ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Симоновский А.Я.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Б1.В.03 Прикладная математика

Шифр и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

35.03.06 Агроинженерия

Шифр и наименование направления подготовки

Технические системы в агробизнесе

наименование профиля

Программа академического бакалавриата

Ориентация ОП ВО в зависимости от вида(ов) профессиональной деятельности

Бакалавр

Квалификация выпускника

Очная, заочная

Форма обучения

Ставрополь, 2019

Методические указания для студентов по выполнению практических и лабораторных работ по дисциплине входят в серию методических разработок, призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по основным разделам курса математики. Подробно описывается теоретический материал по каждой теме и приводится решение типовых примеров.

1 Матрицы. Основные понятия и определения

Определение 1. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i - номер строки, j - номер столбца.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи,

$$A = \left(a_{ij}\right); \quad i = 1,2,\dots,m; \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Например, $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$. Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: $[\ ]$, $\|\ \|$.

Две матрицы A и B одного размера называются **равными,** если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1,2,\dots m;\quad j = 1,2,\dots,n$.

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой (вектором-строкой),** а из одного столбца – **матрицей–столбцом (вектором-столбцом):**

$$A = (a_{11}\ a_{12}, \ldots, a_{1n}) - \text{матрица-строка}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} - \text{матрица-столбец.}$$

Матрица называется **квадратной** n-го порядка, если число её строк равно числу столбцов и равно n.

Например, $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i = j)$, называются **диагональными** и образуют **главную диагональ** матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется **диагональной.**

Например, $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной** матрицей n-го порядка, она обозначается буквой E.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется **нулевой**, если все её элементы равны нулю:

$$\underset{m \times n}{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

2 Операции над матрицами. Умножение матрицы на число

Определение 1. Произведением матрицы A на число α называется матрица $B = \alpha A$, элементы которой $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ при $i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = \mathrm{O}$.

Определение 2. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ при $i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно). В частном случае $A + \mathrm{O} = A$.

Определение 3. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Определение 4. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда произведением матриц $\underset{m \times k}{A} \cdot \underset{k \times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m \times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Определение 5. Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е.:

$$A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0 = E, \quad A^1 = A$. Нетрудно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}, \quad (A^m)^k = A^{mk}$.

Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется **транспонированной** относительно матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица A' имеет размер $n \times m$.

Например, $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad A'_{3\times2} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$

В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например $A^{т}$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Умножить матрицу на число 5, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 8\end{pmatrix}$.

$$5A=\begin{pmatrix}-10 & 20\\ 15 & 40\end{pmatrix}$$

Пример 2. Вынести общий множитель за знак матрицы:

$$\begin{pmatrix}20 & 12 & 6\\ 52 & 2 & 0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}10 & 6 & 3\\ 26 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти матрицу C=A+B, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 6 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -4\\ 8 & 10 & 7\end{pmatrix}.$$

Пример 4. Вычислить произведение матриц $A\cdot B$,

где $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & 4 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times3}{B}=\underset{2\times3}{C}$. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$\tilde{N}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot3+0\cdot5+2\cdot(-2) & (-1)\cdot0+0\cdot4+2\cdot0 & (-1)\cdot1+0\cdot4+2\cdot1\\ 3\cdot3+4\cdot5+0\cdot(-2) & 3\cdot0+4\cdot4+0\cdot0 & 3\cdot1+4\cdot4+0\cdot1\end{pmatrix}.$$

Получаем $C=\begin{pmatrix}-7 & 0 & 1\\ 29 & 16 & 19\end{pmatrix}$.

Пример 5. Найти A^2, где $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 6\\ 24 & 32\end{pmatrix}$.

3 Определители квадратных матриц

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или **определителем первого порядка**, называется элемент a_{11}: $\Delta_1=|A|=a_{11}$. **Например**, пусть $A=(8)$, тогда $\Delta_1=|A|=8$.

Определитель матрицы А обозначается $|A|$, Δ или det A.

Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое находится по формуле $\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем матрицы третьего порядка $A=(a_{ij})$**,** или **определителем третьего порядка,** называется число, которое находится по формуле $\Delta_3=|A|=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарриуса). Покажем это на схеме:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot0\cdot5+2\cdot1\cdot2+(-1)\cdot4\cdot3-2\cdot0\cdot3-(-1)\cdot2\cdot5-4\cdot1\cdot1=$$

$$=0+4-12-0+10-4=-2.$$

Для того, чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потребуются некоторые дополнительные понятия.

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} матрицы А n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы А вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы А третьего порядка будет:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1)-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i+j)$ - нечетное число.

Например, $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$; $A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=M_{31}$.

Определение. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраическое дополнение $\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{s=1}^{n}a_{1S}A_{1S}$ (разложение по элементам 1-й строки).

Например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

<u>Свойства определителей:</u>

1) Определитель не меняется, если в нем строки и столбцы поменять местами.

2) Если в определителе поменять местами какие-либо две строки или два столбца, то определитель изменит только знак.

3) Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

4) Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

5) Определитель равен нулю, если элементы каких-либо двух строк равны или пропорциональны.

6) Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое не равное нулю число. Это так называемый способ получения нулей.

Пример.

$$\Delta=\overset{(-3)\searrow}{\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & 3\\ 5 & 2 & 2\end{vmatrix}}_{\nearrow(2)}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 7\\ 5 & -13 & 12\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-2 & 7\\ -13 & 12\end{vmatrix}=-24+91=67$$

7) Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$$a_{11}\cdot A_{21}+a_{12}\cdot A_{22}+a_{13}\cdot A_{23}=0$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

Решение. $\Delta=|A|=\begin{vmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot5-8\cdot1=-18.$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка $|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot0+1\cdot3+3\cdot6=21.$

Пример 3. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

Решение.

$$\mathrm{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0;\qquad \mathrm{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3;\qquad \mathrm{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=6;$$

$$\mathrm{A}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=14;\qquad \mathrm{A}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1;\qquad \mathrm{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-5;$$

$$\mathrm{A}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-7;\qquad \mathrm{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5;\qquad \mathrm{A}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4.$$

Пример 4. Вычислить определитель четвертого порядка $|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}4 & 6 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 4 & 6\end{vmatrix}$.

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем:

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 6 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 4 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12 & 2 & -2 & 4\\ 13 & -4 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -10 & 12 & 4 & 6\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}12 & 2 & 4\\ 13 & -4 & 1\\ -10 & 12 & 6\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элемента 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A|=\begin{vmatrix}12 & 2 & 4\\ 12 & -4 & 1\\ -10 & 12 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-40 & 18 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ -88 & 36 & 6\end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A|=1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-40 & 18\\ -88 & 36\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-8)\cdot 18\cdot\begin{vmatrix}5 & 1\\ 11 & 2\end{vmatrix}=-144.$$

Пример 5. Вычислить определитель треугольной матрицы
$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}.$$

(Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю).

Раскладывая по первому столбцу, получаем:

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}+0+0+0=2\cdot 3\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix}+0+0=$$
$$=2\cdot 3(-1)\cdot 4+0=-24.$$

4 Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется **обратной по отношению к квадратной матрице** A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$.

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка. Необходимо отметить, что для существования матрицы A^{-1} является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля $(|A| \neq 0)$, то такая квадратная матрица называется **невырожденной**, или **неособенной**; в противном случае $(\text{при } |A| = 0)$ - **вырожденной**, или **особенной**.

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица А – вырожденная и обратная матрица A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица А – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A', транспонированную к А.

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji}\ (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2 \ldots n)$ и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots n)$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}; \ (|A| \neq 0)$.

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ (п. 5 не обязателен).

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти матрицу, обратную к данной, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Определитель матрицы $|A| = 21 \neq 0$, т.е. матрица А – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

1. Находим матрицу A', транспонированную к А:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$, учитывая, что $A'_{ij} = A_{ji}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}0 & 14 & -7\\ -3 & -1 & 5\\ 6 & -5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{0}{21} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{3}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{5}{21}\\ \frac{6}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{4}{21}\end{pmatrix}.$$

5. Поверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$.

5 Ранг матрицы

В матрице А размером $m\times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k\leq\min(m;n)$. Определители таких подматриц называются **минорами k-го порядка матрицы А**.

Например, из матрицы $A_{3\times4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы А обозначается rang A, rg A или r (A). Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A)\leq\min(m;n)$;

б) $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда элементы матрицы равны нулю, т.е. А=О;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица А – невырожденная.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы. Назовем **элементарными преобразованиями** матрицы следующие:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).

2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.

3. Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.

4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

5. Транспонирование матрицы.

Теорема 1. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т.е. ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица А называется **ступенчатой**, если она имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0,\ i=1,2,\dots,r;\ r \leq k$.

Замечание. Условие $r \leq k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор r-го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Покажем на примере вычисление ранга матрицы с помощью окаймляющих миноров и элементарных преобразований.

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Решение. Для матрицы $A_{3\times 4}$ ранг $r(A) \leq \min(3;4)=3$. Проверим, равен ли ранг трём, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е.

определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) \le 2$. Так как существует ненулевой минор второго порядка, например $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-7\neq 0$, то $r(A)=2$.

Пример 2. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Если $a_{11}=0$, то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $a_{11}\neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы.

2. Если $a_{11}\neq 0$, то, умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11}=0, -a_{31}/a_{11}=2, -a_{41}/a_{11}=1)$ и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $a_{22}\neq 0$ (в данном случае $a_{22}=-1\neq 0$), то, умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно на $-a_{32}/a_{22}=-3, -a_{42}/a_{22}=-3)$, добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а, следовательно, и данной матрицы равен двум.

6 Метод обратной матрицы, формулы Крамера, метод Гаусса

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij}, b_i \left(i = 1, 2\ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$ - произвольные числа, называемые соответственно **коэффициентами при переменных** и **свободными членами** уравнений. В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$$

Решением системы (1) называется такая совокупность n чисел $\left(x_1 = k_1,\ x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n\right)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений. Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Например, система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ - совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10;0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ несовместная, а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ -

совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее, бесконечное множество решений $\left(x_1 = c,\ x_2 = 10 - 2c,\ \text{где}\ \ c - \text{любое число}\right)$.

Две системы уравнений называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, их произведение $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_x + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец.

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (1). На основании определения равенства матриц систему (1) можно записать в виде:

$$AX = B. \tag{2}$$

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (1) при $m = n$ предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая слева обе части матричного равенства (2) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец:

$$X = A^{-1}B \tag{3}$$

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы (2), а Δ_j-определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j=1,2,\ldots,n). \tag{4}$$

Формулы (4) получили название формул Крамера.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

При решении методом Гаусса можно:

- переставлять местами два любых уравнения системы;
- умножать обе части уравнения на произвольное, отличное от нуля число;
- прибавлять к обеим частям одного уравнения соответствующие части другого, умноженного на какое-то постоянное число.

Система обычно решается с помощью преобразований расширенной матрицы (матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов).

Если в результате преобразования матрицы:

1) получится строка 0 0 0 … 0 c b – система имеет ***единственное решение:***

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_{n-1}+c\cdot x_n=b_i$$

2) появится строка, состоящая из нулей, т.е. 0 0 0 … 0 0 – система имеет ***множество решений:***

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$$

3) появится строка 0 0 0 … 0 b – система ***решений не имеет:***

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=3, \\ 2x_1+x_2+x_3=11 \\ x_1+x_2+2x_3=8. \end{cases}$ а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Обозначим $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Тогда в матричной форме данная система имеет вид $AX=B$. Найдем определитель $|A|=5$. Так как $|A|\neq 0$, матрица A – невырожденная, и существует обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix};\ X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 11\\ 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 1\end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

б) Найдем определитель системы $\Delta=|A|=5$. Так как $\Delta\neq 0$, по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матриц А, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 11 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}=20;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix}=10;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}=5.$$

Теперь по формулам Крамера (4):

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{5}=4;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{10}{5}=2;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{5}{5}=1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

Пример 2. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases}x_1-\ \ x_2+\ 2x_3=1\\ 5x_1-3x_2+2x_3=5\\ x_1+\ 3x_2+3x_3=18\end{cases}$$

$$(-1)\ \ (-5)\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 5 & -3 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & 18\end{array}\right)\sim(-2)\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -8 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 17\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 17 & 17\end{array}\right)$$

$$0 \quad 0 \quad c \quad b$$

Запишем полученную систему треугольного вида

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=1\\ \quad 2x_2-8x_3=0\\ \qquad 17x_3=17\end{cases}\qquad \begin{array}{l}x_1-4+2=1\\ 2x_2-8\cdot 1=0\end{array}\qquad 2x_2=8\qquad \begin{array}{l}\underline{x_1=3}\\ \underline{x_2=4}\\ \underline{x_3=1}\end{array}$$

Ответ: (3, 4,1)

Пример 3. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6,\\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=18,\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4,\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8.\end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} \neq 0$, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2), (-3), (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на $13{,}5/8 = 27/16$ и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ \qquad\quad -8x_3 + x_4 = 6, \\ \qquad\qquad -\frac{117}{16} x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \dfrac{6 - x_4}{-8} = \dfrac{6+2}{-8} = -1$; из второго $x_2 = \dfrac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \dfrac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения

$x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + (-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы $(1;\ 2;\ -1;\ 2)$.

Пример 4. Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.

7 Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов

Определение 1. Геометрическим вектором, или просто вектором, называется **направленный отрезок.**

Вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B - начало и конец данного вектора, либо $\vec{a}$. Начало вектора называют **точкой его приложения**.

Определение 2. Вектор называется **нулевым,** если начало и конец его совпадают.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет при записи отождествлять нулевой вектор с вещественным числом нуль.

Определение 3. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Определение 4. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

Определение 5. Два вектора называются **равными**, если они коллиннеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

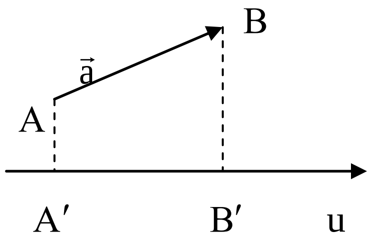
Все нулевые векторы считаются равными.

Определение 6. Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор**, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

Определение 7. Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется такой **вектор** $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Определение 8. Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha>0$ и противоположное направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha<0$.

Обозначим буквами A' и B' основания перпендикуляров, опущенных на ось u из точек A и B соответственно.



Определение 9. **Проекцией вектора** $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось u называется величина $A'B'$ направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ оси u и обозначается $пр_u\vec{a}$. $пр_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью u.

Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Числа x, y, z - называется декартовыми прямоугольными координатами вектора $\vec{a}$. Обозначим буквами α,β и γ углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям координат; $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Длина вектора через его координаты имеет вид:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

откуда следует $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Определение 10. Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^0$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{a}^0$ коллинеарен вектору $\vec{a}$,

2) $|\vec{a}^0|=1$.

Координатами орта вектора являются направляющие косинуса.

Если два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ заданы в декартовых прямоугольных координат $\vec{a}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{a}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то:

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k},$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1)\vec{i} + (\alpha y_1)\vec{j} + (\alpha z_1)\vec{k}.$$

Условие коллинеарности векторов имеет вид:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (5;9;7)$.

Решение. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2+5;3+9;-1+7) = (7;12;6)$.

Задача 2. Найти вектор $\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$, если $\vec{p} = (4;5;-6)$, $\vec{q} = (8;2;1)$.

Решение. $4\vec{p} = (4\times4;5\times4;-6\times4) = (16;20;-24)$

$5\vec{q} = (8\times5;2\times5;1\times5) = (40;10;5)$

Тогда:

$\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q} = (16+40;20+10;-24+5) = (56;30;-19)$.

Задача 3. Разложить вектор $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение. $\vec{S} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta(\vec{a} - \vec{b}) + \gamma(2\vec{b} + 3\vec{c}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{a} - \beta\vec{b} + 2\gamma\vec{b} + 3\gamma\vec{c}.$$

Приравняем коэффициенты справа и слева:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 1, \\ -2\alpha + 3\gamma = 1, \end{cases} \text{тогда } \alpha = \frac{2}{5};\ \beta = \frac{3}{5};\ \gamma = \frac{3}{5} \text{ и } \vec{S} = \frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q} + \frac{3}{5}\vec{r}.$$

Задача 4. Даны точки $A(1;\ 7;\ 0)$, $B(5;\ 7;\ 3)$, $C(7;\ 6;\ 5)$. Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$.

Решение. Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{AC} = (7-1;6-7;5-0) = (6;-1;5)$

$\overrightarrow{BC} = (7-5;6-7;5-3) = (2;-1;2)$.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = (6-2;\ -1-(-1);5-2) = (4;\ 0;\ 3)$.

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, следовательно,

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{3}{5}$, $\vec{a}^{\,0}\left\{\frac{4}{5};\ 0;\ \frac{3}{5}\right\}$.

8 Скалярное произведение векторов

Определение 11. Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Модулем вектора $\vec{a}=(x;y;z)$ (или длиной вектора $\vec{a}$) называется корень квадратный из суммы квадратов координат вектора:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ - произведение векторов коммутативно.

2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\bar{a}^{\,2}=\left|\bar{a}\right|^2$$

$$\bar{a}^{\,2}=\bar{a}\cdot\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|\cdot\cos 0^\circ=\left|\bar{a}\right|^2 \Rightarrow \boxed{\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\bar{a}^{\,2}}}$$

3) Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=0}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos 90^\circ=0$$

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=\left|\bar{i}\right|^2=1;\quad \bar{i}\cdot\bar{j}=\left|\bar{i}\right|\cdot\left|\bar{j}\right|\cdot\cos 90^\circ=0$$

Причем, произведение одноименных орт равно единице, а разноименных орт равно нулю (см. таблицу):

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

4) Скалярное произведение векторов, заданных координатами равно сумме произведений одноименных координат:

$$\left(x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k}\right)\cdot\left(x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k}\right)=$$

$$=x_1\cdot\bar{i}\cdot x_2\cdot\bar{i}+\cancel{x_1\cdot\bar{i}\cdot y_2\cdot\bar{j}}+\cancel{x_1\cdot\bar{i}\cdot z_2\cdot\bar{k}}+\cancel{y_1\cdot\bar{j}\cdot x_2\cdot\bar{i}}+y_1\cdot\bar{j}\cdot y_2\cdot\bar{j}+$$

$$+\cancel{y_1\cdot\bar{j}\cdot z_2\cdot\bar{k}}+\cancel{z_1\cdot\bar{k}\cdot x_2\cdot\bar{i}}+\cancel{z_1\cdot\bar{k}\cdot y_2\cdot\bar{j}}+z_1\cdot\bar{k}\cdot z_2\cdot\bar{k}=$$

$$=\boxed{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}$$

5) Из формулы скалярного произведения векторов можно найти косинус угла между двумя векторами: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}$

В координатной форме: $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

Решение типовых примеров

Задача 1. Перпендикулярны ли два вектора $\overline{a} = (3; -2; 6)$; $\overline{b} = (7; 4; 9)$. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$**.**

Решение. $3\cdot 7 + (-2)\cdot 4 + 6\cdot 9 = 21 - 8 + 54 = 67 \neq 0$, следовательно, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не перпендикулярны.

Задача 2. Даны два вектора $\overline{a} = (1; 2; -2)$; $\overline{b} = (2; -1; 2)$. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$**.**

Решение. $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = -\dfrac{4}{3\cdot 3} = -\dfrac{4}{9}$

Тогда: $\varphi = \pm\arccos\left(-\dfrac{4}{9}\right) + 2\pi n = \pm(\pi - \arccos\dfrac{4}{9}) + 2\pi n, n \in Z$

Задача 3. Найти угол α между векторами $\overline{p} = 2\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{q} = \overline{a} - \overline{b}$**,** если $\overline{a} = (4; 1; -2)$; $\overline{b} = (1; 2; 3)$.

Решение. Зная, что $\cos\varphi = \dfrac{\overline{p}\cdot\overline{q}}{|\overline{p}|\cdot|\overline{q}|}$, определим координаты векторов $\overline{p}$ и $\overline{q}$:

$$\overline{p} = (2\cdot 4 + 1; 2\cdot 1 + 2; 2\cdot(-2) + 3) = (9; 4; -1)$$

$$\overline{q} = (4 - 1; 1 - 2; -2 - 3) = (3; -1; -5).$$

Найдем скалярное произведение векторов по их координатам:

$$\overline{p}\cdot\overline{q} = 9\cdot 3 + 4\cdot(-1) + (-1)\cdot(-5) = 27 - 4 + 5 = 28$$

Их длины равны:

$$|\overline{p}| = \sqrt{9^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{81 + 16 + 1} = \sqrt{98}$$

$$|\overline{q}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}$$

Тогда, $\cos\varphi = \dfrac{28}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{35}} = \dfrac{28}{\sqrt{3430}}$,

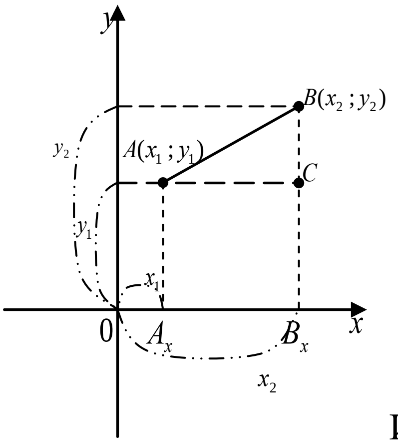
следовательно, $\alpha = \pm\arccos\dfrac{28}{\sqrt{3430}} + 2\pi n, n \in Z$.

9 Понятие уравнения линии. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

Линия – геометрическое место точек (совокупность точек), обладающих определенным свойством.
Произвольная точка *M* линии называется ***текущей точкой*** линии, а ее координаты - ***текущими координатами***.

Уравнение, связывающее переменные $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, называется ***уравнением линии***, если ему удовлетворяют координаты любой точки линии и только они.

Пусть в прямоугольной системе координат заданы две точки с координатами $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Найдем расстояние между ними.



Из ΔABC по теореме Пифагора имеем: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$, но $AC=A_xB_x=|x_2-x_1|$; $CB=A_yB_y=|y_2-y_1|$.

Подставим в формулу: $AB=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}$ или

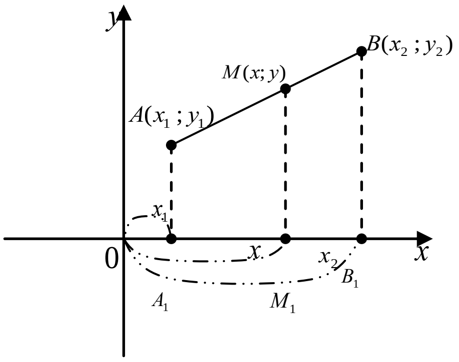
$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

Значит, ***расстояние между двумя точками*** равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат.

Пример: Определить расстояние между двумя точками *A* (2; 3); *B* (5; -1).

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

Пусть даны точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Найти координаты третьей точки *M*, которая делит отрезок *AB* так, что отношение $\frac{AM}{MB}$ равно положительному числу λ.



Составим пропорцию: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{A_1M_1}{M_1B_1}$

Т.к. $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$, $A_1M_1 = x - x_1$ и $M_1B_1 = x_2 - x$, то получим:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad ; \quad x_2\lambda - x\lambda = x - x_1$$

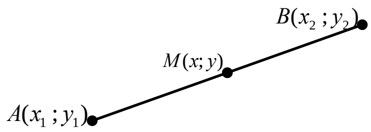
Перегруппируем: $x + x\lambda = x_2\lambda + x_1$; $x(1+\lambda) = x_1 + x_2\lambda$.

Отсюда: $\boxed{x = \dfrac{x_1 + x_2\lambda}{1+\lambda}}$.

Совершенно аналогично можно получить $\boxed{y = \dfrac{y_1 + y_2\lambda}{1+\lambda}}$.

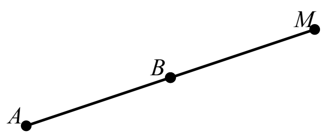
<u>Замечания:</u>

1)



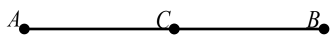
Если $\dfrac{AM}{MB} = \lambda > 0$, то точка *M* делит отрезок *AB* внутренним образом.

2)



Если $\dfrac{AM}{MB} = \lambda < 0$, то точка *M* делит отрезок *AB* внешним образом.

3)



Пусть делящая точка является серединой отрезка *AB*. Следовательно, $\dfrac{AC}{CB} = 1$. Тогда $\boxed{x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}}$ и $\boxed{y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}}$, т. е. ***координаты середины отрезка равны полусумме координат концов отрезка.***

Для того чтобы найти ***точки пересечения двух линий***, достаточно совместно решить систему двух уравнений этих линий.

10 Прямая линия на плоскости

Прямая линия ℓ задается уравнением первой степени относительно x и y.

$$\ell: Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Это общее уравнение прямой ℓ. Здесь коэффициенты A и B есть координаты нормального вектора $\vec{N} = (A, B)$ (рис. 1).

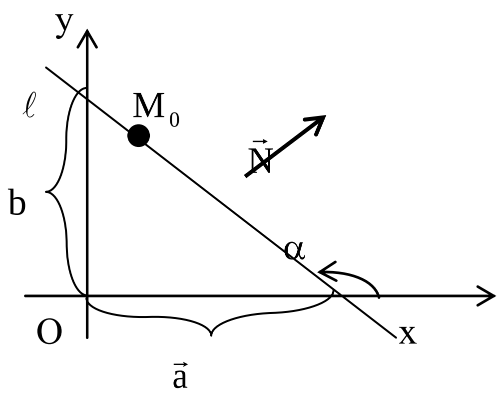


Рис. 1

Существуют другие виды уравнения прямой ℓ. Так, решив уравнения (1) относительно y, получим (если $B \neq 0$):

$$\ell: y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Это ***уравнение прямой с угловым коэффициентом.***

Здесь $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY (рис. 1). Если $C \neq 0$, то уравнение (1) можно записать в форме: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Здесь a и b - величины отрезков, которые прямая ℓ отсекает на осях OX и OY (рис. 1).

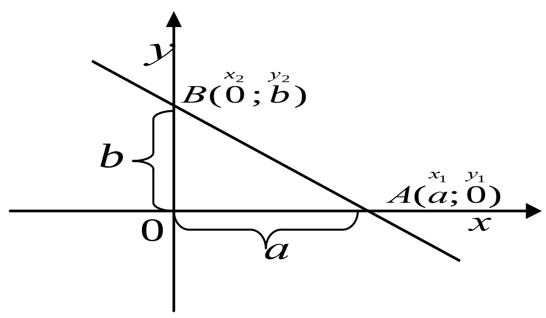
Если ***прямая проходит через две заданные точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Пусть нам дана точка $A(x_0; y_0)$ и угловой коэффициент прямой *k*. Возьмем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Так как точка $A \in l$, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению, следовательно, $y_0 = kx_0 + b$. Вычтем из (1)-го уравнения (2)-е, получим:

$$-\begin{matrix} y = kx + b \\ y_0 = kx_0 + b \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = k(x - x_0)$$ - ***уравнение пучка прямых.***

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. Подставим в него вместо $(x_1; y_1)$ координаты точки *A*, а вместо $(x_2; y_2)$ координаты точки *B*.



Получим: $\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$;

$$\frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a} \quad ; \quad \frac{y}{b}=\frac{x}{-a}+1, \ \frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1.$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - ***уравнение прямой в отрезках на осях,***

где a и b – отрезки, отсекаемые прямой на осях OX и OY.

Если у двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 известны угловые коэффициенты k_1 и k_2, то можно найти угол между двумя прямыми:

$\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1 \quad ; \ \operatorname{tg}\alpha_2 = k_2 \quad ; \ \alpha=\alpha_2-\alpha_1 \quad \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)$, а по формуле тангенса разности имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\cdot\operatorname{tg}\alpha_1}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\ \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\ \right|.$$

<u>Частные случаи:</u>

1) Пусть $l_1 || l_2$, тогда угол между ними равен нулю $(\alpha=0)$. Тогда:

$$\operatorname{tg}\alpha=0 \quad ; \quad \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k_2-k_1=0 \quad ; \quad \boxed{k_1=k_2}$$

т.е., если угловые коэффициенты равны, то прямые параллельны.

2) Пусть $l_1 \perp l_2$, тогда α = 90°, а тангенс 90° - не существует. Следовательно,

$$\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\text{не существует} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+k_1\cdot k_2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_2=-\frac{1}{k_1}},$$

т.е. если угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, то прямые перпендикулярны.

3) Возможны следующие расположения прямых $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$:

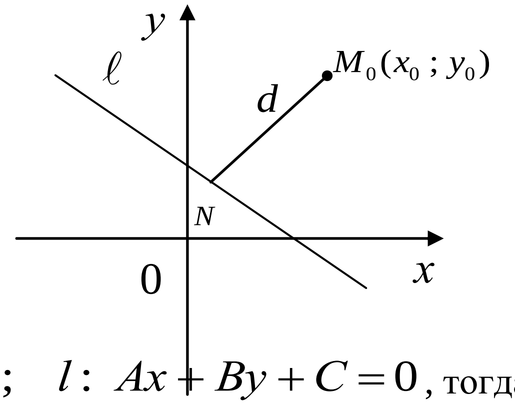
а) если $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются;

б) если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны;

в) если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

11 Расстояние от точки до прямой

Под расстоянием от точки M_0 до прямой l понимают длину перпендикуляра $M_0N=d$, опущенного из точки M на прямую l.



$M_0\notin l$; $l:\ Ax+By+C=0$, тогда:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Написать уравнение прямой ℓ, проходящей через точки $M_1(-1;4)$ и $M_2(5;2)$. Найти угловой коэффициент прямой ℓ и отрезки, которые она отсекает на осях координат.

Решение.

$\frac{x+1}{5+1}=\frac{y-4}{2-4}$, $\frac{x+1}{6}=\frac{y-4}{-2}$, $-2x-2=6y-24$, $x+3y-11=0$ - общее уравнение прямой. Отсюда следует, что $3y=-x+11$ или $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом. Здесь $k=-\frac{1}{3}$. Из уравнения $x+3y-11=0\ \Rightarrow\ x+3y=11$, $\frac{x}{11}+\frac{3y}{11}=1$, $\frac{x}{11}+\frac{y}{11/3}=1$. Итак, a=11, b=$\frac{11}{3}$.

Задача 2. Найти угол между прямыми $\ell_1: x+2y+6=0$ и $\ell_2: 3x+y-2=0$.

Решение. Так как $\ell_1 : y = -1/2x - 3$, то $k_1 = -1/2$. Аналогично, $\ell_1 : y = -3x + 2$, то $k_2 = -3$.

Тогда

$$tg\Theta = \frac{-3 + 1/2}{1 + (-3) \cdot (-1/2)} = -1, \quad \Theta = 135^0.$$

Задача 3. Совпадают, параллельны или пересекаются следующие прямые:

а) $l_1 : 2x + y - 1 = 0$ и $l_2 : x + 5y + 5 = 0$;

б) $l_1 : -x + 6y + 2 = 0$ и $l_2 : x - 6y - 2 = 0$;

в) $l_1 : 3x + 6y + 7 = 0$ и $l_2 : x + 2y + 14 = 0$.

Решение. Найдем соотношение соответствующих коэффициентов прямых:

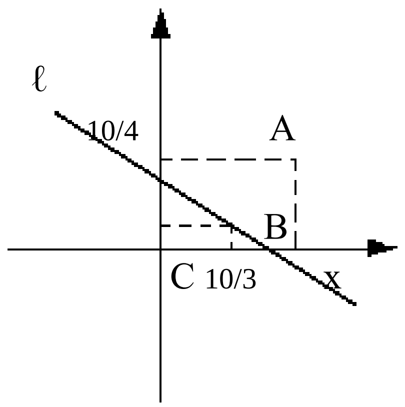
а) $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{5}$, следовательно, прямые пересекаются;

б) $\frac{-1}{1} = \frac{6}{-6} = \frac{2}{-2}$, следовательно, прямые совпадают;

в) $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} \neq \frac{7}{14}$, следовательно, прямые параллельны.

Задача 4. Найти расстояние от точек A(4;3), B(2;1) и C(1;0) до прямой *3x+4y-10=0* . Построить точки и прямую.

Решение. A=3, B=4, C=-10



$$d_A = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|12 + 12 - 10|}{5} = \frac{14}{5}$$

$$d_B = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 10|}{5} = 0$$

$$d_C = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 10|}{5} = \frac{7}{5}$$

Уравнение данной прямой в отрезках $\ell: \quad \dfrac{x}{\frac{10}{3}} + \dfrac{y}{\frac{10}{4}} = 1$

Задача 5. Даны координаты вершин треугольника $A(2, 5)$, $B(5, 1)$, $C(11, 3)$.

1) Вычислить длину стороны BC.

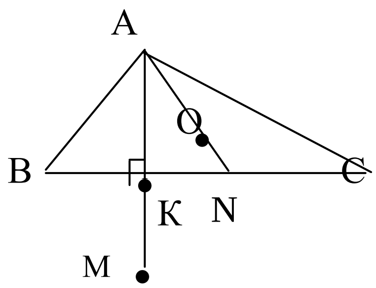
2) Составить уравнения сторон AB и BC.

3) Найти точку пересечения медиан.

4) Найти тангенс угла B.

5) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину.

6)Найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A, относительно прямой BC.



Решение.

1) Длину стороны BC определим как расстояние между двумя точками: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$, тогда $|BC| = \sqrt{(11-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

2) Уравнение прямой BC: $\dfrac{x - x_в}{x_c - x_в} = \dfrac{y - y_в}{y_c - y_в}$; $\dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y-1}{2}$; $x - 3y - 2 = 0$.

Уравнение прямой AB: $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$; $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-5}{-4}$; $4x + 3y - 23 = 0$.

3) Найдем координаты точки N – середины стороны BC:

$$x_N = \frac{x_в + x_c}{2} = \frac{5+11}{2} = 8; \; y_N = \frac{y_в + y_c}{2} = \frac{1+3}{2} = 2; \; N(8,2).$$

Точка пересечения медиан O делит каждую медиану на отрезки в отношении $\lambda = 2:1$.

Используем формулы деления отрезка в данном отношении λ:

$$x_0 = \frac{x_A + \lambda x_N}{1+\lambda}; \; y_0 = \frac{y_A + \lambda y_N}{1+\lambda};$$

$$x_0 = \frac{2 + 2\cdot 8}{3} = 6; \; y_0 = \frac{5 + 2\cdot 2}{3} = \frac{9}{3} = 3; \; O(6,\ 3).$$

4) Тангенс угла при вершине B найдем по формуле $tg\angle B=\dfrac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}$.

Уравнение прямой BC: $x-3y-2=0$, тогда $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$, $k_{BC}=\dfrac{1}{3}$.

Уравнение прямой AB: $4x+3y-23=0$, тогда $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{23}{3}$, $k_{AB}=-\dfrac{4}{3}$.

$$tg\angle B=\frac{-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{1+(-\frac{4}{3})\cdot\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}}=-\frac{9}{3}=-3.$$

5) Уравнение высоты AK запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ перпендикулярно прямой BC. Так как $AK\perp BC$, то

$$k_{AK}=-\frac{1}{k_{BC}}=-\frac{1}{\frac{1}{3}}=-3.$$

Тогда уравнение AK найдем по формуле: $y-y_A=k_{AK}(x-x_A)$.

$y-5=-3(x-2),\ y+3x-11=0$.

Длину высоты AK можно найти как расстояние от точки A до прямой BC: $|AK|=d=\dfrac{|1\cdot 2-3\cdot 5-2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

6) Точка M, симметричная точке A относительно прямой BC, расположена на прямой AK, перпендикулярной к прямой BC, на таком же расстоянии от прямой, как и точка A. Координаты точки K найдем как решение системы $\begin{cases}x-3y-2=0,\\ 3x+y-11=0.\end{cases}$ Систему решим по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=10;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 11 & 1\end{vmatrix}=35;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 11\end{vmatrix}=5;$$

$x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{35}{10}=\dfrac{7}{2}$; $y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$; следовательно, $K\left(\dfrac{7}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

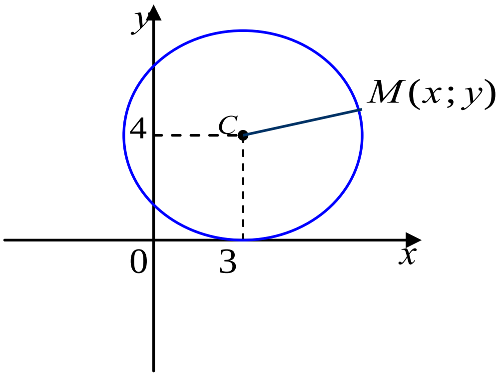
Точка K является серединой отрезка AM.

$x_K = \dfrac{x_A + x_M}{2}$; $\dfrac{7}{2} = \dfrac{2 + x_M}{2}$; $x_M = 5$; $y_K = \dfrac{y_A + y_M}{2}$; $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5 + y_M}{2}$; $y_M = -4$; $M(5, -4)$.

12 Кривые второго порядка

Линии, описывающиеся уравнениями второй степени относительно x и y, называются кривыми второго порядка. К ним относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность.



Уравнение окружности с центром в точке *C (a; b)* и радиусом *R* имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$ - ***нормальное уравнение окружности.***

Если центр окружности находится в начале координат, то $a = b = 0$ и уравнение примет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$ - ***каноническое уравнение окружности***

Эллипс.

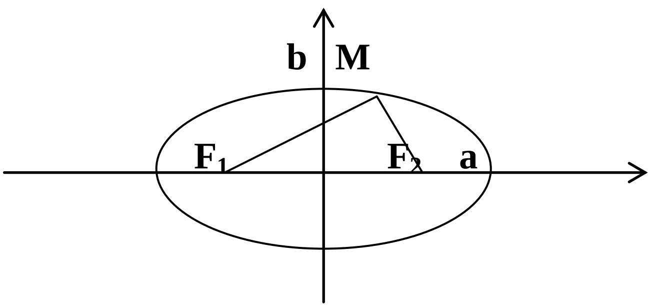
Множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная *2a*, называется *эллипсом.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ - ***каноническое уравнение эллипса,***

где a – большая полуось;

b – малая полуось.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$ - ***нормальное уравнение эллипса.***



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Т.к. $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

Гипербола.

Множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний, которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная равная *2a,* называется ***гиперболой***.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ - ***каноническое уравнение гиперболы,***

где *a* – действительная полуось;

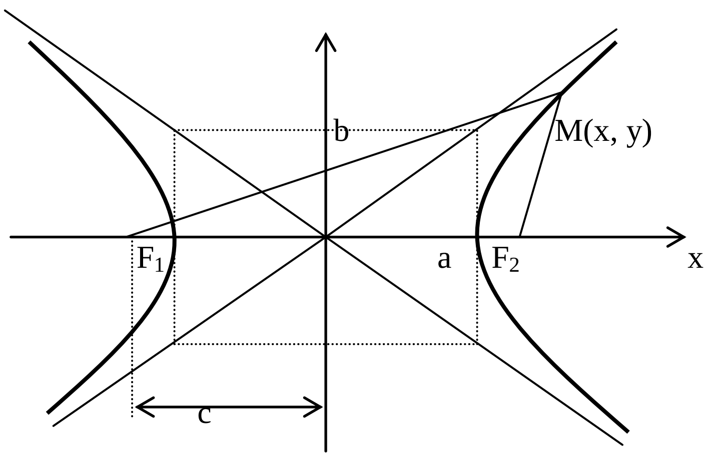
b - мнимая полуось.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$ - ***нормальное уравнение гиперболы,***

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$ - ***уравнение асимптот гиперболы.***

F_1, F_2 – фокусы гиперболы.

$F_1F_2 = 2c$. $c^2 = a^2 + b^2$

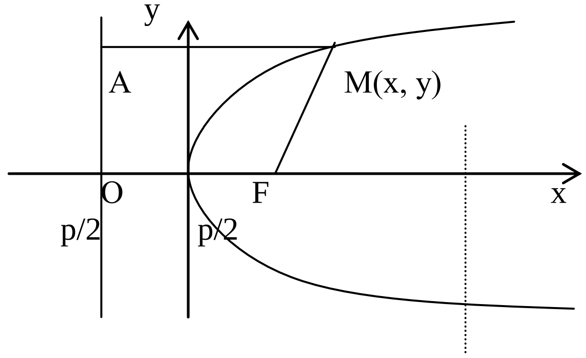


Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

Парабола.

Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой фокусом, и одной прямой, называемой директрисой, называется ***параболой***.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой**.**



$y^2 = 2px$ - ***каноническое уравнение параболы***

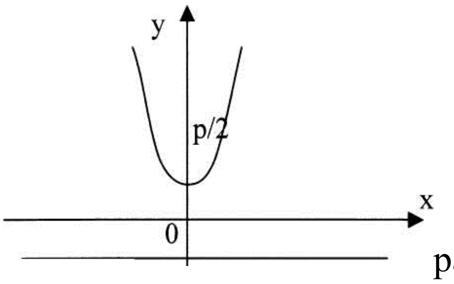
$(y-b)^2 = 2p(x-a)$ **-** ***уравнение параболы со смещенной вершиной (нормальное уравнение параболы)***

Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы.

Уравнение директрисы: x = -p/2.

Фокус параболы $F(\frac{p}{2};0)$**.**

$x^2 = 2py$ - парабола, симметричная относительно оси ОУ.



$y = -\frac{p}{2}$ - директриса

Эксцентриситет параболы считается равным 1.

13 Числовая последовательность и ее предел

Определение 1. Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1,2,3,...,n,...$ поставлено в соответствие действительное число u_n, то множество действительных чисел $u_1,u_2,u_3,...,u_n,...$ называется числовой последователь-ностью и обозначается $\{u_n\}$.

Числа $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ называются элементами последовательности. u_n – общий член последовательности.

Последовательность $\{u_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M, что для любого ее элемента u_n выполняется неравенство:

$$u_n \le M \qquad (u_n \ge M).$$

Последовательность $\{u_n\}$ называется ***ограниченной***, если она ограничена сверху и снизу.

Определение 2. Число a называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что для $n > N$ выполняется неравенство:
$|u_n - a| < \varepsilon$.

Символическая запись $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Последовательность, имеющую предел, называют сходящейся.

Неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенству $a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$, которое означает, что все элементы последовательности $\{u_n\}$, номера которых $n > N$, находятся в ε – окрестности точки a.

Теорема 1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 3. Алгебраическая сумма, произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен соответственно алгебраической сумме, произведению пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \pm \lim_{n\to\infty} v_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \cdot v_n = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Теорема 4. Частное двух сходящихся последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \ne 0$, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}.$$

Теорема 5. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Пример. Доказать, что последовательность $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, ..., \frac{n}{2n+1}, ...$ при $n \to \infty$ имеет пределом число $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ выполняется неравенство:

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon .$$

Найдем $\left| \dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2} \right| = \left| -\dfrac{1}{2(2n+1)} \right| = \dfrac{1}{2(2n+1)}$.

Таким образом, неравенство $\left| u_n - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$ выполняется, если $\dfrac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$, откуда $2(2n+1)\varepsilon > 1$ или $n > \dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$.

В качестве числа N можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$.

Зададим $\varepsilon = \dfrac{1}{40}$, тогда $n > \dfrac{1}{4 \cdot \frac{1}{40}} - \dfrac{1}{2} = 19\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, начиная с номера $n = 20$, будет выполняться неравенство $\left| u_n - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$, то есть, $\left| \dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{40}$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

14 Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть $x_0 \in X$ или $x_0 \overline{\in} X$. Возьмем из множества X последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, элементы которой отличны от x_0 $(x_n \neq x_0)$, сходящуюся к x_0. Последовательность функции $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ тоже образуют числовую последовательность.

Определение 1. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу A.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Функция $y = f(x)$ в точке x_0 может иметь только один предел.

Определение 2. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (или в точке x_0), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0 так, что x принимает только значения, меньшие x_0, то число A_1 называется левым пределом функции $f(x)$ в точке x_0.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или $f(x_0 - 0) = A_1$.

Аналогично определяется правый предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0, при $x > x_0$:

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ или $f(x_0 + 0) = A_2$.

Если левый и правый пределы функции $y = f(x)$ существуют и равны, то есть $A_1 = A_2 = A$, то число А есть предел этой функции в точке x_0, то есть, если:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A, \text{ то } \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Определение 3. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $M > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = B$, то функции $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$ и $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеют в точке x_0 пределы равные соответственно $A \pm B$; $A \cdot B$ *и* $\dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

Теорема 2. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) \right]^n$.

Теорема 3 . $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} C = C$.

Теорема 4 . $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} C f(x) = C \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$.

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ – имеет предел в данной точке x_0. Тогда она ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема 6. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $q(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, за исключением может быть, самой точки x_0, и для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq q(x) \leq \varphi(x)$. Пусть, кроме того $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} q(x) = A$.

15 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функции $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$.

Определение 2. Функции $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Теорема. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию, являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ имела пределом число А, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \to x_0$.

Деление одной бесконечно малой функции на другую может привести к различным результатам.

Пусть $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \beta(x) = 0$.

1) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

2) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые одного порядка.

3) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Важнейшие эквивалентности

1) $\sin x \sim x$;

2) $\operatorname{tg} x \sim x$;

3) $\arcsin x \sim x$;

4) $\operatorname{arctg} x \sim x$;

5) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;

6) $e^x - 1 \sim x$;

7) $a^x - 1 \sim x$;

8) $\ln(1+x) \sim x$;

9) $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$;

10) $(1+x)^k - 1 \sim kx$;

(в частности $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$).

4) Если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$– бесконечно малая *n*-го порядка относительно $\beta(x)$.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих неравенству, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$. В этом случае записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Аналогично определяется бесконечно большая функция при $x \to \infty$.

Теорема о связи между бесконечно малой и бесконечно большой функциями.

Функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой. Функция обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

16 Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

17 Вычисление пределов

При вычислении предела функции $y = f(x)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция $f(x)$ является элементарной и предельное значение аргумента функции принадлежит её области определения, тогда вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, так как предел элементарной функции $f(x)$ при $x \to x_0$, где x_0 входит в область её определения, равен частному значению функции при $x = x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ не определена, или же вычисляется предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$.

Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится непосредственно к применению теорем о пределах, свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ или при $x \to \infty$ представляет собой неопределённость типа «$\frac{0}{0}$»; «$\frac{\infty}{\infty}$»; «$0 \cdot \infty$»; «$\infty - \infty$»; «1^∞»; «0^0»; «∞^0».

Решение типовых примеров

Задача 1. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to 2}\left(x^2 + 1\right) = 5 \neq 0$, то применим теорему о пределе частного:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}.$$

2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 5x - 3}{loq_2\left(x^2 + 1\right)}$.

Решение.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{loq_2\left(x^2 + 1\right)} = \frac{(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 3}{loq_2\left[(-1)^2 + 1\right]} = \frac{-7}{loq_2 2} = -7$$

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) \cdot \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

44. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Решение. Функция $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ в точке $x=2$ не определена. Так как при $x=2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем неопределенность вида «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на $x-2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, так как $x^2-5x+6=0$ при $x_1=2,\quad x_2=3$.

$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, так как $x^2-3x+2=0$ при $x_1=2,\quad x_2=1$.

Итак, имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{2-3}{2-1}=-1.$$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}$.

Решение. При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на $x-3$. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению $3-\sqrt{x+6}$, то есть на выражение $3+\sqrt{x+6}$, получим

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(3-\sqrt{x+6}\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$ {перемножив сопряженные выражения, избавимся от иррациональности в числителе} =

$$=\lim_{x\to 3}\frac{9-(x+6)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=-\frac{1}{3+\sqrt{3+6}}=-\frac{1}{3+3}=-\frac{1}{6}.$$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{x+6}-2\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+6-4}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\frac{1}{-4\left(\sqrt{4}+2\right)}=-\frac{1}{4(2+2)}=-\frac{1}{16}.$$

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x+3-4)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+3}+2}{\sqrt{1+1}+\sqrt{2}}=\frac{2+2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^3+1\right)=\infty;\quad \lim_{x\to\infty}\left(3x^2+2x-1\right)=\infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида «$\dfrac{\infty}{\infty}$». Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на x^3, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Решение. В заданном примере имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)=\infty$, значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{2}{9-x^2}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Приведем дроби, стоящие под знаком предела, к общему знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{2}{9-x^2}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{3+x-2}{9-x^2}=\lim_{x\to 3}\frac{1+x}{9-x^2}=\infty.$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Для вычисления этого предела воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{x\cdot x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=8\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=8\cdot 1=8$$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Решение. В данном примере имеем неопределенность вида «1^∞». Для его вычисления используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=e^{6}.$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 4x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}\cdot\cos 0=\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}.$$

При вычислении этого предела воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin x \sim x$ при $x\to 0$. Следовательно, $\sin 3x\sim 3x$ и $\sin 4x\sim 4x$ при $x\to 0$. Затем бесконечно малые функции в числителе и в знаменателе заменили эквивалентными им функциями.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}+2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида « 1^{∞}». Для вычисления предела используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}+2}=\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}\cdot(1-5x)^{2}=$

$$=\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}\cdot(-5)}\cdot 1=\left[\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}\right]^{-5}=e^{-5}.$$

Вычислить односторонние пределы:

16. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$.

Решение. Пусть $x<2$, тогда при $x\to 2-0$ функции $x-2$ и $(x-2)^{3}$ являются отрицательными бесконечно малыми, поэтому $\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$ – отрицательная бесконечно большая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{4}{(x-2)^{3}}=-\infty.$$

При $x>2$ функции $x-2$ и $(x-2)^{3}$ – положительные бесконечно малые, поэтому $\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$ – положительная бесконечно большая функция.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{4}{(x-2)^3}=+\infty$.

17. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение. При $x\to 1-0$ функция $x-1$ – отрицательная бесконечно малая, следовательно $\dfrac{1}{x-1}$ – отрицательная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно малая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1.$$

При $x\to 1+0$ функция $x-1$ – положительная бесконечно малая, следовательно, $\dfrac{1}{x-1}$ – положительная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно большая положительная функция. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0.$$

18 Непрерывность функции

а) Определение непрерывности функции в точке

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, то есть:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$, так как $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

Таким образом, для непрерывной функции можно менять знак функции и знак предела.

Из определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 следует:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$$

или

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$

Определение 2. (на языке «$\varepsilon-\delta$»). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству:

$$|x-x_0|<\delta$$

выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается $\Delta x = x - x_0$.

Разность $f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0 и обозначается

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \text{ или } \Delta y = f(x) - f(x_0).$$

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Теорема 1. Все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Теорема 2. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции в точке x_0, то функции $f(x) \pm \varphi(x)$; $f(x) \cdot \varphi(x)$; $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ также непрерывны в точке x_0 (последняя при условии, что $\varphi(x_0) \neq 0$).

Теорема 3. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на $[a,b]$, если она непрерывна в каждой его точке.

б) Точки разрыва функции

Определение 1. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если эта функция не является непрерывной в точке x_0.

Определение 2. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если в этой точке существуют односторонние пределы. Разрывы первого рода делятся на два вида: скачки и устранимые разрывы.

Если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 существуют, но не равны, то в точке x_0 функция имеет скачок:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

или

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0).$$

Если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 существуют и равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет устранимый разрыв:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$

или

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0).$$

19 Производная функции

Определение 1. Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции $\vartriangle f(x)$ в этой точке к приращению аргумента $\vartriangle x$, при условии, что $\vartriangle x \to 0$.

Обозначение производной функции $y = f(x)$

$$f'(x), y', \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}.$$

По определению:

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\vartriangle f(x)}{\vartriangle x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+\vartriangle x) - f(x)}{\vartriangle x}$$

или

$y' = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\vartriangle y}{\vartriangle x}$ $y' = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Операцию нахождения производной называют дифференцированием.

Основные правила и формулы дифференцирования

1.	$(u+v-w)' = u'+v'-w'$	
2.	$(uv)' = u'v+v'u$	
3.	$(cu)' = cu'$	
4.	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$	$c' = 0, \quad c = const$
5.	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$	$x' = 1$
6.	$(u^a)' = au^{a-1}\cdot u'$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
7.	$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$; $\quad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
8.	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
9.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(e^x)' = e^x$
10.	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
11.	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$
12.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\sin x)' = \cos x$

13.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\cos x) = -\sin x$
14.	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
15.	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
16.	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17.	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18.	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
19.	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Решение типовых примеров

Найти производные от функций:

а) Производные элементарных функций

Пример 1. $y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$

Решение.

$$y' = 15x^2 - 4x + 3$$

Пример 2. $y = 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{x^2}$

Решение. Перепишем заданное выражение, используя дробные и отрицательные показатели:

$$y = 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-2}$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + 3 \cdot (-2) x^{-3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$$

Пример 3. $y = x^3 \cos x$

Решение. По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$y' = (x^3)' \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

Пример 4. $y = \dfrac{arctgx}{x^3}$

Решение. Применим правило дифференцирования дроби:

$$y' = \frac{(arctgx)' x^3 - arctgx (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{x^3 \cdot \dfrac{1}{1+x^2} - arctgx \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x - 3(1+x^2) arctgx}{x^4 (1+x^2)}$$

б) *Производные сложных функций*

Пример 5. $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$.

Решение. Вводим вспомогательную функцию $u = x^2 + 3x + 1$, тогда можно записать $y = \sqrt{u}$, зная, что:

$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, получим $y' = \frac{(x^2 + 3x + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}} = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$

Пример 6. $y = (x^2 + 5x + 7)^8$

Решение. Пусть $u = x^2 + 5x + 7$, тогда $y = u^8$, $y' = 8u^7 \cdot u'$

$u' = 2x + 5$

$y = 8(x^2 + 5x + 7)^7 (2x + 5)$

20 Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) от функции $y = f(x)$ называется производная от её производной $y' = f'(x)$, то есть:

$$y'' = \left[f'(x) \right]'$$

Производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от её $(n-1)$-ой производной:

$$y^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'.$$

Обозначения y'', $\frac{d^2 y}{dx^2}$; $y^{(n)}$; $\frac{d^n y}{dx^n}$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти производную 2-го порядка от функции $y = \sin^2 x$.

Решение.

$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x \qquad y'' = 2\cos 2x$

Пример 2. Найти производную третьего порядка функции $y = x \ln 2x$.

Решение.

Продифференцируем эту функцию трижды:

$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1;$

$y'' = \left(\ln 2x + 1\right)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x};$

$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

Итак, $\left(x\ln 2x\right)''' = -\dfrac{1}{x^2}$.

21 Производная неявно заданной функции

Функция $y = f\left(x\right)$ задана неявно уравнением $F\left(x,y\right) = 0$, если при подстановке её в это уравнение, она обращает его в тождество:

$$F\left(x, f\left(x\right)\right) \equiv 0.$$

Если функция $y = f\left(x\right)$ задана неявно уравнением $F\left(x,y\right) = 0$, то для нахождения производной y' нужно продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x, а затем разрешить полученное уравнение относительно y'.

Чтобы найти y'' неявно заданной функции, надо уравнение $F\left(x,y\right) = 0$ дважды продифференцировать по x и т.д.

Решение типовых примеров

Найти производную неявно заданной функции

Пример 1. $xy^2 = \operatorname{ctg} y$.

Решение.

$$x'y^2 + 2xyy' = -\frac{y'}{\sin^2 y};\ y^2 + 2xyy' = -\frac{y'}{\sin^2 y};\ y^2\sin^2 y = -y'\left(2xy\sin^2 y + 1\right);$$

$$y' = -\frac{y^2\sin^2 y}{2xy\sin^2 y + 1}.$$

Пример 2. Найти y': $x^3 \cdot y^2 + 5xy + 4 = 0$

Решение. Рассматриваем y как функцию x. Находим производную.

$$3x^2 \cdot y^2 + 2x^3yy' + 5y + 5xy' = 0$$

Решаем полученное уравнение относительно y’:

$$y' = -\frac{3x^2y^2 + 5y}{2x^3y + 5x}$$

Пример 3. $arctgy - y + x = 0$ Найти y’.

Решение.

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0 \quad \text{или} \quad y' - y' - y^2y' + 1 + y^2 = 0. \quad y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1, \quad \text{тогда}$$

$y'' = -2y^{-3} \cdot y' = -\dfrac{2y'}{y^3}$. В правую часть вместо y подставим его значение:

$$y'' = -\frac{2}{y^3}\cdot\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$$

22 Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. имеет в этой точке конечную производную $y' = f'(x)$, то:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Определение 2. $f'(x)\Delta x$ приращения функции Δy, линейная относительно приращения аргумента Δx, называется дифференциалом функции и обозначается:

$$df(x) = f'(x)\Delta x \quad \text{или} \quad dy = y'\Delta x.$$

Положив $y = x$, получим $dx = \Delta x$ и поэтому $dy \approx y'dx$ или $df(x) = f'(x)dx$, отсюда $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Из определения следует, что при достаточно малом приращении аргумента $\Delta x = dx$:

$$\Delta f(x) \approx df(x) \quad \text{или} \quad \Delta y \approx dy.$$

Так как

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

то

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \approx f(x) + df(x).$$

Итак,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Последняя формула применяется в приближенных вычислениях для вычисления значения функции, близкого к значению $f(x)$.

Дифференциал сложной функции $y = f\left[u(x)\right]$ имеет вид:

$$dy = df(u)du = df(u)u'(x)dx.$$

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка, т.е.:

$$d^2y = d(dy) = y''dx^2$$

или
$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2,$$

отсюда
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Дифференциал n – го порядка имеет вид:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

или
$$d^n y = y^{(n)}dx^n,$$

отсюда $$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Решение типовых примеров

Найти дифференциал функции

Пример. $y = (1 + \operatorname{tg} x)^3$.

Решение.

$dy = y'dx$

$$y' = \left[(1 + \operatorname{tg} x)^3\right]' = 3(1 + \operatorname{tg} x)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg} x)' = 3(1 + \operatorname{tg} x)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом,

$$dy = \frac{3(1 + \operatorname{tg} x)^2 dx}{\cos^2 x}.$$

23 Правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0.

Тогда, *предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l \qquad (1)$$

Замечания:

1. Правило Лопиталя (1) верно и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x = x_0$, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0.$

2. Формула (1) справедлива и в том случае, когда $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ выражения (1), то правило Лопиталя можно применить еще раз:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

Решение типовых примеров

«*Неопределённость вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$»

Пример 1. Найти пределы, применяя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$,

б)

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\frac{-(2-2x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-x+1}{x}}{\frac{-2(1-x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}=-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}=-1$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=(\textit{неопределённость}\left[\dfrac{0}{0}\right], \textit{применим правило Лопиталя})=$

$x\uparrow 0$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=(\textit{снова неопределённость}\left[\frac{0}{0}\right], \textit{вторично правило Лопиталя})=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\cos x=\frac{1}{6}.$$

«*Неопределённость вида* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$»

Пример 2. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +0}-\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to +0}(-x)=0.$

Замечание: в условии задачи подчёркнуто, что $x\to +0$, это указание является существенным, потому что при $x\to -0$ и при $x\to 0$, предел не существует, т.к. отрицательные числа логарифмов не имеют.

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tg5x}=\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}\dfrac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}\dfrac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}$ (прежде чем применять правило Лопиталя, преобразуем дробь):

$$\frac{3}{5}\lim_{x\to \frac{\Pi}{2}}\left(\frac{cos5x}{\cos 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to \frac{\Pi}{2}}\frac{cos5x}{\cos 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to \frac{\Pi}{2}}\frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}\left(\lim_{x\to \frac{\Pi}{2}}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{-1}\right)^2=\frac{5}{3}.$$

«*Неопределённость вида* $[\infty-\infty]$»

Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=+\infty$, то для определения предела $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$ надо преобразовать эту разность к такому виду:

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}},\qquad \text{тогда}\qquad \lim_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}}$$

учитывая, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=+\infty$, получили «неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$», которую мы умеем раскрывать с помощью правила Лопиталя.

Пример 3. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})=$ (при $x\to 1$ $\frac{1}{\ln x}$ и $\frac{1}{x-1}$ бесконечно большие величины одного порядка, а поэтому имеем неопределённость $[\infty-\infty]$):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{2}$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}$

«***Неопределенности вида*** **$[0\cdot\infty]$**» могут быть сведены к «*неопределённости вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$ *или* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$».

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$,

тогда $f(x)\cdot\phi(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{\phi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)$ или $f(x)\cdot\phi(x)=\frac{\phi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$,

получим: $$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\phi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\phi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Пример 4. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to +0} x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +0}(-x)=0$.

б) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x}=0$ (при $x\to+\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}=0$)

«***Неопределенности вида 1^{∞}, ∞^0, 0^0***» сводятся к «*неопределенности вида $0\cdot\infty$*» с помощью тождества:

$$\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)} (f(x) > 0) \quad \left[e^{\ln x} = x\right]$$

Можно записать:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} e^{\varphi(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$$

Дело сводится к определению предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

Пример 5.Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \left[0^0\right] = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = e^0 = 1$,

$$\left(\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0\right)$$

б) $\lim\limits_{x\to0}(1+mx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln x(1+mx)} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln x(1+mx)} = e^m$

$$\left(\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln x(1+mx) = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+mx)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{m}{1+mx}}{1} = m\right)$$

в) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = \lim\limits_{x\to+0} e^{tgx\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0} tgx\ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

$$\left(\lim_{x\to+0} tgx\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{tgx}} = \lim_{x\to+0}\frac{-\frac{\cancel{1}\big/\cancel{x^2}}{\cancel{1}\big/\cancel{x}}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to+0}\sin x\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 0\cdot1 = 0\right.$$

24 Полное исследование функции и построение графика

При полном исследовании функции решаются следующие вопросы:

1. Нахождение области определения функции.
2. Выяснение вопроса о четности и нечетности функции.
3. Определение точек разрыва функции.
4. Определение асимптот графика функции.
5. Определение интервалов возрастания и убывания функции.
6. Определение экстремума функции.
7. Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика.
8. Определение точек перегиба.

Полученные данные следует использовать для построения графика функции. Для большей точности эскиза графика рекомендуется построить ещё и отдельные точки графика, давая значения независимой переменной и определяя соответствующие значения функции. Полезно также получаемые данные сразу наносить на чертёж.

Решение типовых примеров

Исследовать функцию и построить график:

Пример 1. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

1) $Д\left(y\right)=R$,

2) функция нечётная, т.к. $y\left(-x\right)=-\dfrac{2x}{1+x^2}$, т.е. $f(-x)=-f(x)$, следовательно, её график симметричен относительно начала координат.

3) Найдём асимптоты графика функции

а) функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

б) $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$$

$y=0$ (ось Ox) – горизонтальная асимптота.

4) Найдём первую производную и возможные точки экстремума:

$$y'=\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$y'=0$ $\qquad$ $1-x^2=0$ $\qquad$ $x_{1,2}=\pm 1$.

5) Найдём вторую производную и возможные точки перегиба:

$$y''=\frac{-4x\left(1+x^2\right)^2-2\left(1-x^2\right)\cdot 2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{-4x\left(1+x^2\right)-8x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-4x-4x^3-8x+8x^3}{\left(1+x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{4x^3-12x}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

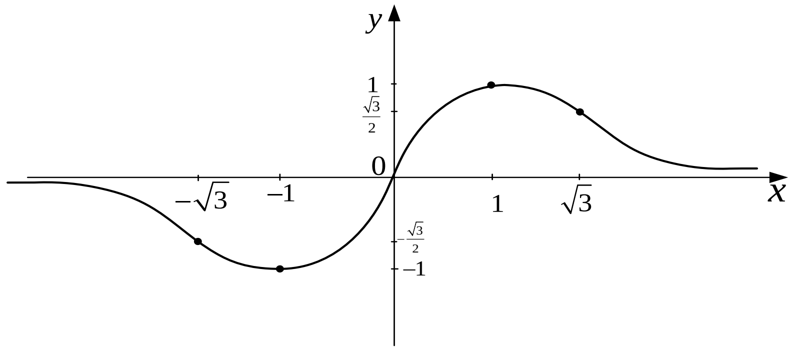
$y''=0$ $\qquad$ $4x(x^2-3)=0$ $\qquad$ $x_3=0$ $\qquad$ $x_{4,5}=\pm\sqrt{3}$.

6) Строим таблицу

x	0	(0; 1)	1	(1; $\sqrt{3}$)	$\sqrt{3}$	($\sqrt{3}$;$+\infty$)
y'	+	+	0	–	–	–

y''	0	–	–	–	0	+
y	0		1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
	т.п.		max		т.п.	

7) Строим график



Пример 2. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

1) $Д(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

2) функция нечётная, т.к. $y(-x) = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = -y(x)$, следовательно, график симметричен относительно начала координат.

3) Найдём асимптоты графика функции:

а) $\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = \pm\infty$ $\quad x = 0$ - вертикальная асимптота

б) $y = kx + b$

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$; $\quad b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right) = 0$

$y = \frac{x}{2}$ - наклонная асимптота.

4) Найдём возможные точки экстремума:

$y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$; $\quad y' = 0 \qquad \frac{2}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad x^2 = 4 \qquad x_{1,2} = \pm 2$.

5) Найдём возможные точки перегиба:

$y'' = \frac{4}{x^3}$; $\quad y \neq 0$

6) Составим таблицу, учитывая нечетность функции

x	0	(0; 2)	2	(2;+∞)
y'	∄	–	0	+

y''	$\overline{\exists}$	+	+	+
y	$\overline{\exists}$		2	
	т.р.		min	

7) Строим график функции