3. Если на некотором шаге возникнет ситуация, когда несколько min элементов одинаковых, то min тот, у которого меньше индекс *i*.

4. В общем случае, нельзя сказать, какой план перевозок ближе к оптимальному. Чаще оказывается ближе метод min элемента.

	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	**90**	-	-	90
A_2	**-**	**300**	**100**	400
A_3	**50**	-	**60**	110
Потребности	140	300	160	600

$Z = 90 \cdot 2 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 8 = 1610$ усл. ед.

Посмотрим, сколько заполнено клеток:

m + n – 1 = 3 + 3 – 1 = **5.**

Проверяем найденное опорное решение на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если опорное решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система m + n действительных чисел U_i и V_j, удовлетворяющих условиям:

1. $U_i + V_j = C_{ij}$ – для всех заполненных клеток x_{ij};

2. $U_i + V_j \le C_{ij}$ – для свободных клеток.

Числа U_i и V_j называются **потенциалами**. В распределительную таблицу добавляют строку V_j и столбец U_i .

Выбираем из двух опорных решений то, которое имеет минимальные затраты, т.е. метод min элемента и проверим его на оптимальность, добавив в распределительную таблицу строку V_j и столбец U_i .

	B_1	B_2	B_3	Запасы

A_1	**90**	-	-	90
A_2	**-**	**300**	**100**	400
A_3	**50**	-	**60**	110
Потребности	140	300	160	600

Составим систему для заполненных клеток по критерию $U_i + V_j = C_{ij}$:

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 2 \\ U_2 + V_2 = 1 \\ U_2 + V_3 = 5 \\ U_3 + V_1 = 3 \\ U_3 + V_3 = 8 \end{cases}$$ 5 уравнений, 6 неизвестных.

Одному из потенциалов дается произвольное значение, например, полагаем $U_1 = 0$.

$U_1 = 0$

$V_1 = 2$

$U_3 = 1$

$V_3 = 7$

$U_2 = -2$

$V_2 = 3$

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу и проверяем потенциальность незаполненных клеток по критерию: $U_i - V_j \leq C_{ij}$

		B1	**B2**	**B3**	Запасы
	Ui \ Vi	2	3	7	
A1	0	2 **90**	5 -	2 -	90
A2	-2	4 -	1 **300**	5 **100**	400
A3	1	3 **50**	6 -	8 **60**	110

Потребности		140	300	160	600

$$\begin{cases} U_1 + V_2 \le 5 \quad 3 \le 5 - \textit{потенциальна}, \\ U_1 + V_3 \le 2 \;\; 7 \le 2 - \textit{не потенциальна}, \\ U_2 + V_1 \le 4 \quad 0 \le 4 - \textit{потенциальна}, \\ U_3 + V_2 \le 6 \quad 4 \le 6 - \textit{потенциальна}. \end{cases}$$

Так как одна клетка оказалась не потенциальной, то данное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

Таким образом, строим цикл для не потенциальной клетки (1;3). У вершин цикла ставим знаки (+) и (–) и записываем грузы. У вершин со знаком (–) выбираем минимальный груз, он равен 60. Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин, и вычитаем из грузов, стоящих у отрицательных вершин.

		B1	**B2**	**B3**	Запасы
	Vi / *Ui*	2	3	7	
A1	0	- 2 **30** **90**	5	+ 2 **60**	90
A2	-2	4 -	1 300	5 100	400
A3	1	+ 3 **110**50	6 -	- 8 **0** 60	110
Потребности		140	300	160	600

<u>Получаем новый цикл.</u>

Снова проверим полученное решение на оптимальность:

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 2 \;\; U_1 = 0 \\ U_1 + V_3 = 2 \;\; V_1 = 2 \\ U_2 + V_2 = 1 \;\; V_3 = 2 \\ U_2 + V_3 = 5 \;\; U_2 = 3 \\ U_3 + V_1 = 3 \;\; V_2 = -2 \\ \qquad\qquad\quad U_3 = 6 \end{cases} \qquad 2.\; U_i + V_j \le C_{ij} \begin{array}{l} U_1 + V_2 \le 5 \;\; -2 \le 5 - \textit{потенциальна} \\ U_2 + V_1 \le 4 \;\; 5 \le 4 - \textit{не потенциальна} \\ U_3 + V_2 \le 6 \quad 4 \le 6 - \textit{потенциальна} \\ U_3 + V_3 \le 8 \;\; 8 \le 8 - \textit{потенциальна} \end{array}$$

Таким образом, клетка (2;1) не потенциальна. Получение нового плана осуществляется в том же порядке, что и предыдущий, т.е. строим с ней цикл, и проверяем полученный план на оптимальность аналогично.

		B1	**B2**	**B3**	Запасы
	Vi / *Ui*	2	-2	2	
A1	0	- 2 **0** 30	5	+ 2 **90** 60	90
A2	3	+ 4 **30**	1 300	- 5 **70** 100	400
A3	6	3 110	6	8 0	110
Потребности		140	300	160	600

Проверяя на потенциальность клетки нового плана убеждаемся, что последний план оптимальный:

		B1	**B2**	**B3**	Запасы
	Vi / *Ui*	2	-2	2	
A1	0	**0**	-	**90**	90
A2	3	**30**	**300**	**70**	400
A3	6	**110**	-	**0**	110
Потребности		140	300	160	600

$Z = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280$ ден. ед.

Таким образом, построением начального плана и последующим расчетом двух итераций (циклов) получено оптимальное решение по прикреплению пунктов отправления грузов к пунктам назначения.

Пример 2.

В Ставропольском крае имеются пять предприятий, выпускающих силикатный кирпич, который удовлетворяет потребности семи потребителей. В таблице приведены объемы производства, потребности и стоимость перевозок единицы продукции.

Пост	***Потребители***	a_i

авщики	***B_1***	***B_2***	***B_3***	***B_4***	***B_5***	***B_6***	***B_7***	
A_1	10	19	17	18	16	21	12	**500**
A_2	13	14	11	17	18	19	14	**400**
A_3	15	11	8	19	19	22	23	**150**
A_4	14	13	12	18	21	23	25	**150**
A_5	21	23	10	21	15	16	27	**250**
b_j	**200**	**300**	**400**	**250**	**150**	**100**	**50**	

В связи с переходом к выпуску шифера уменьшаются объемы поставок потребителям B_3 иB_2 соответственно на 100 и 150 единиц. Определить, на каких предприятиях необходимо провести сокращение, чтобы суммарные расходы на производство и транспортировку силикатного кирпича после сокращения были минимальными, если себестоимость производства единицы продукции на предприятиях составляет соответственно 4, 8, 12, 12, 10 условных денежных единиц.

Решение.

Сумма произведенной продукции равна сумме потребностей, значит, перед нами закрытая транспортная задача.

Сначала составим матрицу стоимостей рассматриваемой задачи, для этого к стоимости перевозки нужно прибавить себестоимость производства продукции на соответственном предприятии, уменьшим на 100 и 150 единиц объем потребностей потребителей B_3 иB_2 соответственно. В результате $\sum b_j < \sum a_i$, т.е. задача открытая и необходимо ввести фиктивного поставщика с потребностями, равными 250 единицам. В оптимальном плане предприятиям, прикрепленным к фиктивному потребителю, необходимо сократить объем производства.

Поставщики	**Потребители**								***a_i***
	B_1	***B_2***	***B_3***	***B_4***	***B_5***	***B_6***	***B_7***	***B_8***	
A_1	14 **200**	23	21	22 **100**	20 **150**	25	16 **50**	0	**500**
A_2	21	22 **100**	19 **300**	25	26	27	22	0	**400**
A_3	27	23 **50**	20	31	31	34	35	0 **100**	**150**
A_4	26	25	24	30 **150**	33	35	37	0	**150**

A₅	31	33	20	31	25	26 **100**	37	0 **150**	**250**
b_j	**200**	**150**	**300**	**250**	**150**	**100**	**50**	**250**	

При данном распределении затраты составят 24950 условных денежных единиц.

Составим систему уравнений согласно методу потенциалов:

$$
\begin{cases}
U_1 + V_1 = 14 \\
U_1 + V_4 = 22 \\
U_1 + V_5 = 20 \\
U_1 + V_7 = 16 \\
U_2 + V_2 = 22 \\
U_2 + V_3 = 19 \\
U_3 + V_2 = 23 \\
U_3 + V_8 = 0 \\
U_4 + V_4 = 30 \\
U_5 + V_6 = 26 \\
U_5 + V_8 = 0 \\
U_4 + V_2 = 25
\end{cases}
\begin{cases}
U_1 = 0 \\
U_2 = 5 \\
U_3 = 6 \\
U_4 = 8 \\
U_5 = 6 \\
V_1 = 14 \\
V_2 = 17 \\
V_3 = 14 \\
V_4 = 22 \\
V_5 = 20 \\
V_6 = 20 \\
V_7 = 16 \\
V_8 = -6
\end{cases}
$$

Поставщики		**Потребители**							
		B₁	***B₂***	***B₃***	***B₄***	***B₅***	***B₆***	***B₇***	***B₈***
	V_j / ***U_i***	14	17	14	22	20	20	16	-6
A₁	0	14 200	23	21	22 100	20 150	25	16 50	0
A₂	5	21	22 100 -	19 300	25 + ●	26	27	22	0
A₃	6	27	23 50	20	31	31	34	35	0 100
A₄	8	26	25 +	24	30 -150	33	35	37	0

A₅	6	31	33	20	31	25 •	26 100	37	0

После проверки на потенциальность некоторые точки непотенциальны, значит, составляем цикл. При данном распределении затраты составят 24750 условных денежных единиц.

Поставщики		***Потребители***							
		B₁	***B₂***	***B₃***	***B₄***	***B₅***	***B₆***	***B₇***	***B₈***
	V_j / U_i	14	17	16	22	20	20	16	-6
A₁	0	14 200	23	21	22 100	20 150 -	25 +	16 50	0
A₂	3	21	22	19 300	25 100	26	27	22	0
A₃	6	27	23 50	20 •	31	31	34	35	0 100
A₄	8	26	25 100	24	30 50	33	35	37	0 •
A₅	6	31	33	20 •	31	25 ● +	26 - 100	37	0 150

Определим потенциалы для данной таблицы:

$$
\begin{cases}
U_1 + V_1 = 14 \\
U_1 + V_4 = 22 \\
U_1 + V_5 = 20 \\
U_1 + V_7 = 16 \\
U_2 + V_3 = 19 \\
U_2 + V_4 = 25 \\
U_3 + V_2 = 23 \\
U_3 + V_8 = 0 \\
U_4 + V_2 = 25 \\
U_4 + V_4 = 30 \\
U_5 + V_6 = 26 \\
U_5 + V_8 = 0
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
U_1 = 0 \\
U_2 = 3 \\
U_3 = 6 \\
U_4 = 8 \\
U_5 = 6 \\
V_1 = 14 \\
V_2 = 17 \\
V_3 = 16 \\
V_4 = 22 \\
V_5 = 20 \\
V_6 = 20 \\
V_7 = 16 \\
V_8 = -6
\end{cases}
$$

Некоторые клетки снова непотенциальны, поэтому составляем цикл. При данном распределении затраты составят 24950 условных денежных единиц. Следовательно, предыдущее распределение является оптимальным.

Ответ: необходимо провести сокращение на третьем и пятом предприятиях, при этом затраты окажутся минимальными и составят 24750 условных денежных единиц.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР. ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА

Классификацию игр можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характер) взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д.

В зависимости от количества игроков различают игры двух и *n*игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Чем больше игроков - тем больше проблем.

По количеств стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется конечной. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, игра называется бесконечной.

По характеру взаимодействия игры делятся на:

1) бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции;

2) коалиционные (кооперативные) - могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции наперёд определены.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой.

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра - это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задастся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 2. столбец - номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1. соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение и оно может быть легко найдено путем сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра - это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец - стратегии игрока 2. на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице - выигрыш игрока 2.)

Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывном считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется выпуклой. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определенного числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

МАТРИЧНАЯ ИГРА. ДОМИНИРУЮЩИЕ СТРАТЕГИИ

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет m стратегий $i = 1, 2, ..., m$, второй имеет n стратегий $j = 1, 2, ..., n$. Каждой паре стратегий (i, j) поставлено в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш первого игрока за счет второго игрока, если первый игрок примет свою i-ю стратегию, а второй – свою j-ю стратегию.

Каждый из игроков делает один ход: первый игрок выбирает свою i-ю стратегию $\left(i=\overline{1,\ m}\right)$, второй – свою j-ю стратегию $\left(j=\overline{1,\ n}\right)$, после чего первый игрок получает выигрыш a_{ij} за счет второго игрока (если $a_{ij} < 0$, то это значит, что первый игрок платит второму сумму $|a_{ij}|$). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i=\overline{1,\ m};\ j = \overline{1,\ n}$ часто называется ***чистой стратегией***.

Если рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей A сводится к выбору первым игроком i-й строки, а вторым игроком j-го столбца и получения первым игроком (за счет второго игрока) выигрыша a_{ij}.

В общем виде матричная игра может быть записана следующей платежной матрицей

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1n}
A_2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2n}
…	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

где A_i – названия стратегий первого игрока; B_j – названия стратегий второго игрока; a_{ij} – значения выигрышей первого игрока при выборе им i-й стратегии, а вторым игроком – j-й стратегии.

Поскольку данная игра является игрой с нулевой суммой, значение выигрыша для второго игрока является величиной, противоположной по знаку значению выигрыша первого игрока.

Если в платежной матрицеA все элементы строки $A_i = \left(a_{i1},\, a_{i2},\, ...,\, a_{in}\right)$ не меньше соответствующих элементов строки $A_k = \left(a_{k1},\, a_{k2},\, ...,\, a_{kn}\right)$, по крайней мере один строго больше, то строка A_i называется ***доминирующей***, а строка A_k ***доминируемой***.

Аналогичны понятия доминирующего и доминируемого столбцов.

Первому игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминируемые строки, второму игроку невыгодно применять стратегии, которым соответствуют доминирующие столбцы, поэтому при решении игры можно уменьшить размеры платежной матрицы путем удаления из нее доминирующих столбцов и доминируемых строк.

Пример 1. Исследовать игру, заданную следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*Стратегия A_4 заведомо невыгодна по сравнению с A_1 и может быть исключена. В оставшейся матрице

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

можно исключить доминирующие стратегии B_1 и B_4. После их исключения

получаем матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, в которой вновь оказались заведомо невыгодными

стратегии A_1 и A_3. Их исключение дает матрицу (6 8). Теперь для игрока A осталась одна стратегия A_2 (в первоначальной нумерации) и для игрока B, очевидно, выгодной является стратегия B_2, обеспечивающая ему проигрыш 6, вместо 8 при B_3.

Окончательно получили решение игры в виде стратегий A_2 и B_2 и цену игры v= 6.

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ

Главным в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. В это понятие интуитивно вкладывается такой смысл: стратегия игрока является ***оптимальной***, если применение этой стратегии обеспечивает ему наибольший гарантированный выигрыш при всевозможных стратегиях другого игрока. Исходя из этих позиций, 1-й игрок исследует матрицу выигрышей A следующим образом: для каждого значения i $(i=\overline{1,m})$ определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий 2-го игрока

$$\min_j a_{ij} \quad (i=1,\ \dots,\ m),$$

т. е. определяется минимальный выигрыш для 1-го игрока при условии, что он примет свою i-ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия $i = i_o$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т. е. находится следующим образом:

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{\alpha}. \qquad (1)$$

Подобный подход к решению рассматриваемой задачи называют ***принципом гарантированного результата или критерием Вальда.*** Выбранную с его использованием стратегию называют ***максиминной***, а полученный в результате ее применения выигрыш называют ***максиминным***, или ***нижней ценой игры.***

Число $\underline{\alpha}$, определенное по формуле (1), называется ***нижней чистой ценой игры*** и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе 1-й игрок, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях 2-го игрока.

Аналогичные рассуждения можно провести для 2-го игрока, который при оптимальном своем поведении должен стремиться по возможности за счет своих стратегий максимально уменьшить выигрыш 1-го игрока. Поэтому для 2-го игрока отыскивается

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \overline{\alpha}. \qquad (2)$$

Число $\overline{\alpha}$, определяемое по формуле (2), называется ***чистой верхней ценой игры*** и показывает, какой максимальный выигрыш за счет своих стратегий может себе гарантировать 1-й игрок.

Применяя свои чистые стратегии, 1-й игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше $\underline{\alpha}$, а 2-й игрок за счет применения своих чистых стратегий может не допустить выигрыш 1-го игрока больше, чем $\overline{\alpha}$.

Максиминные стратегии игроков становятся устойчивыми, пока оба игрока их придерживаются и выигрыш одного из них равен проигрышу другого (т. е. нет места риску). Такая игра, где $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, имеет ***седловую точку*** в чистых стратегиях и ***чистую цену***игры

$$\upsilon = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}.$$

Седловая точка – это пара чистых стратегий (i_0,j_0) соответственно игроков 1-го и 2-го, при которых достигается равенство $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке.

Пример 1. Дана платежная матрица, которая определяет выигрыши игрока A. Вычислить нижнюю и верхнюю цены игры.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 20 \\ 6 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение.

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min\ \alpha_i$	$\max\min\ \alpha_i$
A_1	10	4	11	7	4	—
A_2	7	6	8	20	6	6
A_3	6	2	1	11	1	—
$\max\ \beta_i$	10	6	11	20		
$\min\max\ \beta_i$	—	6	—	—		

Если игрокA выбирает первую стратегию, он может получить выигрыш в размере 10, 4, 11 или 7 у. е. в зависимости от выбранной стратегии игроком B. При этом выигрыш игрока будет не меньше $\alpha_1 = \min\{10,\ 4,\ 11,\ 7\} = 4$ у. е. независимо от поведения игрока B.

Аналогично при выборе игрокомA второй стратегии гарантированный выигрыш будет равен $\alpha_2 = \min\{7,\ 6,\ 8,\ 20\} = 6$ у. е. При выборе игроком A третьей стратегии – $\alpha_3 = \min\{6,\ 23,\ 1,\ 11\} = 1$ у. е. Таким образом, минимальные значения $\alpha_{i,j} = \overline{1,3}$ определяют минимально гарантированный выигрыш для игрока A при любых стратегиях игрока B. Выбранная стратегия игроком A вторая стратегия называется максиминной стратегией, а соответствующее ее значение выигрыша $\alpha_2 = 6$ будет нижней ценой игры.

Второй игрок стремится минимизировать свой проигрыш. Выбрав первую стратегию β_1, игрокB может проиграть не более чем $\beta_1 = \max\{10,\ 7,\ 6\} = 10$ у. е. независимо от выбора стратегии игроком A.

Аналогично рассуждая, получим результаты $\beta_2 = \max\{4,\ 6,\ 2\} = 6$, $\beta_3 = \max\{11,\ 8,\ 1\} = 11$, $\beta_4 = \max\{7,\ 20,\ 11\} = 20$.

Игрок*B* выбирает стратегию β_2, которая минимизирует его максимальный проигрыш $\beta = \min \beta_i = \min\{10,\ 6,\ 11,\ 20\} = 6$ у. е. Величина $\beta = 6$ будет гарантированным проигрышем игрока *B* при любых стратегия игрока *A*. Выбранная игроком *B* вторая стратегия называется минимаксной стратегией, а соответствующее ее значение проигрыша $\beta_2 = 6$ будет верхней ценой игры.

Смешанные стратегии в матричных играх. Графический метод

Исследование в матричных играх начинается с нахождения ее седловой точки в чистых стратегиях. Если матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, то нахождением этой седловой точки заканчивается исследование игры.

Если же в игре нет седловой точки в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю чистые цены этой игры, которые указывают, что игрок*A* не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. Улучшение решений матричных игр следует искать в использовании секретности применения чистых стратегий и возможности многократного повторения игр в виде партии. Этот результат достигается путем применения чистых стратегий случайно, с определенной вероятностью.

Смешанная стратегия игрока – это вероятностная комбинация чистых стратегий, т. е. чистых стратегий, взятых в случайном порядке с некоторыми вероятностями.

Подобно играм, имеющим седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: ***оптимальными смешанными стратегиями*** игроков*A* и *B* называются такие наборы x^*, y^* соответственно, которые удовлетворяют равенству $\min\limits_{y}\max\limits_{x} M(A,\ x,\ y) = \max\limits_{x}\min\limits_{y} M(A,\ x^*,\ y^*)$.

Величина $M\ (A,\ x^*,\ y^*)$ называется при этом ***ценой игры*** и обозначается черезv.

Таким образом, решение матричной игры сводится к нахождению неотрицательных параметров решений системы ограничений. Однако это требует большого объема вычислений, которое растет с увеличением числа чистых стратегий игроков. Поэтому в первую очередь следует, по возможности, уменьшить число чистых стратегий игроков.

Отметим, что исключение доминируемых (не строго) стратегий может привести к потере некоторых решений. Если же исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменится.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ 1 И 2 ИГРОКОВ В ОБЩЕМ ВИДЕ

В общем случае игра 2х2 определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Прежде всего, необходимо проверить, есть ли у данной игры седловая точка. Если да, то игра имеет решение в чистых стратегиях, причём оптимальными стратегиями игроков 1 и 2 соответственно будут чистая максиминная и чистая минимаксная стратегии. Если же игра с матрицей выигрышей А не имеет чистых стратегий, то оба игрока имеют только такие оптимальные стратегии, которые используют все свои чистые стратегии с положительными вероятностями. В противном случае один из игроков (например 1) имеет чистую оптимальную стратегию, а другой - только смешанные. Не ограничивая общности, можно считать, что оптимальной стратегией игрока 1 является выбор с вероятностью 1 первой строки. Далее, по свойству 1 следует, что $a_{11} = a_{12} = \upsilon$ и матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \upsilon & \upsilon \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что для матриц такого вида одна из стратегий игрока 2 является доминируемой. Следовательно, по свойству 4 этот игрок имеет чистую стратегию, что противоречит предположению.

Пусть $X = (\xi, 1-\xi)$ - оптимальная стратегия игрока 1. Так как игрок 2 имеет смешанную оптимальную стратегию, из свойства 1 получим, что (см. также свойство 7)

$$\begin{cases} a_{11}\xi + a_{21}(1-\xi) = \upsilon, \\ a_{12}\xi + a_{22}(1-\xi) = \upsilon. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $\upsilon \neq 0$ столбцы матрицыАне могут быть пропорциональны с коэффициентом пропорциональности, отличным от единицы. Если же коэффициент пропорциональности равен единице, то матрицаАпринимает вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{pmatrix}$$

и игрок 1 имеет чистую оптимальную стратегию (он выбирает с вероятностью 1 ту из строк, элементы которой не меньше соответствующих элементов другой), что противоречит предположению. Следовательно, если $\upsilon \neq 0$ и игроки имеют только смешанные оптимальные стратегии, то определитель матрицыАотличен от нуля. Из этого следует, что последняя система уравнений имеет единственное решение. Решая её, находим

$$\xi = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}};$$

$$\upsilon = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к тому, что оптимальная стратегия игрока 2 $Y = (\eta, 1 - \eta)$.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИГР

Пример. Молочный комбинат «Ставропольский» планирует выпуск двух видов новой продукции: питьевой биойогурт и пудинг сливочный. Спрос на эти продукты не определен, но можно предположить, что он принимает одно из двух состояний: хороший и удовлетворительный. В зависимости от этих состояний прибыль комбината различна и определяется матрицей K:

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальное соотношение между объемами выпуска каждого из продуктов, при котором комбинату гарантирована средняя прибыль при любом состоянии спроса.

Решение.

		B_1	B_2	$\min \alpha_i$	$\max\min \alpha_i$
		y	$1-y$		
A_1	x	3	5	3	—
A_2	$1-x$	4	2	2	2
$\max \beta_i$		4	5		
$\min\max \beta_i$		4	—		

Так как нижняя и верхняя цены игры не равны, то игра производится в смешанных стратегиях, седловой точки нет.

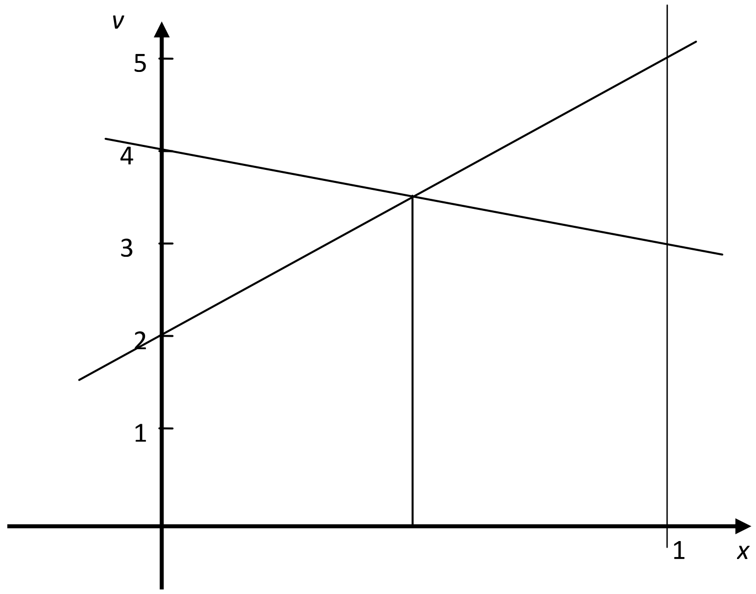
Решим игру в смешанных стратегиях. Пусть x – вероятность применения 1-й стратегии 1-м игроком, $(1 - x)$ – вероятность применения 2-й стратегии 1-м игроком. Тогда $\begin{cases} v = 3x + 4(1-x), \\ v = 5x + 2(1-x) \end{cases}$ или $\begin{cases} v = 4 - x, \\ v = 3x + 2. \end{cases}$

$v = 4 - x$ – уравнение прямой L_1.

$v = 3x + 2$ – уравнение прямой L_2.

Строим систему координат xOy и на оси Ox отложим отрезок единичной длины (так как мы находим вероятность применения каждым из игроков своих смешанных стратегий, а вероятность находится от 0 до 1).

Строим прямые L_1 и L_2. Из точки пересечения прямых опускаем перпендикуляр на ось Ox и находим x.

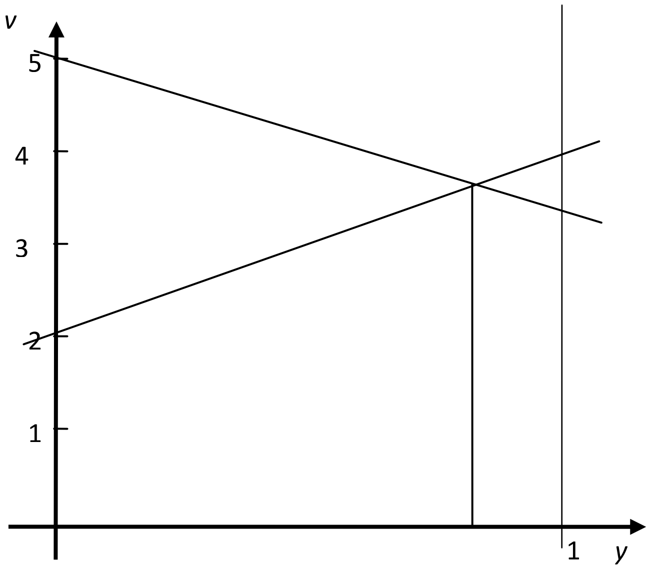


$4 - x = 3x + 2,$
$4x = 2,$
$x = \frac{1}{2}$ – вероятность применения 1-й стратегии;
$1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ – вероятность применения 2-й стратегии.
$X\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right).$

Найдем цену игры $v = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Пусть y – вероятность применения 1-й стратегии 2-м игроком, $(1 - y)$ – вероятность применения 2-й стратегии 2-м игроком.

Аналогично находим: $\begin{cases} v = 3y + 5(1 - y), \\ v = 4y + 2(1 - y) \end{cases}$ или $\begin{cases} v = -2y + 5, \\ v = 2y + 2. \end{cases}$



$-2y+5=2y+2$, $-4y=-3$, $y=\dfrac{3}{4}$.

$1-y=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$.

$Y\left(\dfrac{3}{4};\ \dfrac{1}{4}\right)$.

Найдем цену игры: $v=2\dfrac{3}{4}+2=\dfrac{7}{2}$.

Ответ: для комбината гарантирована средняя прибыль $3\dfrac{1}{2}$ при производстве 50 % от всего товара продукта*A* и при производстве 50 % продукта *B*.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ
ПОНЯТИЕ ГРАФА

Понятие «граф» связано с понятиями «графический», «графика». Действительно, графовые модели имеют простую и понятную графическую интерпретацию, позволяющую с их помощью образно представить самые разные объекты, в то же время оставаясь в рамках строгих математических моделей.

Граф $G=(p,\ x)$ – это совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются ***вершинами P***, и множества отрезков, которые соединяют вершины, которые называются ***ребрами*** (x).

Опишем традиционную *геометрическую интерпретацию* графа. Пусть $G=[A,B]$ – некоторый граф и $A=\{a_1,\,a_2,\,...,\ a_p\}$, $B=\{b_1,\,b_2,\,...,b_q\}$. Фиксируем на плоскости произвольным образом p точек и произвольным образом дадим им в качестве имен имена вершин данного графа; в итоге на плоскости возникнут точки, обозначенные как $a_1, a_2, ..., a_p$. Затем для каждой пары точек a_i, a_j таких, что $(a_i, a_j) \in B$, проведем отрезок прямой, соединяющий точки a_i, a_j. В результате таких действий возникнет некоторый рисунок, который и называется *геометрической интерпретацией* графа.

Заметим, что одному и тому же графу соответствует много рисунков, которые могут быть его геометрическими интерпретациями.

Вершины и ребра графа называются его ***элементами***. Число $|P_G|$ вершин графа Gназывается его ***порядком***и обозначается |G|.

Отрезок линии (p_i, p_j), соединяющий две вершины, называют ***ребром*** или ***дугой*** графа.

На рисунке 1 изображен граф, имеющий пять вершин и шесть ребер.

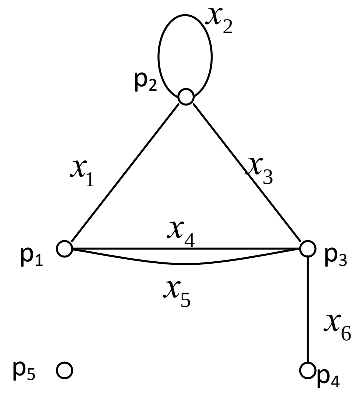


Рис. 1

Вершинами графа могут быть операторы программы или команды операционной системы, контактные площадки на плате компьютера, узлы транспортной или электрической сети, события в любой сфере человеческой деятельности, а ребрами или дугами – связи операторов программы, команд операционной системы, контактных площадок на плате компьютера, узлов в транспортной или в электрической сети или причинно-следственные связи событий в любой сфере человеческой деятельности.

Два ребра, связывающие одну и ту же пару вершин, называются ***параллельными*** **(*или кратными*)**.

Ребро, связывающее вершину саму с собой, называется ***петлей***. На рисунке 1 x_4 и x_5 – параллельные ребра, а x_2 – петля.

Если в графе существует ребро $x = (a,\ b)$, которое *соединяет* вершины a и b,то вершины a и b называют ***смежными вершинами***, а вершину a и ребро x – ***инцидентными***. На рисунке 1 вершина p_3 и ребро x_3инцидентны друг другу.

Говорят, что ребро (p_i, p_j) *исходит* из вершины p_i и *заходит* в вершину p_j. Вершину p_iназывают *началом*, p_j – *концом* дуги. Два ребра***смежны***, если они имеют общую граничную вершину. На рисунке 1 p_1, p_2 – смежные вершины, x_1, x_2 – смежные ребра.

Множество всех вершин графа *G*, смежных с некоторой вершиной *p*, называется ***окружением вершины*** *p* и обозначается $N_G(p)$ или просто $N(p)$.

Степенью вершины или ***локальной степеньюграфа в вершине p*** называется число ребер, инцидентных ей (петли считаются дважды); степень вершины *p* обозначается через $d(p)$.

Теорема. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его ребер, т. е. $2|\alpha| = \sum\limits_{p\in P} \deg P$.

Вершина степени 1 называется ***висячей***. Вершина степени 0 называется ***изолированной***. На рисунке 1 степень вершины p_1 равна трем, p_4 – висячая вершина, p_5 – изолированная. Если все вершины имеют одинаковую степень *r*, то граф называют ***регулярным (однородным)*** степени *r*.

Число дуг, исходящих из вершины p_i, называют ***полустепенью***вершины графа и обозначают $\delta_i^+ = \Sigma_j(p_i, p_j)^+$. Вершину p_i, инцидентную исходящей дуге $(p_i, p_j)^+$, называют ***истоком***(символ «+» свидетельствует о направлении дуги от вершины p_i). Число дуг, заходящих в вершину p_i, также называют ***полустепенью*** вершины графа и обозначают $\delta_i^- = \Sigma_j(p_i, p_j)^-$. Вершину x_i, инцидентную заходящей дуге $(p_j, p_i)^-$, называют***стоком***(символ «–» свидетельствует о направлении дуги к вершине p_i).

Граф *G* (рис. 2) называется ***полным***, если любые две его различные вершины соединены ребром, и он не содержит параллельных ребер.

G_1

Рис. 2

Граф называется ***вырожденным (пустым),*** если любые две его вершины не смежны (т. е. у него нет ребер).

Граф ***конечен***, если множества *P, x* конечны.

Ребро графа G ориентировано, если порядок пары (*a, b*) существенен.

Ребро графа G не ориентировано, если порядок пары (*a, b*) несущественен.

Если рассматривается множество упорядоченных пар точек, т. е. на каждом ребре задается направление, то граф G называется ***ориентированным*** (***орграф***)(рис. 3). В противном случае G называется ***неориентированным графом*** (***Н-граф***).

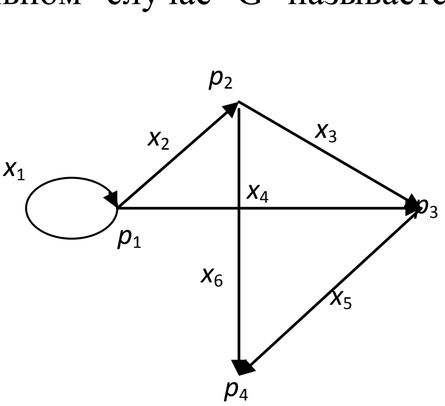


Рис. 3

Смешанным графом называется граф, у которого есть как ориентированные, так и неориентированные ребра.

Любая программа или алгоритм вычислительного процесса, электронная схема или последовательность операций производственного процесса могут быть представлены ориентированным графом, а любая схема транспортной или электрической сети – неориентированным.

Способы задания графа

Граф может быть задан разными способами: рисунком, перечислением вершин и ребер (или дуг) и т. д. Задать граф – описать множества его вершин и ребер, а также отношения инцидентности. Одним из самых удобных способов является задание графа с помощью матрицы. Пусть некоторый граф G имеет n вершин $p_1, p_2, ..., p_n$ и m ребер $x_1, x_2, ..., x_m$.

Построим матрицу, имеющую n строк и m столбцов. Каждая строка матрицы будет соответствовать вершине, а столбец – ребру графа.

Для описания конечных графов достаточно перенумеровать вершины и ребра.

Способ 1. ***Аналитический способ задания*** – в виде двух множеств вершин P и ребер X, когда каждое ребро x определено парой инцидентных ему вершин (P' и P''). Граф G полностью определен двумя множествами: $P = (A, B, C, D, E)$; $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ или множеством ребер, представленных парой своих концевых вершин: $X = \{(AB), (BC), (CD), (DE)\}$.

Способ 2. Пусть $p_1, ..., p_n$ – вершины графа G, $x_1, \dots, x_h$ – ребра. Отношение инцидентности можно определить ***матрицей инцидентности***$U(u_{ij})$, имеющей hстрок и n столбцов.

В **неориентированном графе**, если ребро x инцидентно вершине p_i, то $u_{ij} = 1$, в противном случае = 0. В каждом столбце матрицы инцидентности всегда ровно две единицы, остальные элементы равны нулю.

В матрице инцидентности $U(u_{ij})$**ориентированного графа**G, если вершина p_j – начало ребра x_i, то $u_{ij} = 1$, а если конец ребра, то –1. Если x_i– петля, а p_j – инцидентная ей вершина, то $u_{ij} = \alpha$, где α – любое число, отличное от 1, 0, –1. В остальных случаях $u_{ij} = 0$.

Если в графе все вершины имеют степень ноль, то матрицы инциденции не существует.

Способ 3. Отношение инцидентности можно задать списком ребер графа. Каждая строка этого списка соответствует ребру, а в ней записаны номера вершин, этому ребру инцидентных.

Для H-графа очередность вершин в строке любая; для орграфа – на 1-м месте стоит номер вершины – начало ребра.

Способ 4. ***Матрица смежности*** $S=(s_{ij})$ – квадратная матрица размерностью $(n\times n)$, в которой по вертикали и горизонтали перечисляются все вершины $p_j\in P$. На пересечении *i*-й и *j*-й вершин проставляется:

в случае *Н*-графа – число ребер, соединяющих эти вершины;

в случае орграфа – количеству ребер с началом в вершине *i* и концом в вершине *j*.

Свойства матриц $U(u_{ij})$ *и* $S(s_{ij})$*:*

Если два графа равны, их матрицы совпадают.

Вид матриц зависит от нумерации вершин и ребер графа.

МАРШРУТЫ И ПУТИ

Маршрутом (путем) длины ℓ называется последовательность вершин и ребер $p_0, x_1, p_2, x_2, ..., p_\ell$, где ребро x_i соединяет вершины p_{i-1} и p_i, $i=\overline{1,\ell}$, p_0 – *начало* пути, p_ℓ – *конец*. ***Длина маршрута*** **(*пути*)** − число ребер в маршруте (дуг в пути).

Если $p_0=p_\ell$, то маршрут называется ***замкнутым***. Если $p_0\neq p_\ell$, то маршрут называется ***открытым***. Открытый маршрут, в котором все вершины различны, называется ***цепью***. Маршрут, в котором все ребра различны, называется ***простым***, иначе маршрут будет ***составным***. Маршрут назовем ***элементарным***, если в нем никакая вершина не встречается дважды. Любой составной маршрут не является элементарным, простой путь может быть как элементарным, так и неэлементарным.

Цикл − замкнутая цепь (в неориентированном графе).

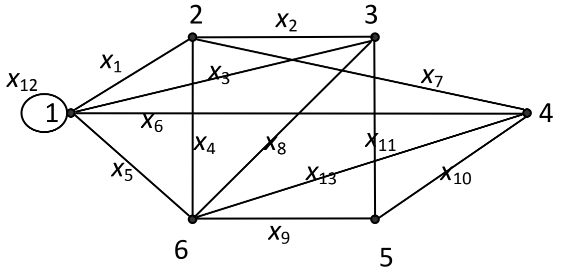
Пример. Для данного неориентированного графа *G* построить граф, написать маршрут p_1, p_4, простую цепь, простой цикл.

G = (*P*, *X*):

P={1, 2, 3, 4, 5, 6},

X={(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (6, 1)}.

Решение.



1. Маршрут p_1, p_4:

$p_1, x_1, p_2, x_2, p_3, x_{11}, p_5, x_{10}, p_4,$

$p_1, x_1, p_2, x_4, p_6, x_8, p_3, x_{11}, p_5, x_{10}, p_4,$

$p_1, x_1, p_2, x_7, p_4,$

p_1, x_6, p_4 и т. д.

2. Простая цепь: $p_1,\ x_1,\ p_2,\ x_4,\ p_6,\ x_8,\ p_3,\ x_{11},\ p_5,\ x_{10},\ p_4$.

3. Простой цикл: $p_1,\ x_1,\ p_2,\ x_4,\ p_6,\ x_8,\ p_3,\ x_{11},\ p_5,\ x_{10},\ p_4,\ x_6,\ p_1$.

Контур − замкнутый путь (в ориентированном графе). Для контура используются те же понятия, что и для маршрута: контур может быть простым или составным, элементарным или неэлементарным. Начальная и конечная вершина контура считается входящей только один раз, хотя в записи она будет встречаться дважды.

Если существует маршрут, соединяющий две вершины, то из ребер этого маршрута можно построить цепь (для этого следует выбрать маршрут минимальной длины из ребер данного). Длина кратчайшей цепи, соединяющей вершины p_1и p_2,называется ***расстоянием*** между этими вершинами $\rho\left(p_1, p_2\right)$. Если ребра a и b не соединены цепью, то $\rho\left(p_1, p_2\right)=\infty$.

Свойства расстояния:

1) $\rho\left(p_1, p_2\right) \geq 0, \quad \rho(p_1, p_2)=0 \ \Leftrightarrow\ p_1=p_2$;

2) $\rho\left(p_1, p_2\right)=\rho\left(p_2, p_1\right)$;

3) $\rho\left(p_1, p_2\right)+\rho\left(p_2, p_3\right) \geq \rho\left(p_1, p_3\right)$.

***Гамильтонова цепь* (*путь, цикл, контур*)** − простая цепь (путь, цикл, контур), проходящая через все вершины.

Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется ***гамильтоновым***.

Критерий существования гамильтонова цикла в произвольном графе G еще не найден.

Граф, изображенный на рисунке 5, не является гамильтоновым, а граф, представленный на рисунке 4, содержит гамильтонов цикл $(x_1,\ x_3,\ x_5,\ x_7,\ x_8)$

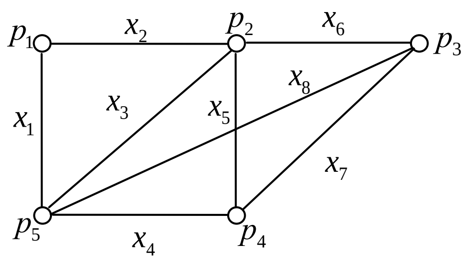
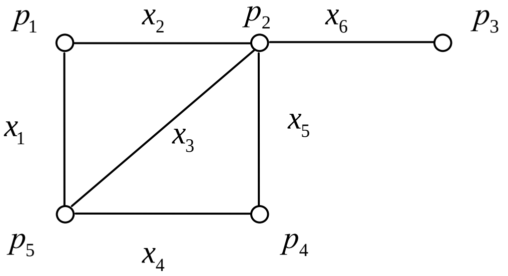


Рис. 4

***Эйлерова цепь* (*путь, цикл, контур*)** − цепь (путь, цикл, контур), содержащая все ребра (дуги) графа по одному разу.

Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется ***эйлеровым графом***.

На рисунке 5 граф G не является эйлеровым, так как вершина p_3 инцидентна только одному ребру.



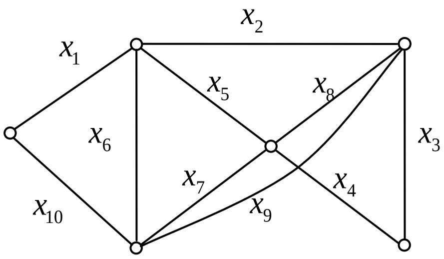


Рис. 5Рис. 6

Если путь приведет в вершину p_3, то не будет ребра, по которому можно было бы выйти из p_3.

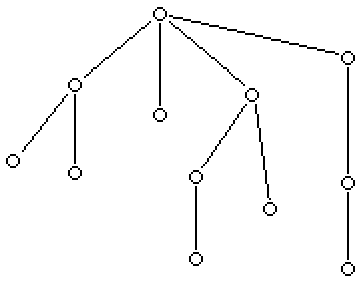
Граф G, изображенный на рисунке 6, является эйлеровым. Последовательность ребер $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$, образует эйлеров цикл.

На рисунке 5 изображен граф G, обладающий эйлеровым путем $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ с концевыми вершинами p_5 и p_3.

ДЕРЕВЬЯ И ЛЕСА

Граф без циклов называется ***лесом***. Связный граф, не содержащий простых циклов, называется ***деревом***.

Граф является деревом, если любые две его различные вершины соединяет единственная цепь.



Дерево графа *G*, содержащее все его вершины, называется ***остовом графаG*** или его ***покрывающим деревом***.

Ориентированным деревом (***корневым деревом***) называют связный граф, в котором в каждую вершину, кроме одной, называемой ***корнем дерева***, заходит ровно одна дуга. В корень дерева ни одна дуга не заходит.

Вершины, из которых не выходит ни одна дуга, называются ***листьями***.

Все вершины корневого дерева в зависимости от расстояния от корня обычно располагают по ярусам.

Остовным деревом сети называется дерево, содержащее все узлы сети.

РАСШИРЕНИЯ МОДЕЛИ

Модель графа при описании конкретных объектов, процессов или явлений может быть расширена. Для этого используют следующие способы:

- Взвешивание дуг (ребер). Каждому ребру (дуге) графа приписывается число – вес дуги (ребра). Вес может определять, например, расстояние между городами, если вершинам приписаны имена городов, а ребра – дороги между ними. Для описания взвешенного графа используется матрица смежности, в ячейках которой записаны веса.

- Взвешивание вершин. Аналогично дугам веса приписываются вершинам. Например, вершинами представлены магазины и склады, а вес вершины определяет количество некоторого товара на складе или в магазине.
- Взвешивание дуг и/или вершин векторами. Взвешивание производится не числом, а набором чисел. Например, для дороги могут быть указаны расстояние, стоимость проезда, время в пути и т. д.

В графе допускается между двумя вершинами несколько «параллельных» дуг (или ребер). В этом случае говорят о кратных дугах (ребрах), а такие графы называют *мультиграфами*. Для описания мультиграфов используются такие же таблицы, как и для простых графов, но в клетках записаны не 0 и 1, а кратность дуги.

Область применения взвешенных графов в качестве моделей довольно обширна: транспортные задачи, задачи оптимизации сети связи и системы перевозок и др. Одной из известнейших оптимизационных задач является нахождение кратчайших путей в графе со взвешенными дугами.

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

Данная задача состоит в определении в транспортной сети кратчайшего пути между заданными исходным пунктом и пунктом назначения. Такая модель может быть использована для описания различных экономических ситуаций.

Введем следующие обозначения:

x_1 – исходный узел;

x_n – узел назначения;

d_{ij} – расстояние на сети между смежными узлами x_i и x_j;

U_j – кратчайшее расстояние от узла x_1 до узла x_j, $U_1 = 0$.

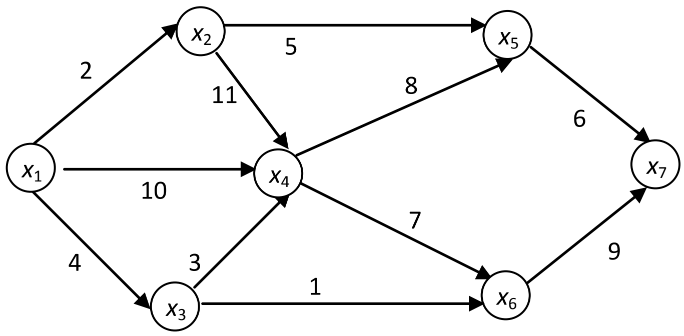
Алгоритм нахождения кратчайшего пути состоит в последовательном нахождении значений U_j для каждого узла от исходного узла до узла назначения. Значение U_j для каждого узла рассчитывается по формуле

$$U_j = \min\{U_j + d_{ij}\}.$$

Процедура заканчивается, когда получено значение U_n для узла назначения.

Кратчайший маршрут от исходного узла до узла назначения определяется, начиная с узла назначения, путем прохождения узлов в обратном направлении по дугам, на которых реализовались минимальные значения расстояний на каждом шаге.

Пример 1. Определить кратчайшее расстояние между узлами x_1 и x_7.



Решение. Найдем последовательно значения U_jдля каждого узла от исходного узла до узла назначения.

$U_1 = 0$.

$U_2 = \boldsymbol{U_1 + d_{12}} = 0 + 2 = 2$.

$U_3 = \boldsymbol{U_1 + d_{13}} = 0 + 4 = 4$.

$U_4 = \min\{U_1 + d_{14}, U_2 + d_{24}, U_3 + d_{34}\} = \min\{0 + 10, 2 + 11, \mathbf{4 + 3}\} = 7$.

$U_5 = \min\{\boldsymbol{U_2 + d_{25}}, U_4 + d_{45}\} = \min\{\mathbf{2 + 5}, 7 + 8\} = 7$.

$U_6 = \min\{\boldsymbol{U_3 + d_{36}}, U_4 + d_{46}\} = \min\{\mathbf{4 + 1}, 7 + 7\} = 5$.

$U_7 = \min\{\boldsymbol{U_5 + d_{57}}, U_6 + d_{67}\} = \min\{\mathbf{7 + 6}, 5 + 9\} = 13$.

Для определения кратчайшего расстояния между узлами x_1 и x_7 получена обратная последовательность узлов и дуг.

$$x_7 \to d_{57} \to x_5 \to d_{25} \to x_2 \to d_{12} \to x_1.$$

Минимальное расстояние между узлами x_1 и x_7 равно 13, а соответствующий маршрут равен $\{x_1, x_2, x_5, x_7\}$.

ПОСТРОЕНИЕ КОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

При изучении сетей возникает задача построения минимального остовного дерева, т. е. задача соединения всех узлов сети с помощью путей наименьшей длины. Примером такой задачи является проектирование сети дорог, соединяющих населенные пункты, где дороги, соединяющие два пункта, могут проходить через другие населенные пункты. Наиболее экономичный проект должен минимизировать общую длину дорог.

Рассмотрим процедуру построения минимального остовного дерева. Обозначим:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – множество узлов сети;

C_k – связное множество узлов сети, соединенных алгоритмом после выполнения k-й итерации.

$\overline{C_k}$ – множество узлов сети, не соединенных с узлами множества C_k после выполнения k-й итерации.

Алгоритм построения минимального остовного дерева сети:

1. Выбрать произвольный узел сети x_i, $C_1 = \{x_i\}$, $\overline{C}_1 = X \setminus \{x_i\}$.

2. Выбрать из оставшихся узлов узел x_j, ближайший к множеству узлов C_1, $C_2 = \{x_i, x_j\}$, $\overline{C}_2 = X \setminus \{x_i, x_j\}$.

3. Выбрать из множества $\bar{C}_2$ узел, ближайший к узлам множества C_2, включить его в множество C_2 и исключить из множества $\bar{C}_2$.

За конечное число шагов будут обработаны все узлы сети и построено минимальное остовное дерево. $C_n=X$, $\bar{C}_n = \varnothing$.

«ДЕРЕВО» РЕШЕНИЙ

На практике результат одного решения, как правило, приводит к необходимости принятия следующего решения и т. д.

Графически подобные процессы могут быть представлены с помощью «дерева» решений. ***«Дерево» решений*** – это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, состояния среды, соответствующие вероятности и выигрыши для любых комбинаций альтернатив и состояний среды. Оно дает возможность рассмотреть различные ситуации, соотнести с ними финансовые результаты, скорректировать их в соответствии с приписанной им вероятностью, а затем сравнить альтернативы и выбрать наилучший вариант действий.

Составляя «дерево» решений, рисуют ствол и ветви, отображающие структуру проблемы. Располагают «дерево» решений слева направо. Ветви обозначают возможные альтернативные решения, которые могут быть приняты, и возможные исходы, возникающие в результате этих решений.

Квадратные узлы на «дереве» решений обозначают места, в которых принимаются решения, круглые узлы – места исходов. Так как не представляется возможным влиять на появление исходов, то в круглых узлах вычисляют вероятности их появления. Когда все решения и их исходы указаны на «дереве», оценивается каждый из вариантов и проставляются денежные доходы. Все расходы, вызванные решениями, проставляются на соответствующих ветвях. Рассмотрим задачу с применением дерева решений.

Для каждой альтернативы мы считаем ***ожидаемую стоимостную оценку***(EMV) – максимальную из сумм оценок выигрышей, умноженных на вероятность реализации выигрышей, для всех возможных вариантов.

Пример. Фирма может принять решение о строительстве среднего и малого предприятия. Малое предприятие впоследствии можно расширить. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии. Строительство среднего предприятия экономически оправдано при высоком спросе. С другой стороны, можно построить малое предприятие и через два года его расширить.

Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса равны 0,7 и 0,3 соответственно. Строительство среднего предприятия обойдется в 4 млн руб., малого – в 1 млн руб. Затраты на расширение через два года малого предприятия оцениваются в 3,5 млн руб.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

– среднее предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,9 (0,2) млн руб.;

– малое предприятие при низком спросе дает 0,1 млн руб.;

– малое предприятие при высоком спросе дает 0,2 млн руб. в течение 10 лет;

– расширенное предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,8 (0,1) млн руб.;

– малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе дает 0,1 млн руб. в год за остальные восемь лет.

Определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий.

Решение. Данная задача является многоэтапной, так как если фирма решит строить малое предприятие, то через два года она может принять решение о его расширении. В этом случае процесс принятия решения состоит из двух этапов: решения в настоящий момент времени о размере предприятия и решения, принимаемого через два года о необходимости его расширения.

Задача представлена в виде дерева решений. Предполагается, что спрос может оказаться высоким и низким. Дерево имеет два типа вершин: «решающие» вершины, обозначенные квадратными узлами, и «случайные» вершины, показанные круглыми узлами.

Начиная с вершины 1, являющейся «решающей», необходимо принять решение относительно размера предприятия. Вершины 2 и 3 являются «случайными». Фирма будет рассматривать возможность расширения малого предприятия только в том случае, если спрос по истечении первых двух лет установится на высоком уровне. Поэтому в вершине 4 принимается решение о расширении или нерасширении предприятия. Вершины 5 и 6 будут «случайные».

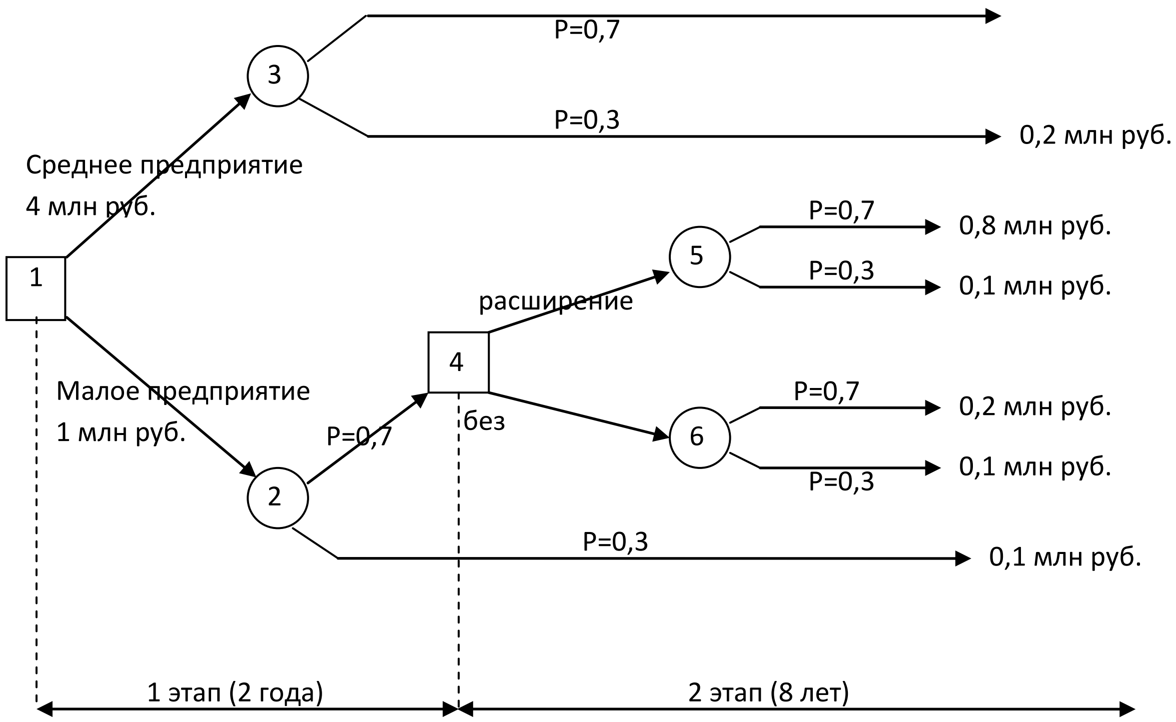
Произведем расчеты для каждой из альтернатив. Вычисления начнем со 2-го этапа. Для последних восьми лет альтернативы, относящихся к вершине 4, оцениваются:

ДР = $(0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3) \cdot 8 - 3{,}5 = 1{,}22$ млн руб.;

ДБР = $(0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3) \cdot 8 = 1{,}36$ млн руб., где ДР – доход с расширением;

ДБР – доход без расширения предприятия.

Таким образом, в вершине 4 выгоднее не проводить расширение, при этом доход составит 1,36 млн руб.



Теперь для дальнейших расчетов оставим одну «ветвь», выходящую из вершины 4, которой соответствует доход 1,36 млн руб. за остальные восемь лет. Перейдем к вычислениям 1 этапа. Для вершины 1:

$$ДС = (0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3) \cdot 10 - 4{,}0 = 2{,}9 \text{ млн. руб.};$$

$$ДМ = 1{,}36 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 10 - 1{,}0 = 0{,}94 \text{ млн. руб.},$$

где ДС – доход среднего предприятия; ДМ – доход малого предприятия.

Сравнивая полученные в вершине 1 доходы среднего и малого предприятий, видим, что более предпочтительным является вариант строительства среднего предприятия. Таким образом, фирме целесообразно построить среднее предприятие. Оценим степень риска каждого решения по величине среднеквадратического отклонения:

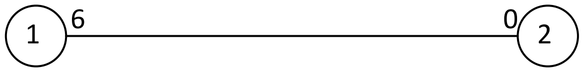
$$\sigma_1 = \sqrt{(0{,}9 - 2{,}9)^2 \cdot 0{,}7 + (0{,}2 - 2{,}9)^2 \cdot 0{,}3} = 2{,}23 \text{ млн. руб.}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{(0{,}9 - 0{,}94)^2 \cdot 0{,}7 + (0{,}1 - 2{,}9)^2 \cdot 0{,}3} = 0{,}65 \text{ млн. руб.}$$

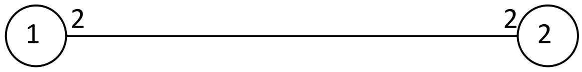
Рассматривая среднеквадратические отклонения, следует отметить, что решение по строительству малого предприятия дает более гарантированный доход.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

Рассматривается сеть с одним узлом ***входа(источник)*** и одним узлом ***выхода(сток)***. Какова максимальная величина потока (количество машин, сообщений, жидкости и т. д.), который может войти в сетевую систему и выйти из нее в заданный период времени? Мы предполагаем, что поток, вытекающий из узла, равен потоку, втекающему в узел. Под ***пропускной способностью***(или ***мощностью) дуги***будем понимать верхнее ограничение на поток в этой дуге. Понятно, что автомобильные трассы ограничивают число автомобилей в транспортной системе, величина трубопроводов ограничивает количество нефти в системе ее распределения. Мощность потока может зависеть от его направления. Условное изображение в сети



означает, что мощность потока от узла 1 к узлу 2 равна 6, а мощность потока от узла 2 к узлу 1 равна 0, то есть эта — «улица с односторонним движением». Условное же изображение



означает, что мощность потока в каждом направлении равна 2.

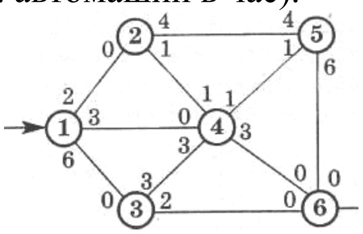
Алгоритм определения максимального потока: полагаем искомую величину максимального потока, равной нулю.

Шаг 1. Найти какой-нибудь путь от источника до стока, который образован дугами, каждая из которых имеет в направлении потока ненулевую мощность. Если такого пути нет, то оптимальное решение найдено.

Шаг 2. Найти наименьшее значение мощности дуги P_fна выбранном пути шага 1. Увеличить поток через сеть на величину P_f.

Шаг 3. На пути из шага 1 сократить на P_fмощности потоков на всех дугах в направлении потока и увеличить на P_fмощности потоков на всех дугах в обратном направлении. Перейти к шагу 1.

Пример 1. Система автодорог «Север — Юг», проходящих через Псковскую область, может обеспечить пропускные способности, показанные на приводимой ниже схеме (тыс. автомашин в час).



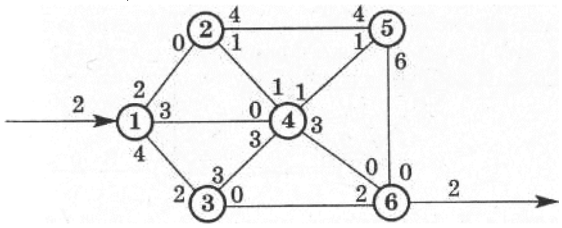
Каков максимальный поток через эту систему (тыс. автомашин в час)?

Сколько автомашин должно проехать по дороге 5–6, чтобы обеспечить максимальный поток?

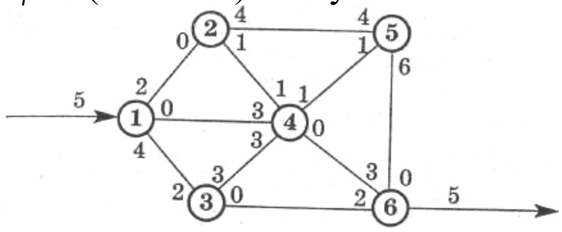
Решение.

1. Искомую величину максимального потока положим равной нулю.

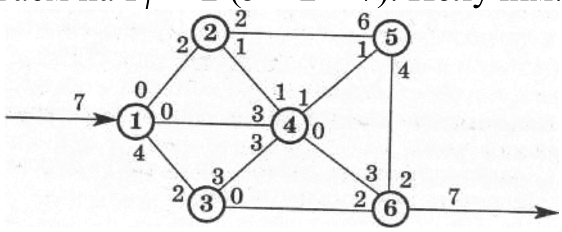
*Итерация 1.*Выбираем путь 1—3—6. $P_f = \min \{6, 2\} = 2$. Поэтому мощности потоков на пути 1—3—6 в направлении потока (а именно, 6 и 2) уменьшаем на величину $P_f= 2$, а мощности потоков в обратном направлении на пути 1—3—6 (0 и 0) увеличим на $P_f= 2$. Общий поток станет 0 + 2 = 2. Получим:



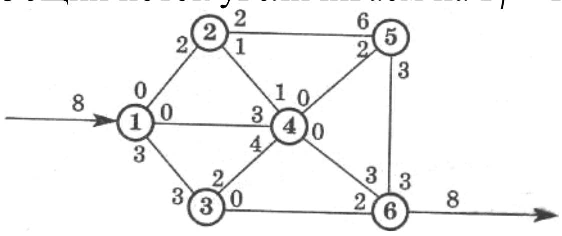
*Итерация 2.*Выбираем путь 1—4—6. P_f= min {3, 3} = 3. Все потоки на пути 1—4—6 в направлении общего потока (3 и 3) уменьшаем на P_f = 3, а все потоки на этом пути в обратном направлении (0 и 0) увеличиваем на P_f= 3. Общий поток увеличиваем на P_f= 3 (2 + 3 = 5). Получим:



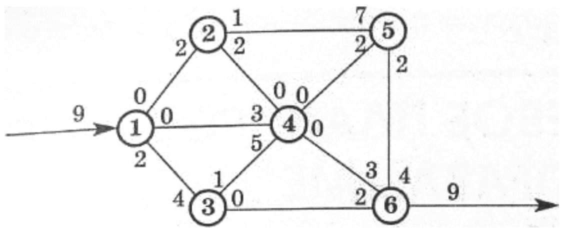
*Итерация 3.*Выбираем путь 1—2—5—6. PP_f= min {2, 4, 6} = 2. Все потоки на пути 1—2—5—6 в направлении общего потока (2, 4, 6) уменьшаем на P_f= 2, а все потоки на этом пути в обратном направлении (0, 4, 0) увеличиваем на P_f = 2. Общий поток увеличиваем на P_f = 2 (5 + 2 = 7). Получим:



*Итерация 4.*Выбираем путь 1—3—4—5—6. P_f= min {4, 3, 1, 4} = 1. Все потоки на пути 1—3—4—5—6 в направлении общего потока (4, 3, 1, 4) уменьшаем на P_f = 1, а все потоки на этом пути в обратном направлении (2, 3, 1, 2) увеличиваем на P_f= 1. Общий поток увеличиваем на P_f = 1 (7+1 = 8). Получим:



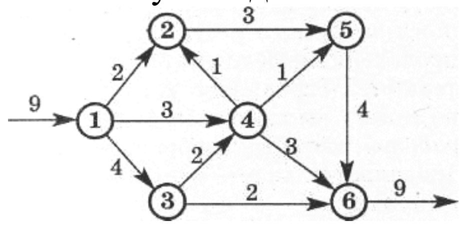
Итерация 5. Выбираем путь 1—3—4—2—5—6. P_f= min {3, 2, 1, 2, 3} = 1. Все потоки на пути 1—3—4—2—5—6 в направлении общего потока (3, 2, 1, 2, 3) уменьшаем на P_f = 1, а все потоки на этом пути в обратном направлении (3, 4, 1, 6, 3) увеличиваем на P_f = 1. Общий поток увеличиваем на P_f = 1 (8+1 = 9). Получим:



Больше не существует путей из узла 1 в узел 6 с мощностью, превышающей нуль на всем пути (P_f= 0) следовательно, 9 тыс. автомобилей – это максимальный поток через сеть.

2. Определим теперь величину и направление потока на каждой дуге, чтобы достичь максимального потока в 9 тыс. автомобилей. Поток проходит по дуге с величиной, равной разнице между первоначальной и конечной мощностями потока. Так, первоначальная мощность дуги 1–2 равна 2, а

конечная – 0, следовательно, в направлении от узла 1 к узлу 2 поток имеет мощность 2 – 0 = 2. Сравнивая конечные и начальные мощности потока для всех дуг сети, мы получаем конечную модель потоков.



Также задачу о нахождении максимального потока можно решить, используя понятие дерева.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ

Сетевая модель – графическое изображение плана выполнения комплекса работ, состоящего из нитей (работ) и узлов (событий), которые отражают логическую взаимосвязь всех операций. В основе сетевого моделирования лежит изображение планируемого комплекса работ в виде графа. ***Сетевой график*** – это ориентированный граф без контуров. В сетевом моделировании имеются два основных элемента – работа и событие.

Работа – это активный процесс, требующий затрат ресурсов, либо пассивный (ожидание), приводящий к достижению намеченного результата.

Фиктивная работа – это связь между результатами работ (событиями), не требующая затрат времени и ресурсов.

Событие – это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной или нескольких предшествующих работ.

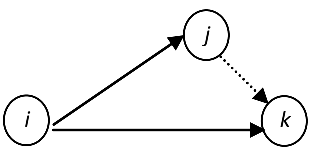
Путь – это любая непрерывная последовательность (цепь) работ и событий.

Критический путь – это путь, не имеющий резервов и включающий самые напряженные работы комплекса. Работы, расположенные на критическом пути, называются критическими. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки их выполнения, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

При построении сетевых моделей необходимо соблюдать следующие правила:

1. Сеть вычерчивается слева направо, и каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего. Общее направление стрелок, изображающих работы, также в основном должно быть расположено слева направо, при этом каждая работа должна выходить из события с меньшим номером и входить в событие с большим номером.

2. Два соседних события могут объединяться лишь одной работой. Для изображения параллельных работ вводятся промежуточное событие и фиктивная работа (рис. 9).



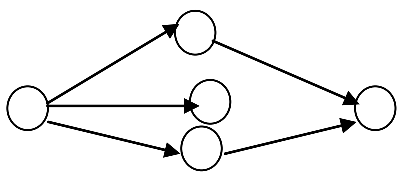


Рис. 9 Рис. 10

3. В сети не должно быть тупиков, т. е. промежуточных событий, из которых не выходит ни одна работа (рис. 10).

4. В сети не должно быть промежуточных событий, которым не предшествует хотя бы одна работа (рис. 11).

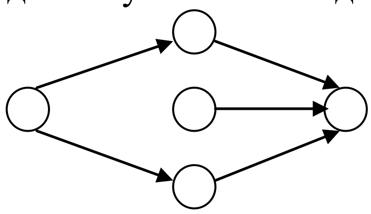


Рис. 11

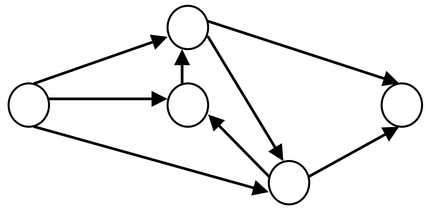


Рис. 12

5. В сети не должно быть замкнутых контуров, состоящих из взаимосвязанных работ, создающих замкнутую цепь (рис. 12).

6. Если одно событие служит началом для двух или более работ, после завершения которых начинается выполнение следующей работы, то вводится штриховая стрелка (условная зависимость) и дополнительное событие со своим номером.

7. Если какие-то работы могут начинаться до полного завершения предыдущей работы, то ее следует разбить на части и считать каждую из них самостоятельной.

Для правильной нумерации событий поступают следующим образом: нумерация событий начинается с исходного события, которому дается номер 1. Из исходного события 1 вычеркивают все исходящие из него работы, на оставшейся сети вновь находят событие, в которое не входит ни одна работа. Этому событию дается номер 2. Затем вычерчивают работы, выходящие из события 2, и вновь находят на оставшейся части сети событие, в которое не входит ни одна работа, ему присваивается номер 3, и так продолжается до завершающегособытия. Пример нумерации сетевого графика показан на рисунке 13.

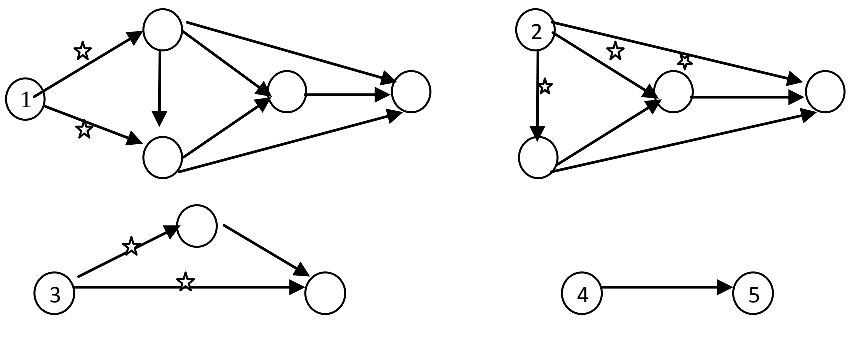


Рис. 13

Продолжительность выполнения работ устанавливается на основании действующих нормативов или по экспертным оценкам специалистов. В первом случае временные оценки являются детерминированными (однозначными), во втором – стохастическими (вероятностными).

РАСЧЕТ ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Расчет критического пути

Почти в любой сети от исходного события до завершающего ведет несколько путей. Каждому пути соответствует последовательность каких-то работ. Путь в сети от исходного события до завершающего называется ***полным путем***. Обозначается полный путь буквой L. ***Продолжительностью пути*** в сетевом графике называется время, необходимое для выполнения всех работ, лежащих на этом пути. Продолжительность полного пути обозначим $t(L)$.

Путь, имеющий наибольшую протяженность, называется ***критическим путем*** $L_{\text{кр}}$. Протяженность критического пути обозначаем $t(L_{\text{кр}})$ или $t_{\text{кр}}$.

Замечание. В сети может быть несколько критических путей.

Работы, лежащие на критическом пути, называются ***критическими***. От их продолжительности зависит общий срок завершения всех работ. Некритические работы допускают некоторое запаздывание в их выполнении, которое не задержит сроков реализации всего проекта.

Ранним сроком $t_p(j)$ ***свершения события j*** называется самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы. Счет времени ведется от момента наступления начального события. Ранний срок начального события равен 0. $t_p(0)=0$. Ранний срок любого другого j-го события определяется продолжительностью самого длительного из предшествующих путей. Определяем ранние сроки свершения событий по рекуррентному соотношению:

$$t_p(j)=\max_{i,j\in u}\{t_p(i)+t_j\}, \qquad \left(j=\overline{2,n}\right).$$

Полный срок наступления события – время, при котором планируемый срок окончания проекта не меняется. Обозначается $t_n(i)$ – для i-го события.

Замечание. Для завершающего события K поздний срок наступления совпадает с ранним, т. е. $t_p(K)=t_n(K)$.

При определении поздних сроков наступления события расчет ведут от завершающего события к исходному. Каждую вершину орграфа (событие сетевой модели) разобьем на 3 сектора: в нижнем проставляем номер события; в левом – ранний срок; в правом – поздний срок.

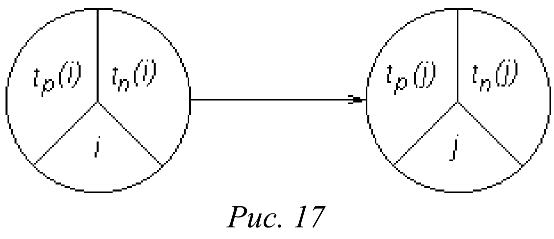


Рис. 17

Резервы времени каждого события находятся по формуле: $R_i = t_p(i) - t_n(i)$.

Замечание. Для событий i, лежащих на критическом пути, ранние и поздние сроки наступления совпадают, т. е. $t_p(i) = t_n(i)$.

Понятие ранних и поздних сроков наступления событий играют важную роль в процессе выполнения проекта. Если все события i наступают не позднее $t_n(i)$, то это значит, что проект осуществится не позднее установленного срока. Если какое-то событие i наступает позднее $t_n(i)$, то принимают меры для ускорения работ в этой части проекта. Если ускорить работу не удается, то полный срок выполнения проекта будет превышен. Время, на которое задерживаются все работы, можно тоже вычислить по сетевому графику.

Метод расчета сетевых графиков выполняется в четыре этапа:

1. Определение ранних сроков наступления событий $t_p(i)$.
2. Нахождение критического пути $L_{\text{кр}}$.
3. Определение поздних сроков наступления события $t_n(i)$.
4. Определение резерва времени R_i события.

Замечание. Использование независимого резерва времени на i-й работе, которая его имеет, не влияет на ранние и поздние сроки совершения всех событий и работ сети. Его нельзя передать ни предшествующим, ни последующим работам.

Оптимизация СМ выражается в перераспределении ресурсов с ненапряженных работ на критические для ускорения их выполнения. Для этого необходимо как можно более точно оценить степень трудности своевременного выполнения всех работ, а также всех «цепочек» пути. Более точным инструментом решения этой задачи, по сравнению с полным резервом, является ***коэффициент напряженности***. Его можно вычислить по следующим формулам:

$$K_{\text{Н}}(i, j) = \frac{t(L_{\max}) - t_{\text{кр}}}{t_{\text{кр}} - t'_{\text{кр}}} \quad \text{или}$$

$$K_{\text{Н}}(i, j) = 1 - \frac{R_n(i, j)}{t_{\text{кр}} - t'_{\text{кр}}},$$

где $t(L_{\max})$ – продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i, j);

$t'_{\text{кр}}$ – продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Коэффициент напряженности изменяется от 0 до 1. Чем ближе он к 1, тем сложнее выполнить данную работу в установленный срок. Самыми напряженными являются работы критического пути, для которых $K_{\text{Н}} = 1$.

На основе этого коэффициента все работы сетевого графика подразделяются на три группы:

1) $K_{\text{н}}(i, j) > 0,8$ – напряженные;

2) $0,6 < K_{\text{н}}(i, j) < 0,8$ – подкритические;

3) $K_{\text{н}}(i, j) < 0,6$ – резервные.

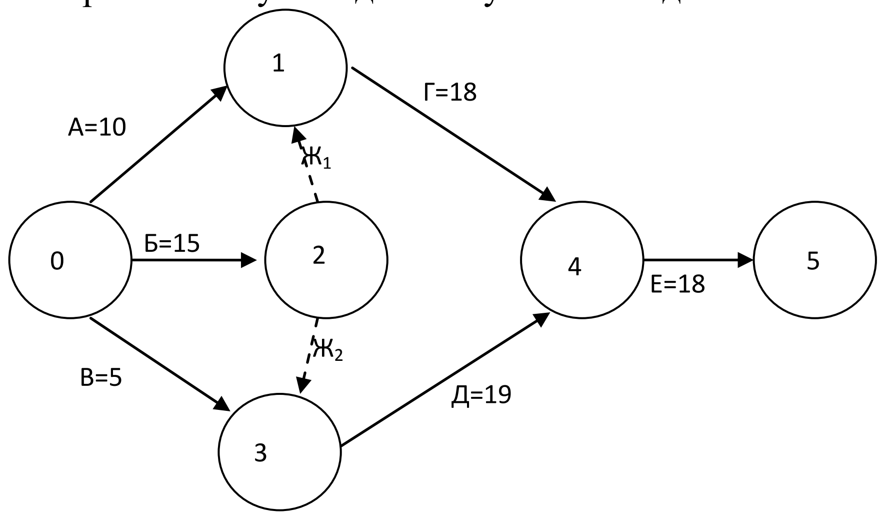
В результате перераспределения ресурсов стараются максимально уменьшить общую продолжительность работ. Для этого необходимо все работы перевести в первую группу.

Пример. Ставропольский кондитерский цех решил закупить новое оборудование. Исходные данные по основным операциям проекта представлены в таблице. Необходимо построить сетевую модель проекта, определить временные параметры модели, критический путь и проанализировать, как влияет на ход выполнения проекта задержка определенного типа оборудования на 12 часов.

Исходные данные задачи:

Название	Непосредственно предшествующие операции	Длительность, часы
Определение необходимого типа оборудования (А)	—	10
Заказ оборудования (Б)	—	15
Составление договора купли-продажи (В)	—	5
Доставка (Г)	А, Б	18
Сборка и установка (Д)	Б, В	19
Контрольная проверка (Е)	Г, Д	18

Решение. Построим сетевую модель по условию задачи.



Работы $Ж_1$ и $Ж_2$ введены для устранения параллельности работ Г и Д.

Расчет критического пути включает два этапа. Первый называется прямым проходом. Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события вычисляется одно число, представляющее ранний срок его наступления. На втором этапе, называемом обратным проходом, вычисления начинают с завершающего события и продолжают, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления.

Найдем ранние сроки наступления событий:

$t_p(1) = 0$.

$t_p(2) = \max\left\{t(1) + t(1,\ 2); t(1) + t(1,\ 3)\right\} = \max\left\{10 + 0;\ 0 + 15\right\} = 15$.

$t_p(3) = t(1) + t(1,\ 3) = 15$.

$t_p(4) = \max\left\{t_p(3);\ t(1) + t(1,\ 4)\right\} = \max\left\{5;\ 15\right\} = 15$.

$t_p(5) = \max\left\{t_p(2) + t(2,\ 5);\ t_p(4) + t(4,\ 5)\right\} = \max\left\{10 + 18;\ 15 + 19\right\} = 34$.

$t_p(6) = \max\left\{t_p(5) + t(5,\ 6)\right\} = 34 + 18 = 52$.

Найдем поздние сроки наступления событий для завершающего события $6 t_p(6) = t_n(6)$.

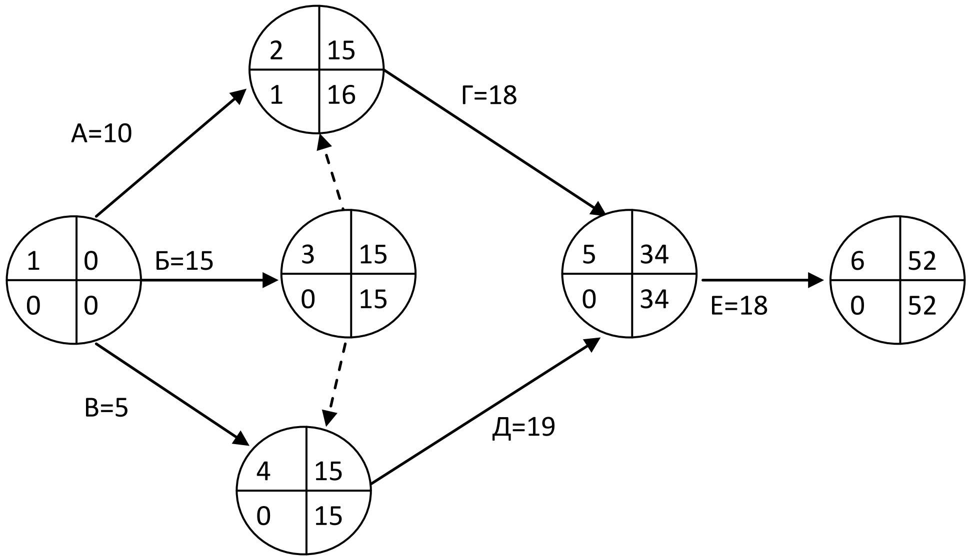
$t_n(5) = t_n(6) - t(5,\ 6) = 52 - 18 = 34$.

$t_n(4) = t_n(5) - t(4,\ 5) = 34 - 19 = 15$.

$t_n(3) = \min\left\{t_n(4);\ t_n(2)\right\} = \min\left\{15,\ 16\right\} = 15$.

$t_n(2) = t_n(5) - t(2,\ 5) = 34 - 18 = 16$.

$t_n(1) = \min\left\{t_n(2) - t(1,\ 2); t_n(3) - t(1,\ 3); t_n(4) - t(1,\ 4)\right\} = \min\left\{6;\ 0;\ 10\right\} = 0$



При поиске критических путей на сетевом графике будем использовать следующие условия его критичности:

- необходимое условие – нулевые резервы событий, лежащих на критическом пути;
- достаточное условие – нулевые полные резервы работ, лежащих на критическом пути.

Согласно необходимому условию два полных пути сетевой модели могут быть критическими: L_1=1, 3, 4, 5, 6 и L_2=1, 4, 5, 6. Проверим достаточное условие критичности для работ (1, 3) и (1, 4)

$$R_n(1,\,3) = T_{\text{п}}(3) - T_p(1) - t(1,\,3) = 15 - 0 - 15 = 0.$$
$$R_n(1,\,4) = T_{\text{п}}(4) - T_p(1) - t(1,\,4) = 15 - 0 - 5 = 10.$$

Путь L_2, начинающийся с работы (1, 4) не является критическим, так как как минимум одна (1, 4) из его работ не является критической. Работа (1, 4) имеет не нулевой полный резерв, а значит, может быть задержана с выполнением, что недопустимо для критических работ.

Таким образом, сетевая модель имеет единственный критический путь $L_{\text{кр.}}$=1, 3, 4, 5, 6, длительностью $T_{\text{кр.}}$ = 52 часа. За выполнением работ этого пути необходим особый контроль, так как любое увеличение их длительности нарушит срок выполнения проекта в целом.

Работа*A* или (1, 2) не является критической, ее полный резерв равен 1 часу. Это означает, что при задержке работы в пределах 1 часа срок выполнения проекта не будет нарушен. Поэтому, если согласно условию работа*A* задержится на 12 часов, то весь проект задержится на 11 часов.

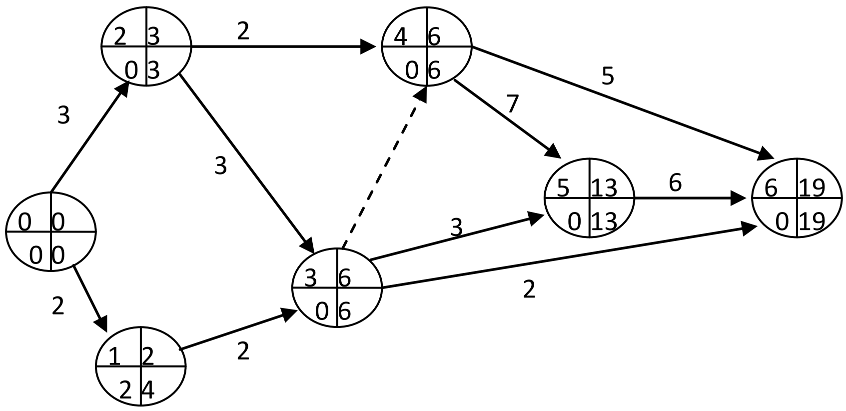
ПОСТРОЕНИЕ КАЛЕНДАРНОГО ГРАФИКА

Пример. Рассмотрим сетевую модель с исходным событием 0 и завершающим событием 6.

Операция (i, j)	Продолжи-тельность (D_{ij})	Раннее		Позднее		Полный резерв $(ПР_{ij})$	Свободный резерв $(СР_{ij})$
		начало $(T_i^{Р.Н.})$	окончание $(T_{ij}^{Р.О.})$	начало $(T_{ij}^{П.Н.})$	окончание $(T_j^{П.О.})$		
(0, 1)	2	0	2	2	4	2	0
(0, 2)*	3	0	3	0	3	0	0
(1, 3)	2	2	4	4	6	2	2
(2, 3)*	3	3	6	3	6	0	0
(2, 4)	2	3	5	4	6	1	1
(3, 4)*	0	6	6	6	6	0	0
(3, 5)	3	6	9	10	13	4	4
(3, 6)	2	6	8	17	19	11	11
(4, 5)*	7	6	13	6	13	0	0
(4, 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5, 6)*	6	13	19	13	19	0	0

Построить календарный график модели.

Решение. Данные, необходимые для построения календарного графика, приведены в таблице. Прежде всего, определяются календарные сроки выполнения критических операций. Далее рассматриваются некритические операции, и указываются их ранние сроки начала ($T^{Р.Н.}$) и поздние сроки окончания ($T^{П.О.}$).



Критические операции изображаются сплошными линиями. Отрезки времени, в пределах которых могут выполняться некритические операции, наносятся пунктирными линиями, показывающими, что календарные сроки этих операций можно выбрать в указанных пределах при условии сохранения отношений следования.

На рисунке 18 показан календарный график, соответствующий примеру. Фиктивная операция (3, 4) не требует затрат времени, поэтому показана на графике вертикальным отрезком. Числа, проставленные над некритическими операциями, соответствуют их продолжительностям.

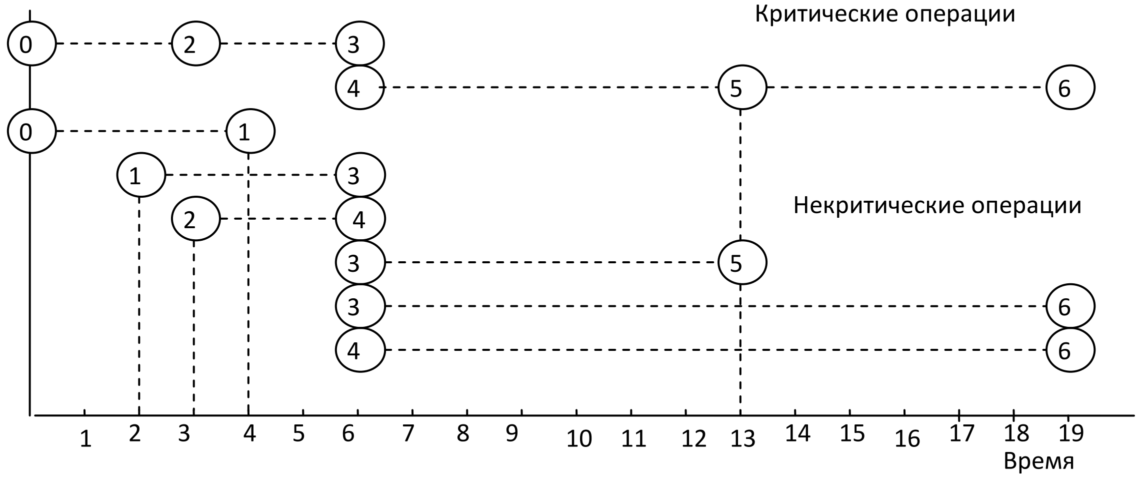


Рис. 18

Роль полных и свободных резервов времени при выборе календарных сроков выполнения некритических операций объясняется двумя общими правилами:

Правило 1. Если полный резерв равен свободному, то календарные сроки некритической операции можно выбрать в любой точке между ее ранним началом и поздним окончанием (пунктирные отрезки на рисунке 18).

Правило 2. Если свободный резерв меньше полного, то срок начала некритической операции можно сдвинуть по отношению к ее раннему сроку начала не более чем на величину свободного резерва, не влияя при этом на выбор календарных сроков непосредственно следующих операций.
В рассматриваемом примере правило 2 применимо только к операции (0, 1), а календарные сроки всех остальных операций выбираются по правилу 1.

ГРАФИК ПРИВЯЗКИ (ГРАФИК ГАНТА)

Для небольших проектов удобным дополнением к сетевому графику является ***линейный график*** (график Ганта).

Для проведения анализа временных параметров сетевой модели используют ***график привязки,*** который отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени. По вертикальной оси графика привязки откладываются коды работ, по горизонтальной оси – отрезки, соответствующие длительностям работ (раннее начало и раннее окончание работ). График привязки можно построить на основе данных о продолжительности работ. При этом необходимо помнить, что работа (i, j) может выполняться только после того, как будут выполнены все предшествующие ей работы (k, i).

При поиске критических путей следует помнить, что признаком критической работы являются нулевые значения резервов времени. Это означает, что каждая последующая критическая работа будет начинаться строго в момент окончанияпредыдущей критической работы. Вследствие этого сдвиг любой из работ критического пути обязательно приведет к увеличению первоначальной длительности проекта ($Т_{кр}$). Кроме того, следует учесть, что критический путь является полным, т. е. соединяет исходное и завершающее события сети. Поэтому на графике привязки первая из работ критического пути всегда начинается в исходном событии сети с нулевого (начального) момента времени, а последняя из работ критического пути всегда завершается позже всех остальных работ сети в завершающем событии.

Из вышеприведенных соображений следует способ определения критического пути на графике привязки (все найденные работы выписываются последовательно справа налево):

1) найти на графике привязки и выписать работу (i, j), которая заканчивается позже всех остальных. Это будет последняя работа критического пути (ее конечное событие имеет номер завершающего события сети);

2) из всех работ сети (k, i), конечное событие которых i совпадает с начальным событием i работы (i, j), найденной в п. 1, выбрать и выписать ту, которая на графике вплотную примыкает к работе (i, j);

3) из всех работ сети (l, k), конечное событие которых k совпадает с начальным событием k работы (k, i), найденной в п. 2, выбрать и выписать ту, которая на графике вплотную примыкает к работе (k, i);

4) продолжать п. 3 до тех пор, пока не будет найдена исходная работа сети, т. е. начинающаяся в нулевой момент времени (ее начальное событие будет иметь номер исходного события сети, например, 1).

Следует заметить, что если в сетевой модели несколько критических путей, то, выполняя вышеописанные действия, можно обнаружить несколько работ, удовлетворяющих сформулированным требованиям. В таком случае необходимо продолжать поиск по каждой из таких работ в отдельности. В сложных сетевых моделях подобные разветвления могут привести к большим затратам времени на поиск критических путей. Тем не менее, такой способ хорош для учебных целей, поскольку дает понимание значения критических работ в сетевой модели и учит «читать» и понимать график привязки.

Системы массового обслуживания

Основы теории массового обслуживания

Теория массового обслуживания составляет один из разделов теории вероятностей. В данном разделе рассматриваются **вероятностные** задачи и математические модели.

Детерминированная математическая модель отражает поведение объекта (системы, процесса) с позиций **полной определенности** в настоящем и будущем.

Вероятностная математическая модель учитывает влияние случайных факторов на поведение объекта (системы, процесса) и, следовательно, оценивает будущее с позиций вероятности тех или иных событий, то есть задачи рассматриваются **в условияхнеопределенности**.

Рассмотрим сначала некоторые понятия, которые характеризуют **стохастическую неопределенность**, когда неопределенные факторы, входящие в задачу, представляют собой случайные величины (или случайные функции), вероятностные характеристики которых либо известны, либо могут быть получены из опыта. Такую неопределенность называют еще благоприятной, доброкачественной.

Понятие случайного процесса

Случайные возмущения присущи любому процессу. Проще привести примеры случайного, чем неслучайного процесса. Например, процесс хода часов (вроде бы это строгая выверенная работа – «работает как часы») подвержен случайным изменениям (уход вперед, отставание, остановка). Но до тех пор, пока эти возмущения несущественны, мало влияют на интересующие нас параметры, мы можем ими пренебречь и рассматривать процесс как детерминированный, неслучайный.

Пусть имеется некоторая система S (техническое устройство, группа таких устройств, технологическая система – станок, участок, цех, предприятие, отрасль промышленности и т.д.). В системе S протекает **случайный процесс**, если она с течением времени меняет свое состояние (переходит из одного состояния в другое), причем, заранее неизвестным случайным образом. Например:Система S – самолет, совершающий рейс на заданной высоте по определенному маршруту. Возмущающие факторы – метеоусловия, ошибки экипажа и т.д., последствия – «болтанка», нарушение графика полетов и т.д.

Марковский случайный процесс

Случайный процесс, протекающий в системе, называется **Марковским**, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Пусть в настоящий момент t_0 система находится в определенном состоянии S_0. Мы знаем характеристики состояния системы в настоящем

$t_0 \to S_0$ и все, что было при $t<t_0$ (предысторию процесса). Можем ли мы предугадать (предсказать) будущее, т.е. что будет при $t>t_0$? В точности – нет, но какие-то вероятностные характеристики процесса в будущем найти можно. Например, вероятность того, что через некоторое время τ система S окажется в состоянии S_1 или останется в состоянии S_0 и т.д.

Например, система S – группа студентов, участвующих в спортивной ходьбе. Пусть x – количество студентов экономического факультета, y – количество студентов юридического факультета. К моменту времени t_0 количество оставшихся на дистанции студентов соответственно – x_0, y_0. Нас интересует вероятность того, что в момент времени $(t_0+\tau)$ численный перевес будет на стороне студентов экономического факультета. Эта вероятность зависит от того, в каком состоянии находилась система в момент времени t_0, а не от того, когда и в какой последовательности сходили с дистанции до момента t_0 студенты.

На практике Марковские процессы в чистом виде обычно не встречаются. Но имеются процессы, для которых влиянием «предыстории» можно пренебречь. И при изучении таких процессов можно применять Марковские модели (в теории массового обслуживания рассматриваются и не Марковские системы массового обслуживания, но математический аппарат, их описывающий, гораздо сложнее).

В исследовании операций большое значение имеют Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Процесс называется **процессом с дискретным состоянием**, если его возможные состояния S_1, S_2, … можно заранее определить, и переход системы из состояния в состояние происходит скачком, практически мгновенно.

Процесс называется **процессом с непрерывным временем**, если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а неопределенны, случайны и могут произойти в любой момент.

Рассмотрим только процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем.

Например, финансово-расчетная система S состоит из двух банкоматов, каждый из которых в случайный момент времени может отказать в выдачи наличных денег, после чего начинается выяснение причины подобного отказа, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время. Возможны следующие состояния системы:

S_0 - оба банкомата исправно выдают деньги;

S_1 - первый банкомат ремонтируется, второй исправен;

S_2 - второй банкомат ремонтируется, первый исправен;

S_3 - оба банкомата ремонтируются.

Переходы системы S из состояния в состояние происходят практически мгновенно, в случайные моменты выхода из строя того или иного банкомата или окончания ремонта.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой – **графом состояний**. Вершины графа –

состояния системы. Дуги графа – возможные переходы из состояния в состояние. Для нашего примера граф состояний приведен на рис.1.

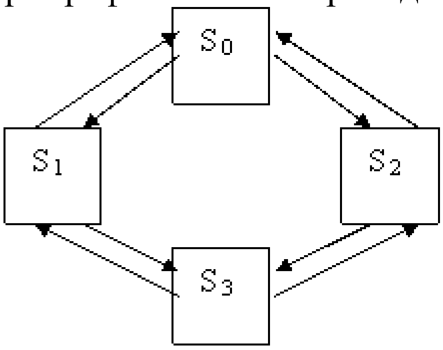


Рис.1. Граф состояний системы

Переход из состояния S_0 в S_3 на рисунке не обозначен, т.к. предполагается, что банкоматы выходят из строя независимо друг от друга. Вероятностью одновременного выхода из строя обоих банкоматов мы пренебрегаем.

Потоки событий

Поток событий – последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени, например, поток вызовов на телефонной станции, поток покупателей в магазине и т.д.

Поток событий можно наглядно изобразить рядом точек на оси времени *Ot* – рис. 2.

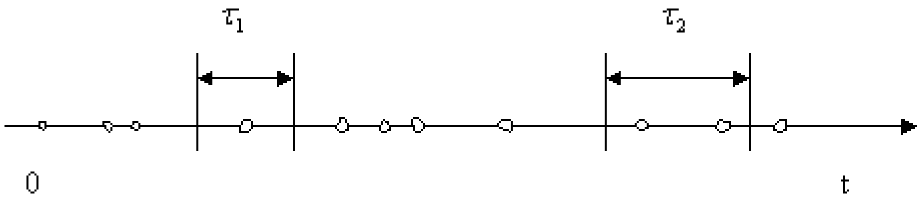


Рис.2. Изображение потока событий на оси времени

Положение каждой точки случайно, и здесь изображена лишь какая-то одна реализация потока.

Интенсивность потока событий (λ) – это среднее число событий, приходящееся на единицу времени.

Рассмотрим некоторые виды потоков событий.

Поток событий называется **стационарным**, если его вероятностные характеристики не зависят от времени.

В частности, интенсивность λ стационарного потока постоянна. Поток событий неизбежно имеет сгущения или разрежения, но они не носят закономерного характера, и среднее число событий, приходящееся на единицу времени постоянно, и от времени не зависит.

Поток событий называется **потоком без последствий**, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 (рис.2) число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой. Это означает, что события, образующие поток, появляются в те или иные моменты времени независимо друг от другаи вызваны каждое своими собственными причинами.

Поток событий называется **ординарным**, если события в нем появляются поодиночке, а не группами по нескольку сразу.

Поток событий называется **простейшим (или стационарным пуассоновским),** если он обладает сразу тремя свойствами: 1) стационарен, 2) ординарен, 3) не имеет последствий.

Простейший поток имеет наиболее простое математическое описание. Он играет среди потоков такую же особую роль, как и закон нормального распределения среди других законов распределения. А именно, при наложении достаточно большого числа независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивности) получается поток, близкий к простейшему.

Для простейшего потока с интенсивностью λ интервал *T* между соседними событиями имеет так называемое **показательное (экспоненциальное) распределение** с плотностью

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad (1)$$

где λ - параметр показательного закона.

Для случайной величины *T*, имеющей показательное распределение, математическое ожидание m_T есть величина, обратная параметру, а среднее квадратичное отклонение σ_T равно математическому ожиданию

$$m_T = \sigma_T = 1/\lambda. \qquad (2)$$

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Финальные вероятности состояний

Рассматривая Марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, подразумевается, что все переходы системы *S* из состояния в состояние происходят под действием простейших потоков событий (потоков вызовов, потоков отказов, потоков восстановлений и т.д.). Если все потоки событий, переводящие систему *S* из состояния в состояние простейшие, то процесс, протекающий в системе, будет Марковским.

Итак, на систему, находящуюся в состоянии S_i, действует простейший поток событий. Как только появится первое событие этого потока, происходит переход системы из состояния S_i в состояние S_j (на графе состояний по стрелке $S_i \to S_j$).

Для наглядности на графе состояний системы у каждой дуги проставляют интенсивности того потока событий, который переводит систему по данной дуге (стрелке). λ_{ij} - интенсивность потока событий, переводящий систему из состояния S_i в S_j. Такой граф называется **размеченным**. Для нашего примера размеченный граф приведен на рис.3.

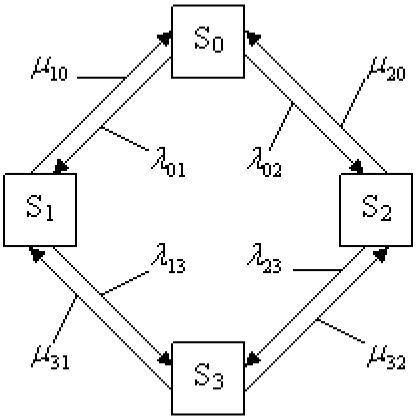


Рис.3. Размеченный граф состояний системы

Предполагаем, что среднее время ремонта банкомата не зависит от того, ремонтируется ли один банкомат или оба сразу. Т.е. ремонтом каждого банкомата занят отдельный специалист.

Пусть система находится в состоянии S_0. В состояние S_1 ее переводит поток отказов первого банкомата. Его интенсивность равна

$$\lambda_{01} = 1 / T_{ср.раб.1}, ед.времени^{-1}, \quad (3)$$

где $T_{ср.раб.1}$ - среднее время безотказной работы первого станка.

Из состояния S_1 в S_0 систему переводит поток «окончаний ремонтов» первого банкомата. Его интенсивность равна

$$\mu_{10} = 1 / T_{ср.рем.1}, ед.времени^{-1}, \quad (4)$$

где $T_{ср.рем.1}$ - среднее время ремонта первого станка.

Аналогично вычисляются интенсивности потоков событий, переводящих систему по всем дугам графа. Имея в своем распоряжении размеченный граф состояний системы, строится математическая модель данного процесса.

Пусть рассматриваемая система S имеет n- возможных состояний $S_1, S_2, ..., S_n$. Вероятность i- го состояния $p_i(t)$- это вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента времени сумма всех вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1. \quad (5)$$

Для нахождения всех вероятностей состояний $p_i(t)$ как функций времени составляются и решаются уравнения Колмогорова – особого вида уравнения, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний. Для того, чтобы привести это уравнение, объясним понятие предельной вероятности состояния, ответив на вопросы: что будет происходить с вероятностями состояний при $t \to \infty$ и будут ли $p_1(t), p_2(t), ...$ стремиться к каким-либо пределам?

Если эти пределы существуют и не зависят от начального состояния системы, то они называются **предельными вероятностями состояний**.

$\lim\limits_{t \to \infty} p_i(t) = p_i, i = \overline{1,n},$ где n - конечное число состояний системы.

Предельные вероятности состояний – это уже не переменные величины (функции времени), а постоянные числа. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Предельная вероятность состояния S_i – это, по – существу, среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии.

Например, система *S* имеет три состояния S_1, S_2 и S_3. Их финальные вероятности равны соответственно 0,2; 0,3 и 0,5. Это значит, что система в предельном стационарном состоянии в среднем 2/10 времени проводит в состоянии S_1, 3/10 – в состоянии S_2 и 5/10 – в состоянии S_3.

Правило составления системы уравнений Колмогорова: в каждом уравнении системы в левой его части стоит финальная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а в правой егочасти– сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i- е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

Пользуясь этим правилом, напишем систему уравнений по рис. 3:

$$\begin{cases}(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0 = \mu_{10}p_1 + \mu_{20}p_2 \\ (\mu_{10}+\lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \mu_{31}p_3 \\ (\mu_{20}+\lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \mu_{32}p_3 \\ (\mu_{31}+\mu_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2\end{cases}$$

Эту систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными p_0, p_1, p_2, p_3, казалось бы, можно вполне решить. Но эти уравнения однородны (не имеют свободного члена), и, значит, определяют неизвестные только с точностью до произвольного множителя. Однако можно воспользоваться нормировочным условием $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$ и, с его помощью, решить систему. При этом одно из уравнений можно отбросить, т.к. оно является следствием остальных.

Таким образом, пусть значения интенсивностей потоков равны:

$\lambda_{01} = \lambda_{23} = 1; \lambda_{13} = \lambda_{02} = 2; \mu_{10} = \mu_{32} = 2; \mu_{20} = \mu_{31} = 3$.

Четвертое уравнение отбрасываем, добавляя вместо него нормировочное условие:

$$\begin{cases}3p_0 = 2p_1 + 3p_2 \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3 \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1\end{cases}$$

$p_0 = 6/15 = 0{,}4; p_1 = 3/15 = 0{,}2; p_2 = 4/15 \cong 0{,}27; p_3 = 2/15 \cong 0{,}13$.

Т.е. в предельном, стационарном режиме система *S* в среднем 40 % времени будет проводить в состоянии S_0 (оба банкомата исправны), 20 % - в состоянии S_1 (первый банкомат ремонтируется, второй работает), 27 % - в состоянии S_2 (второй банкомат ремонтируется, первый работает), 13% - в состоянии S_3 (оба банкомата ремонтируются). Знание этих финальных вероятностей может помочь оценить среднюю эффективность работы системы и загрузку ремонтных органов.

Пусть система S в состоянии S_0 (полностью исправна) приносит в единицу времени доход 8 усл. ден. ед., в состоянии S_1 – доход 3 усл. ден. ед., в состоянии S_2 – доход 5 усл. ден. ед., в состоянии S_3 – не приносит дохода. Тогда в предельном, стационарном режиме средний доход в единицу времени будет равен $W = 0,4*8 + 0,2*3 + 0,27*5 = 5,15$ условных единиц.

Банкомат 1 ремонтируется долю времени, равную $p_1 + p_3 = 0,2 + 0,13 = 0,33$. Банкомат 2 ремонтируется долю времени, равную $p_2 + p_3 = 0,27 + 0,13 = 0,4$. Подобно анализу модели на чувствительность в задачах линейного программирования, рассматриваемую задачу можно привести к оптимизационной модели. Например, уменьшим среднее время ремонта первого или второго банкомата (или обоих). Это приведет к дополнительным расходам. Возникает вопрос, окупит ли увеличение дохода, связанное с ускорением ремонта, повышенные расходы на ремонт?

Задачи теории массового обслуживания

Примерами систем массового обслуживания (СМО) могут являться: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, станочные и другие технологические системы, системы управления гибких производственных систем и т.д.

Каждая СМО состоит из какого – то количества обслуживающих единиц, которые называются **каналами обслуживания** (это станки, транспортные тележки, роботы, линии связи, кассиры, продавцы и т.д.). Всякая СМО предназначена для обслуживания какого – то **потока заявок** (требований), поступающих в какие – то случайные моменты времени.

Обслуживание заявки продолжается какое – то случайное время, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что в какие – то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое количество заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными). В другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Процесс работы СМО – случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких - то событий (прихода новой заявки, окончания обслуживания, момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь).

Предмет теории массового обслуживания – построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими нас характеристиками – показателями эффективности СМО. Эти показатели описывают способность СМО справляться с потоком заявок. Ими могут быть: среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени; среднее число занятых каналов; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания и т.д.

Математический анализ работы СМО очень облегчается, если процесс этой работы Марковский, т.е. потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние – простейшие. Иначе математическое описание процесса очень усложняется и его редко удается довести до конкретных аналитических зависимостей. На практике не Марковские процессы с приближением приводятся к Марковским.

Классификация систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания можно классифицировать следующим образом:

Первый класс деления (по наличию очередей):

1. СМО с отказами;
2. СМО с очередью.

В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем не обслуживается.

В СМО с очередью заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной.

СМО с очередями подразделяются на разные виды в зависимости от того, как организована очередь – ограничена или не ограничена. Ограничения могут касаться как длины очереди, так и времени ожидания, «дисциплины обслуживания».

Итак, например, рассматриваются следующие СМО:

- СМО с нетерпеливыми заявками (длина очереди и время обслуживания ограничено);
- СМО с обслуживанием с приоритетом, т.е. некоторые заявки обслуживаются вне очереди и т.д.

Кроме этого СМО делятся на открытые СМО и замкнутые СМО.

Воткрытой СМО характеристики потока заявок не зависят от того, в каком состоянии сама СМО (сколько каналов занято). **В замкнутой СМО** – зависят. Например, если один рабочий обслуживает группу станков, время от времени требующих наладки, то интенсивность потока «требований» со стороны станков зависит от того, сколько их уже исправно и ждет наладки.

Классификация СМО далеко не ограничивается приведенными разновидностями, но этого достаточно.

Математические модели простейших систем массового обслуживания

Рассмотрим примеры простейших систем массового обслуживания (СМО). Понятие «простейшие» не означает «элементарные». Математические модели этих систем применимы и успешно используются в практических расчетах.

а) Одноканальная СМО

Рассматриваемая модель одноканальной системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком заявок и экспоненциальным временем обслуживания.

Наиболее часто встречаются задачи массового обслуживания с единственным каналом. В этом случае клиенты формируют одну очередь к единственному пункту обслуживания. Предположим, что для систем этого типа выполняются следующие условия:

1. Заявки выполняются по принципу «первым пришел – первым обслужен», причем каждый клиент ожидает своей очереди до конца независимо от длины очереди.
2. Появления заявок являются независимыми событиями, однако среднее число заявок, поступающих в единицу времени, неизменно.
3. Процесс поступления заявок описывается пуассоновским распределением, причем заявки поступают из неограниченного множества.
4. Время обслуживания описывается экспоненциальным распределением вероятностей.
5. Темп обслуживания выше темпа поступления заявок.

Пусть λ - число заявок в единицу времени.

μ - число клиентов, обслуживаемых в единицу времени,

n – число заявок в системе.

Тогда система массового обслуживания описывается уравнениями, приведенными ниже.

$L_s = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$ - среднее число клиентов в системе;

$\mathrm{W_s} = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$ - среднее время обслуживания одного клиента в системе (время ожидания плюс время обслуживания)

$L_q = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$ - среднее число клиентов в очереди;

$W_q = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$ - среднее время ожидания клиента в очереди;

$r = \dfrac{\lambda}{\mu}$ - характеристика загруженности системы (доля времени, в течение которого системы занята обслуживанием);

$P_0 = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu}$ - вероятность отсутствия заявок в системе (вероятность простоя);

$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$ - вероятность того, что в системе находится более чем k заявок.

СМО с отказами

а) Одноканальная СМО с отказами

Рассматриваемая система имеет один канал обслуживания, на который поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Заявка, заставшая систему занятой, сразу же покидает ее. Необходимо найти абсолютную и относительную пропускную способность СМО и вероятность того, что заявка, пришедшая в момент времени t, получит отказ.

Система при любом $t > 0$ может находиться в двух состояниях: S_0 – канал свободен; S_1 – канал занят. Переход из S_0 в S_1 связан с появлением заявки и немедленным началом ее обслуживания. Переход из S_1 в S_0 осуществляется, как только очередное обслуживание завершится.

Выходные характеристики (характеристики эффективности) этой и других СМО будут даваться без выводов и доказательств.

Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени):

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \quad (\text{шт/ед. времени}),$$

где λ – интенсивность потока заявок; μ – интенсивность потока обслуживаний.

Относительная пропускная способность (средняя доля заявок, обслуживаемых системой):

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Вероятность отказа (вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной):

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Очевидны следующие соотношения: $Q = 1 - P_{\text{отк}}$ и $P_{\text{отк}} = 1 - Q$.

Пример. Технологическая система состоит из одного станка. На станок поступают заявки на изготовление деталей в среднем через 0,5 часа. Среднее время $(t_{\text{обс}})$ изготовления одной детали равно 0,6 час. Если при поступлении заявки на изготовление детали станок занят, то она (деталь) направляется на другой станок. Найти абсолютную и относительную пропускную способности системы и вероятность отказа по изготовлению детали.

Решение.

$$\lambda = \frac{1}{t} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ ч}^{-1}, \ \mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}} = \frac{1}{0,6} \approx 1,67 \text{ ч}^{-1}.$$

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} = \frac{2\cdot 1,67}{2+1,67} = 0,91 \ (\text{шт/ч}),$$

$$Q = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1,67}{2+1,67} = 0,455 \approx 0,46 \ (\text{шт/ч}).$$

То есть в среднем примерно 46 % деталей обрабатываются на этом станке.

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{2}{2+1,67} \approx 0,54.$$

То есть в среднем примерно 54 % деталей направляются на обработку на другие станки.

б) N – канальная СМО с отказами (задача Эрланга)

Это одна из первых задач теории массового обслуживания. Она возникла из практических нужд телефонии и была решена в начале 20 века датским математиком Эрлангом.

В системе имеется *n* – каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Заявка, заставшая систему занятой, сразу же покидает ее. Необходимо найти абсолютную и относительную пропускную способность СМО; вероятность того, что заявка, пришедшая в момент времени *t*, получит отказ; среднее число заявок, обслуживаемых одновременно (или, другими словами, среднее число занятых каналов).

Состояние системы *S* (СМО) нумеруется по максимальному числу заявок, находящихся в системе (оно совпадает с числом занятых каналов):

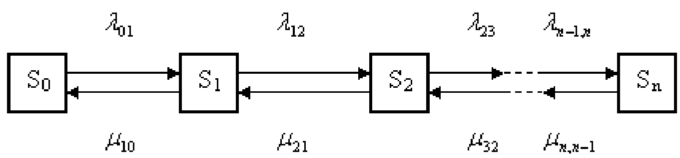
- S_0 – в СМО нет ни одной заявки;
- S_1 – в СМО находится одна заявка (один канал занят, остальные свободны);
- S_2 – в СМО находится две заявки (два канала заняты, остальные свободны);
- . . .
- S_n – в СМО находится *n* – заявок (все *n* – каналов заняты).

Абсолютнаяпропускнаяспособность:

$$A = \lambda\left(1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!}\right) \ (\text{шт/ед. времени}),$$

где *n* – количество каналов СМО; p_0 – вероятность нахождения СМО в начальном состоянии, когда все каналы свободны (финальная вероятность нахождения СМО в состоянии S_0).

Для того чтобы написать формулу для определения p_0, рассмотрим рис. 1.



Граф состояний для схемы «гибели и размножения»

Граф, представленный на этом рисунке, называют еще графом состояний для схемы «гибели и размножения». Напишем сначала для p_0 общую формулу (без доказательства):

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\mu_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\mu_{21}\mu_{10}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\mu_{32}\mu_{21}\mu_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n} \times \ldots \times \lambda_{12}\lambda_{01}}{\mu_{n,n-1} \times \ldots \times \mu_{21}\mu_{10}}\right)^{-1}.$$

Кстати, остальные финальные вероятности состояний СМО запишутся следующим образом:

1) Вероятность того, что СМО находится в состоянии S_1, когда *один канал занят*:

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\mu_{10}} p_0.$$

2) Вероятность того, что СМО находится в состоянии S_2, т. е. когда *два канала заняты*:

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} p_1 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\mu_{21}\mu_{10}} p_0.$$

3) Вероятность того, что СМО находится в состоянии S_n, т. е. когда *все каналы заняты*:

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \times \ldots \times \lambda_{12}\lambda_{01}}{\mu_{n,n-1} \times \ldots \times \mu_{21}\mu_{10}} p_0.$$

Теперь для n-канальной СМО с отказами

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2 \cdot \mu^2} + \frac{\lambda^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mu^3} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n! \cdot \mu^n}\right)^{-1}.$$

При этом $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$, $p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0$, $p_n = \frac{\lambda^n}{n! \cdot \mu^n} p_0$.

Относительная пропускная способность: $Q = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!}$ – средняя доля заявок, обслуживаемых системой. При этом $A = \lambda Q$, где $Q = 1 - P_{\text{отк}}$.

Вероятностьотказа: $P_{\text{отк}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!}$ – вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной. Очевидно, что $P_{\text{отк}} = 1 - Q$.

Среднее число занятых каналов (среднее число заявок, обслуживаемых одновременно):

$$k_{\text{ср}} = \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!}\right).$$

При этом $k_{\text{ср}} = \dfrac{\lambda}{\mu} Q$

Системы массового обслуживания с неограниченным ожиданием

Заявка, поступившая в систему с неограниченным ожиданием и нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, ожидая освобождения одного из каналов.

Основной характеристикой качества обслуживания является время ожидания (время пребывания заявки в очереди).

Для таких систем характерно отсутствие отказа в обслуживании, т. е. $P_{\text{отк}} = 0$ и $P_{\text{обс}} = 1$.

Для систем с ожиданием существует дисциплина очереди:

1. Обслуживание в порядке очереди по принципу «первым пришел – первым обслужен».
2. Случайное неорганизованное обслуживание по принципу «последний пришел – первым обслужен».
3. Обслуживание с приоритетами по принципу «самые главные вне очереди».

По ниже написанным формулам можно вычислить СМО с неограниченным ожиданием:

1. Вероятность простоя каналов, когда нет заявок ($k = 0$):
$P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}} + \dfrac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}$. Предполагается, что $\dfrac{\rho}{n} < 1$.
2. Вероятность занятости обслуживанием k заявок: $P_k = \dfrac{\rho^k P_0}{k!}$, $1 \le k \le n$.
3. Вероятность занятости обслуживанием всех каналов: $P_n = \dfrac{\rho^n P_0}{n!}$.
4. Вероятность того, что заявка окажется в очереди: $P_{\text{оч}} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0$.
5. Среднее число заявок в очереди: $\overline{L}_{\text{оч}} = \dfrac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} P_0$.
6. Среднее время ожидания заявки в очереди: $\overline{t}_{\text{оч}} = \dfrac{\overline{L}_{\text{оч}}}{\lambda}$.
7. Среднее время пребывания заявки в СМО: $\overline{t}_{\text{смо}} = \overline{t}_{\text{оч}} + \overline{t}_{\text{обс}}$.
8. Среднее число занятых обслуживанием каналов: $\overline{n}_з = \rho$.
9. Среднее число свободных каналов: $\overline{n}_{\text{св}} = n - \overline{n}_з$.
10. Коэффициент занятости каналов обслуживания: $k_з = \dfrac{\overline{n}_з}{n}$.

Среднее число заявок в СМО: $\overline{Z} = \overline{L}_{\text{оч}} + \overline{n}_з$.

СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди

Заявка, поступившая в систему с ожиданием с ограниченной длиной очереди и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему необслуженной.

Основной характеристикой качества системы является отказ заявке в обслуживании.

Ограничения на длину очереди могут быть:

1. из-за ограничения сверху времени пребывания заявки в очереди;
2. ограничения сверху длины очереди;
3. ограничения общего времени пребывания заявки в системе.

По ниже написанным формулам можно рассчитать СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди:

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($k = 0$):

$$P_0 = \frac{1}{\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left[1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]\right\}}.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании: $P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} P_0$.
3. Вероятность обслуживания: $P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}$.
4. Абсолютная пропускная способность: $A = P_{\text{обс}} \cdot \lambda$.
5. Среднее число занятых каналов: $\bar{n}_з = \frac{A}{\mu}$.
6. Среднее число заявок в очереди: $\bar{L}_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m+1-\frac{m\rho}{n}\right)}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2} P_0$.
7. Среднее время ожидания обслуживания: $\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{L}_{\text{оч}}}{\lambda}$.
8. Среднее число заявок в системе: $\bar{Z} = \bar{L}_{\text{оч}} + \bar{n}_з$.

Среднее время пребывания в системе: $\bar{t}_{\text{смо}} = \frac{\bar{Z}}{\lambda}$.

Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием

Пусть простейший поток заявок на обслуживание – простейший поток с интенсивностью λ.

Интенсивность потока обслуживания равна μ. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания. Предположим, что СМО не может вместить более N заявок, т. е. заявки, не попавшие в ожидание, покидают СМО. Состояния СМО имеют следующий вид:

S_0 – канал свободен;

S_1 – канал занят, очереди нет;

S_2 – канал занят, одна заявка в очереди;

……………………………………………

S_n – канал занят, n – 1 заявка в очереди;

……………………………………………

S_N – канал занят, N – 1 заявка в очереди.

Процесс в данной системе будет описан системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\rho P_0 + P_1 = 0, \quad n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1-\rho P_n + P_{n-1} + \rho P_{n-1} = 0,\ 0 < n < N, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -P_n + \rho P_{n-1} = 0,\ \ n = N, \end{cases}$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$; n – номер состояния.

Система уравнений имеет следующее решение:

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{(N+1)}}, \\ P_n = P_0\rho^n,\ \rho \neq 1, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N \\ P_n = \dfrac{1}{N+1} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \end{cases}$$

Выполнение условия $\rho < 1$ необязательно, поскольку число допускаемых в СМО заявок контролируется путем введения ограничения на длину очереди.

Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной (N – 1):

1. Вероятность отказа обслуживания заявки: $P_{\text{отк}} = P_N$.
2. Относительная пропускная способность СМО: $q = 1 - P_{\text{отк}}$.
3. Абсолютная пропускная способность СМО: $A = q\lambda$.
4. Среднее число находящихся в СМО заявок: $L_s = \sum_{n=0}^{N} nP_n$.
5. Среднее время пребывания заявки в СМО: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda(1-P_N)}$.

6. Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди: $W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$.

Среднее число заявок в очереди: $L_q = \lambda(1 - P_N)W_q$.