**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Симоновский А.Я.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

# Б1.Б.07 МАТЕМАТИКА

Шифр и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

**23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов**

Шифр и наименование направления подготовки

**Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов**

наименование профиля

**Программа академического бакалавриата**

Ориентация ОП ВО в зависимости от вида(ов) профессиональной деятельности

**Бакалавр**

Квалификация выпускника

**Очная, заочная**

Форма обучения

Ставрополь, 2019

Методические указания для студентов по выполнению практических и лабораторных работ по дисциплине входят в серию методических разработок, призванных способствовать овладению студентами теоретическими основами материала и появлению у них навыков решения задач по основным разделам курса математики. Подробно описывается теоретический материал по каждой теме и приводится решение типовых примеров.

## 1 Матрицы. Основные понятия и определения

**Определение 1.** Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая $m$ строк и $n$ столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: $a_{ij}$, где $i$ - номер строки, $j$ - номер столбца.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи,

$$A = (a_{ij}); \quad i = 1,2,\dots,m; \quad j = 1,2,\dots,n.$$

**Например**, $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$. Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: $[\ ]$, $\|\ \|$.

Две матрицы $A$ и $B$ одного размера называются **равными,** если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1,2,\dots m$; $j = 1,2,\dots,n$.

**Виды матриц.** Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой (вектором-строкой),** а из одного столбца – **матрицей–столбцом (вектором-столбцом):**

$A = (a_{11}\ a_{12}, \ldots, a_{1n})$ – матрица-строка; $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

Матрица называется **квадратной** $n$-го порядка, если число её строк равно числу столбцов и равно n.

**Например**, $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы $a_{ij}$, у которых номер столбца равен номеру строки $(i = j)$, называются **диагональными** и образуют **главную диагональ** матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется **диагональной.**

**Например**, $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы $n$-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной** матрицей $n$-го порядка, она обозначается буквой $E$.

**Например**, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется **нулевой**, если все её элементы равны нулю:

$$\underset{m\times n}{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

## 2 Операции над матрицами. Умножение матрицы на число

**Определение 1.** Произведением матрицы $A$ на число $\alpha$ называется матрица $B = \alpha A$, элементы которой $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ при $i = 1,2, \ldots, m;\quad j = 1,2, \ldots, n$.

**Следствие.** Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

В частности, произведение матрицы $A$ на число $0$ есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = O$.

**Определение 2.** Суммой двух матриц $A$ и $B$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ при $i = 1,2,\ldots,m;\quad j = 1,2,\ldots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно). В частном случае $A + O = A$.

**Определение 3.** Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

**Определение 4.** Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда произведением матриц $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой $c_{ij}$ равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы $j$-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}, \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

**Определение 5. Целой положительной степенью** $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение $m$ матриц, равных A, т.е.:

$$A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A.$$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0 = E, \quad A^1 = A$. Нетрудно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}, \quad (A^m)^k = A^{mk}$.

**Транспонирование матрицы –** переход от матрицы A к матрице $A'$, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица $A'$ называется **транспонированной** относительно матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица $A'$ имеет размер $n \times m$.

**Например,** $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad A'_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$

В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например $\mathrm{A}^{\text{т}}$.

### *Решение типовых примеров*

**Пример 1.** Умножить матрицу на число 5, если $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

$$5A=\begin{pmatrix} -10 & 20 \\ 15 & 40 \end{pmatrix}$$

**Пример 2.** Вынести общий множитель за знак матрицы:

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.** Найти матрицу C=A+B, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Пример 4.** Вычислить произведение матриц $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$,

где $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Решение.** Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times 3}{\mathrm{A}}\cdot\underset{3\times 3}{\mathrm{B}}=\underset{2\times 3}{\mathrm{C}}$. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$\tilde{N}=\begin{pmatrix} (-1)\cdot 3+0\cdot 5+2\cdot(-2) & (-1)\cdot 0+0\cdot 4+2\cdot 0 & (-1)\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1 \\ 3\cdot 3+4\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+4\cdot 4+0\cdot 0 & 3\cdot 1+4\cdot 4+0\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 29 & 16 & 19 \end{pmatrix}$.

**Пример 5.** Найти $\mathrm{A}^2$, где $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

**Решение.** $\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}$.

## 3 Определители квадратных матриц

**Определителем матрицы первого порядка** $A=(a_{11})$, или **определителем первого порядка**, называется элемент $a_{11}$: $\Delta_1=|A|=a_{11}$. **Например**, пусть $A=(8)$, тогда $\Delta_1=|A|=8$.

Определитель матрицы A обозначается $|A|$, $\Delta$ или det A.

**Определителем матрицы второго порядка** $A=(a_{ij})$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое находится по формуле $\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

**Определителем матрицы третьего порядка** $A=(a_{ij})$**, или определителем третьего порядка,** называется число, которое находится по формуле $\Delta_3=|A|=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарриуса). Покажем это на схеме:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

**Например**,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot0\cdot5+2\cdot1\cdot2+(-1)\cdot4\cdot3-2\cdot0\cdot3-(-1)\cdot2\cdot5-4\cdot1\cdot1=$$

$$=0+4-12-0+10-4=-2.$$

Для того, чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потребуются некоторые дополнительные понятия.

**Минором** $M_{ij}$ **элемента** $a_{ij}$ матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента $a_{12}$ матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет $n^2$ миноров (n-1)-го порядка.

**Алгебраическим дополнением** $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i + j)$ - нечетное число.

**Например**, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

**Определение**. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраическое дополнение $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{s=1}^{n} a_{1S}A_{1S}$ (разложение по элементам 1-й строки).

**Например**, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

**<u>Свойства определителей:</u>**

1) Определитель не меняется, если в нем строки и столбцы поменять местами.

2) Если в определителе поменять местами какие-либо две строки или два столбца, то определитель изменит только знак.

3) Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

4) Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

5) Определитель равен нулю, если элементы каких-либо двух строк равны или пропорциональны.

6) Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое не равное нулю число. Это так называемый способ получения нулей.

**Пример**.

$(-3)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 7 \\ 5 & -13 & 12 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -13 & 12 \end{vmatrix} = -24 + 91 = 67$$

$(2)$

7) Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0$$

### *Решение типовых примеров*

**Пример 1.** Вычислить определитель второго порядка, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

**Решение.** $\Delta=|A|=\begin{vmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot 5-8\cdot 1=-18.$

**Пример 2.** Вычислить определитель третьего порядка $|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}$.

**Решение.** $\Delta=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 0+1\cdot 3+3\cdot 6=21.$

**Пример 3.** Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

**Решение.**

$\mathrm{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0;\qquad \mathrm{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3;\qquad \mathrm{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=6;$

$\mathrm{A}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=14;\qquad \mathrm{A}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1;\qquad \mathrm{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-5;$

$\mathrm{A}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-7;\qquad \mathrm{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5;\qquad \mathrm{A}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4.$

**Пример 4.** Вычислить определитель четвертого порядка $|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}4 & 6 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 4 & 6\end{vmatrix}$.

**Решение.** Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем:

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 6 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 4 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12 & 2 & -2 & 4\\ 13 & -4 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -10 & 12 & 4 & 6\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}12 & 2 & 4\\ 13 & -4 & 1\\ -10 & 12 & 6\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элемента 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A|=\begin{vmatrix}12 & 2 & 4\\ 12 & -4 & 1\\ -10 & 12 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-40 & 18 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ -88 & 36 & 6\end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A|=1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-40 & 18\\ -88 & 36\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-8)\cdot 18\cdot\begin{vmatrix}5 & 1\\ 11 & 2\end{vmatrix}=-144.$$

**Пример 5.** Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}.$$

(Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю).

Раскладывая по первому столбцу, получаем:

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}+0+0+0=2\cdot 3\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix}+0+0=$$

$$=2\cdot 3(-1)\cdot 4+0=-24.$$

## 4 Обратная матрица

**Определение.** Матрица $A^{-1}$ называется **обратной по отношению к квадратной матрице** $A$, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$.

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка. Необходимо отметить, что для существования матрицы $A^{-1}$ является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля $(|A| \neq 0)$, то такая квадратная матрица называется **невырожденной**, или **неособенной**; в противном случае $(\text{при } |A| = 0)$ - **вырожденной**, или **особенной**.

**Алгоритм вычисления обратной матрицы:**

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица А – вырожденная и обратная матрица $A^{-1}$ не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица А – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу $A'$, транспонированную к А.

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji}\,(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2 \ldots n)$ и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots n)$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A};\ (|A| \neq 0)$.

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы $A^{-1}$ исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ (п. 5 не обязателен).

### *Решение типовых примеров*

**Пример 1.** Найти матрицу, обратную к данной, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

**Решение.**

1. Определитель матрицы $|A| = 21 \neq 0$, т.е. матрица А – невырожденная и обратная матрица $A^{-1}$ существует.

1. Находим матрицу $A'$, транспонированную к А:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы $A'$ и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$, учитывая, что $A'_{ij} = A_{ji}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}0 & 14 & -7\\ -3 & -1 & 5\\ 6 & -5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{0}{21} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{3}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{5}{21}\\ \frac{6}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{4}{21}\end{pmatrix}.$$

5. Поверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$.

## 5 Ранг матрицы

В матрице А размером $m\times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k\le\min(m;n)$. Определители таких подматриц называются **минорами k-го порядка матрицы А**.

**Например**, из матрицы $A_{3\times 4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

**Рангом** матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы А обозначается rang A, rg A или r (A). Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A)\le\min(m;n)$;

б) $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда элементы матрицы равны нулю, т.е. А=О;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица А – невырожденная.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы. Назовем **элементарными преобразованиями** матрицы следующие:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).

2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.

3. Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.

4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

5. Транспонирование матрицы.

**Теорема 1.** Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т.е. ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица A называется **ступенчатой**, если она имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0,\ i=1,2,\dots,r;\ r \leq k$.

**Замечание.** Условие $r \leq k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор r-го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Покажем на примере вычисление ранга матрицы с помощью окаймляющих миноров и элементарных преобразований.

### *Решение типовых примеров*

**Пример 1.** Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

**Решение.** Для матрицы $A_{3\times4}$ ранг $r(A) \leq \min(3;4)=3$. Проверим, равен ли ранг трём, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е.

определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) \le 2$. Так как существует ненулевой минор второго порядка, например $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \ne 0$, то $r(A) = 2$.

**Пример 2.** Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

**Решение.**

1. Если $a_{11} = 0$, то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $a_{11} \ne 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы.

2. Если $a_{11} \ne 0$, то, умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11} = 0,\ -a_{31}/a_{11} = 2,\ -a_{41}/a_{11} = 1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме $a_{11}$) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $a_{22} \ne 0$ (в данном случае $a_{22} = -1 \ne 0$), то, умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно на $-a_{32}/a_{22} = -3,\ -a_{42}/a_{22} = -3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме $a_{12}, a_{22}$) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а, следовательно, и данной матрицы равен двум.

## 6 Метод обратной матрицы, формулы Крамера, метод Гаусса

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij}, b_i \left(i = 1, 2\ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$ - произвольные числа, называемые соответственно **коэффициентами при переменных** и **свободными членами** уравнений. В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$$

**Решением системы** (1) называется такая совокупность n чисел $\left(x_1 = k_1,\ x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n\right)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений. Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

**Например**, система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ - совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10;0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ несовместная, а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ -

совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее, бесконечное множество решений $\left(x_1 = c,\ x_2 = 10 - 2c, \text{ где } \ c - \text{любое число}\right)$.

Две системы уравнений называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где $A$ – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, $X$ – матрица-столбец переменных; $B$ – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, их произведение $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_x + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец.

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (1). На основании определения равенства матриц систему (1) можно записать в виде:

$$AX = B. \qquad (2)$$

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (1) при $m = n$ предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица $A^{-1}$.

Умножая слева обе части матричного равенства (2) на матрицу $A^{-1}$, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = \left(A^{-1}A\right)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец:

$$X = A^{-1}B \qquad (3)$$

**Теорема Крамера.** Пусть $\Delta$ - определитель матрицы системы (2), а $\Delta_j$- определитель матрицы, получаемой из матрицы А заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Формулы (4) получили название формул Крамера.

**Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных** – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

При решении методом Гаусса можно:

- переставлять местами два любых уравнения системы;
- умножать обе части уравнения на произвольное, отличное от нуля число;
- прибавлять к обеим частям одного уравнения соответствующие части другого, умноженного на какое-то постоянное число.

Система обычно решается с помощью преобразований расширенной матрицы (матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов).

Если в результате преобразования матрицы:

1) получится строка 0 0 0 … 0 c b – система имеет ***единственное решение:***

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_{n-1} + c \cdot x_n = b_i$$

2) появится строка, состоящая из нулей, т.е. 0 0 0 … 0 0 – система имеет ***множество решений:***

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$$

3) появится строка 0 0 0 … 0 b – система ***решений не имеет:***

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$$

### *Решение типовых примеров*

**Пример 1.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

**Решение.** а) Обозначим $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Тогда в матричной форме данная система имеет вид $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Найдем определитель $|\mathrm{A}| = 5$. Так как $|\mathrm{A}| \neq 0$, матрица А – невырожденная, и существует обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix};\ X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 11\\ 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 1\end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

б) Найдем определитель системы $\Delta=|A|=5$. Так как $\Delta\neq 0$, по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матриц А, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 11 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}=20;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix}=10;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}=5.$$

Теперь по формулам Крамера (4):

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{5}=4;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{10}{5}=2;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{5}{5}=1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

**Пример 2.** Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases}x_1-\ x_2+\ 2x_3=1\\ 5x_1-3x_2+2x_3=5\\ x_1+\ 3x_2+3x_3=18\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(-1) & (-5)\\ \searrow & \searrow\\ & \searrow\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 5 & -3 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 3 & 18\end{array}\right)\sim\begin{matrix}\\ (-2)\\ \searrow\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -8 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 17\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 17 & 17\end{array}\right)$$

$$0\quad 0\quad c\quad b$$

Запишем полученную систему треугольного вида

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=1 & x_1-4+2=1 & & \underline{x_1=3}\\ \quad 2x_2-8x_3=0 & 2x_2-8\cdot 1=0 & 2x_2=8 & \underline{x_2=4}\\ \qquad 17x_3=17 & & & \underline{x_3=1}\end{cases}$$

Ответ: (3, 4,1)

**Пример 3.** Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6,\\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=18,\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4,\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8.\end{cases}$$

**Решение.** Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

**Шаг 1.** Так как $a_{11} \neq 0$, исключим переменную $x_1$ из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2), (-3), (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

**Шаг 2.** Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, исключим переменную $x_2$ из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{117}{16} & \dfrac{117}{8} \end{array}\right).$$

**Шаг 3.** Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на $13{,}5/8 = 27/16$ и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную $x_3$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ \qquad\quad -8x_3 + x_4 = 6, \\ \qquad\qquad -\dfrac{117}{16} x_4 = \dfrac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \dfrac{6 - x_4}{-8} = \dfrac{6+2}{-8} = -1$; из второго $x_2 = \dfrac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \dfrac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения

$x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + (-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы $(1;\ 2;\ -1;\ 2)$.

**Пример 4.** Решить методом Гаусса систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

**Решение.** Преобразуем расширенную матрицу системы:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.

## 7 Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов

**Определение 1.** Геометрическим вектором, или просто вектором, называется **направленный отрезок.**

Вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B - начало и конец данного вектора, либо $\vec{a}$. Начало вектора называют **точкой его приложения**.

**Определение 2.** Вектор называется **нулевым,** если начало и конец его совпадают.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет при записи отождествлять нулевой вектор с вещественным числом нуль.

**Определение 3.** Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

**Определение 4.** Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

**Определение 5.** Два вектора называются **равными**, если они коллиннеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

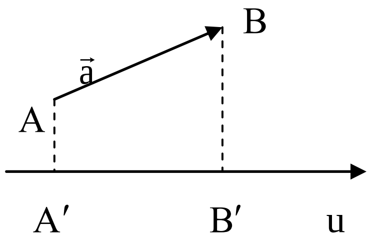
Все нулевые векторы считаются равными.

**Определение 6.** Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор**, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

**Определение 7.** Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется такой **вектор** $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

**Определение 8.** Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число $\alpha$ называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha>0$ и противоположное направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha<0$.

Обозначим буквами $A'$ и $B'$ основания перпендикуляров, опущенных на ось $u$ из точек A и B соответственно.




**Определение 9. Проекцией вектора** $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось $u$ называется величина $A'B'$ направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ оси $u$ и обозначается $пр_u\vec{a}$. $пр_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где $\varphi$ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью $u$.

Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Числа $x, y, z$ - называется декартовыми прямоугольными координатами вектора $\vec{a}$. Обозначим буквами $\alpha,\beta$ и $\gamma$ углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям координат; $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Длина вектора через его координаты имеет вид:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

откуда следует $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

**Определение 10.** Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^0$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{a}^0$ коллинеарен вектору $\vec{a}$,

2) $|\vec{a}^0|=1$.

Координатами орта вектора являются направляющие косинуса.

Если два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ заданы в декартовых прямоугольных координат $\vec{a}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}, \vec{a}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то:

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k},$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1)\vec{i} + (\alpha y_1)\vec{j} + (\alpha z_1)\vec{k}.$$

Условие коллинеарности векторов имеет вид:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

### *Решение типовых примеров*

**Задача 1.** Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , если $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (5;9;7)$.

**Решение.** $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2+5;3+9;-1+7) = (7;12;6)$.

**Задача 2.** Найти вектор $\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$, если $\vec{p} = (4;5;-6)$, $\vec{q} = (8;2;1)$.

**Решение.** $4\vec{p} = (4\times 4;5\times 4;-6\times 4) = (16;20;-24)$

$5\vec{q} = (8\times 5;2\times 5;1\times 5) = (40;10;5)$

Тогда:

$\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q} = (16+40;20+10;-24+5) = (56;30;-19)$.

**Задача 3.** Разложить вектор $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

**Решение.** $\vec{S} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta(\vec{a} - \vec{b}) + \gamma(2\vec{b} + 3\vec{c}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{a} - \beta\vec{b} + 2\gamma\vec{b} + 3\gamma\vec{c}.$$

Приравняем коэффициенты справа и слева:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 1, \\ -2\alpha + 3\gamma = 1, \end{cases} \text{ тогда } \alpha = \frac{2}{5};\ \beta = \frac{3}{5};\ \gamma = \frac{3}{5} \text{ и } \vec{S} = \frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q} + \frac{3}{5}\vec{r}.$$

**Задача 4.** Даны точки $A(1;\ 7;\ 0)$, $B(5;\ 7;\ 3)$, $C(7;\ 6;\ 5)$. Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$.

**Решение.** Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{AC} = (7-1;6-7;5-0) = (6;-1;5)$

$\overrightarrow{BC} = (7-5;6-7;5-3) = (2;-1;2)$.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = (6-2;\ -1-(-1);5-2) = (4;\ 0;\ 3)$.

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{4}{5},\quad \cos\beta = 0,\quad \cos\gamma = \frac{3}{5},\quad \vec{a}^{\,0}\left\{\frac{4}{5};\ 0;\ \frac{3}{5}\right\}.$$

## 8 Скалярное произведение векторов

**Определение 11.** Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Модулем вектора $\vec{a}=(x;y;z)$ (или длиной вектора $\vec{a}$) называется корень квадратный из суммы квадратов координат вектора:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

**Свойства скалярного произведения:**

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ - произведение векторов коммутативно.

2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\bar{a}^2=\left|\bar{a}\right|^2$$

$$\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|\cdot\cos 0°=\left|\bar{a}\right|^2 \Rightarrow \boxed{\left|\bar{a}\right|=\sqrt{\bar{a}^2}}$$

3) Если $\bar{a}\perp\bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=0}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos 90°=0$$

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=\left|\bar{i}\right|^2=1;\quad \bar{i}\cdot\bar{j}=\left|\bar{i}\right|\cdot\left|\bar{j}\right|\cdot\cos 90°=0$$

Причем, произведение одноименных орт равно единице, а разноименных орт равно нулю (см. таблицу):

| | $\bar{i}$ | $\bar{j}$ | $\bar{k}$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{i}$ | 1 | 0 | 0 |
| $\bar{j}$ | 0 | 1 | 0 |
| $\bar{k}$ | 0 | 0 | 1 |

4) Скалярное произведение векторов, заданных координатами равно сумме произведений одноименных координат:

$$\left(x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k}\right)\cdot\left(x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k}\right)=$$

$$=x_1\cdot\bar{i}\cdot x_2\cdot\bar{i}+\cancel{x_1\cdot\bar{i}\cdot y_2\cdot\bar{j}}+\cancel{x_1\cdot\bar{i}\cdot z_2\cdot\bar{k}}+\cancel{y_1\cdot\bar{j}\cdot x_2\cdot\bar{i}}+y_1\cdot\bar{j}\cdot y_2\cdot\bar{j}+$$

$$+\cancel{y_1\cdot\bar{j}\cdot z_2\cdot\bar{k}}+\cancel{z_1\cdot\bar{k}\cdot x_2\cdot\bar{i}}+\cancel{z_1\cdot\bar{k}\cdot y_2\cdot\bar{j}}+z_1\cdot\bar{k}\cdot z_2\cdot\bar{k}=$$

$$=\boxed{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}$$

5) Из формулы скалярного произведения векторов можно найти косинус угла между двумя векторами: $\cos\alpha = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$

В координатной форме: $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

### *Решение типовых примеров*

**Задача 1.** Перпендикулярны ли два вектора $\bar{a} = (3; -2; 6)$; $\bar{b} = (7; 4; 9)$. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

**Решение.** $3\cdot 7 + (-2)\cdot 4 + 6\cdot 9 = 21 - 8 + 54 = 67 \neq 0$, следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не перпендикулярны.

**Задача 2.** Даны два вектора $\bar{a} = (1; 2; -2)$; $\bar{b} = (2; -1; 2)$. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

**Решение**. $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = -\dfrac{4}{3\cdot 3} = -\dfrac{4}{9}$

Тогда: $\varphi = \pm\arccos\left(-\dfrac{4}{9}\right) + 2\pi n = \pm(\pi - \arccos\dfrac{4}{9}) + 2\pi n, n\in Z$

**Задача 3.** Найти угол $\alpha$ между векторами $\bar{p} = 2\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$**,** если $\bar{a} = (4; 1; -2)$; $\bar{b} = (1; 2; 3)$.

**Решение**. Зная, что $\cos\varphi = \dfrac{\bar{p}\cdot\bar{q}}{|\bar{p}|\cdot|\bar{q}|}$, определим координаты векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$:

$$\bar{p} = (2\cdot 4 + 1; 2\cdot 1 + 2; 2\cdot(-2) + 3) = (9; 4; -1)$$

$$\bar{q} = (4 - 1; 1 - 2; -2 - 3) = (3; -1; -5).$$

Найдем скалярное произведение векторов по их координатам:

$$\bar{p}\cdot\bar{q} = 9\cdot 3 + 4\cdot(-1) + (-1)\cdot(-5) = 27 - 4 + 5 = 28$$

Их длины равны:

$$|\bar{p}| = \sqrt{9^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{81 + 16 + 1} = \sqrt{98}$$

$$|\bar{q}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}$$

Тогда, $\cos\varphi = \dfrac{28}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{35}} = \dfrac{28}{\sqrt{3430}}$,

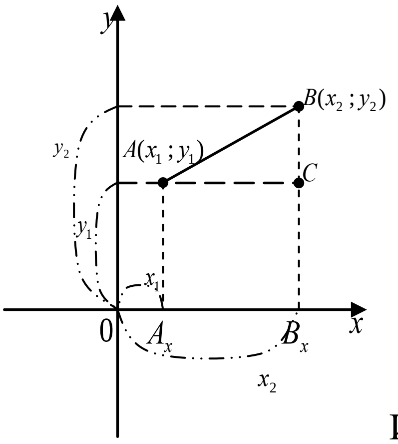
следовательно, $\alpha = \pm\arccos\dfrac{28}{\sqrt{3430}} + 2\pi n, n\in Z$.

## 9 Понятие уравнения линии. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

***Линия*** – геометрическое место точек (совокупность точек), обладающих определенным свойством.
Произвольная точка *М* линии называется ***текущей точкой*** линии, а ее координаты - ***текущими координатами***.

Уравнение, связывающее переменные $x$ и $y$, называется ***уравнением линии***, если ему удовлетворяют координаты любой точки линии и только они.

Пусть в прямоугольной системе координат заданы две точки с координатами $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Найдем расстояние между ними.




Из $\Delta ABC$ по теореме Пифагора имеем: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$, но $AC=A_xB_x=|x_2-x_1|$; $CB=A_yB_y=|y_2-y_1|$.

Подставим в формулу: $AB=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}$ или

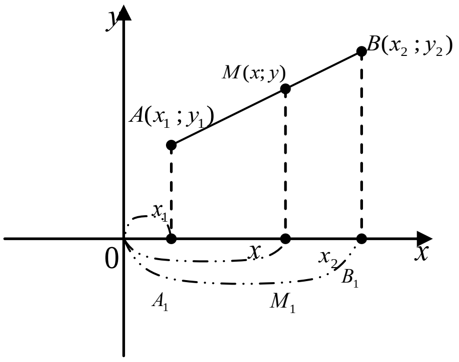
$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

Значит, ***расстояние между двумя точками*** равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат.

**Пример:** Определить расстояние между двумя точками *A* (2; 3); *B* (5; -1).

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

Пусть даны точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Найти координаты третьей точки *М*, которая делит отрезок *АВ* так, что отношение $\frac{AM}{MB}$ равно положительному числу $\lambda$.




Составим пропорцию: $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{A_1M_1}{M_1B_1}$

Т.к. $\dfrac{AM}{MB}=\lambda$, $A_1M_1=x-x_1$ и $M_1B_1=x_2-x$, то получим:

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x} \quad ; \quad x_2\lambda-x\lambda=x-x_1$$

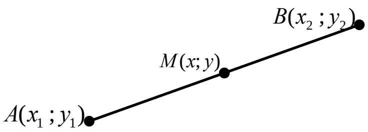
Перегруппируем: $x+x\lambda=x_2\lambda+x_1$ ; $x(1+\lambda)=x_1+x_2\lambda$.

Отсюда: $\boxed{x=\dfrac{x_1+x_2\lambda}{1+\lambda}}$.

Совершенно аналогично можно получить $\boxed{y=\dfrac{y_1+y_2\lambda}{1+\lambda}}$.

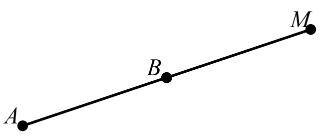
**<u>Замечания:</u>**

1)



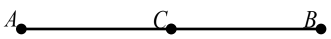

Если $\dfrac{AM}{MB}=\lambda>0$, то точка $M$ делит отрезок $AB$ внутренним образом.

2)




Если $\dfrac{AM}{MB}=\lambda<0$, то точка $M$ делит отрезок $AB$ внешним образом.

3)




Пусть делящая точка является серединой отрезка $AB$. Следовательно, $\dfrac{AC}{CB}=1$. Тогда $\boxed{x=\dfrac{x_1+x_2}{2}}$ и $\boxed{y=\dfrac{y_1+y_2}{2}}$, т. е. ***координаты середины отрезка равны полусумме координат концов отрезка.***

Для того чтобы найти ***точки пересечения двух линий***, достаточно совместно решить систему двух уравнений этих линий.

## 10 Прямая линия на плоскости

Прямая линия $\ell$ задается уравнением первой степени относительно x и y.

$$\ell : Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Это <u>общее уравнение</u> прямой $\ell$. Здесь коэффициенты A и B есть координаты нормального вектора $\vec{N} = (A, B)$ (рис. 1).

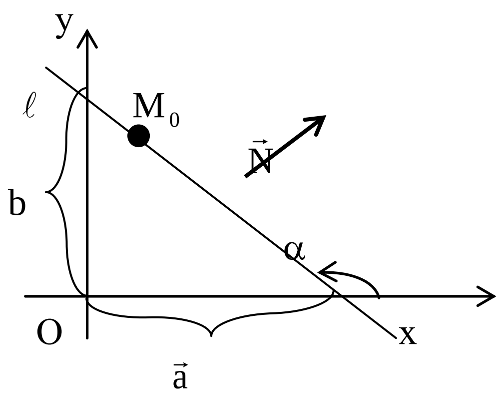


Рис. 1

Существуют другие виды уравнения прямой $\ell$. Так, решив уравнения (1) относительно y, получим (если $B \neq 0$):

$\ell : y = kx + b, \quad k = -\dfrac{A}{B}, \quad b = -\dfrac{C}{B}.$

Это ***уравнение прямой с угловым коэффициентом.***

Здесь $k = \mathrm{tg}\alpha$ - угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY (рис. 1). Если $C \neq 0$, то уравнение (1) можно записать в форме: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Здесь a и b - величины отрезков, которые прямая $\ell$ отсекает на осях OX и OY (рис. 1).

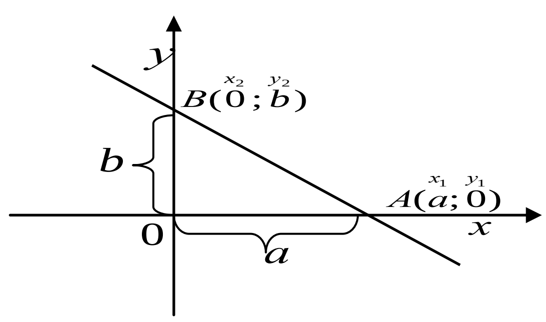
Если ***прямая проходит через две заданные точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Пусть нам дана точка $A(x_0; y_0)$ и угловой коэффициент прямой *k*. Возьмем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Так как точка $A \in l$, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению, следовательно, $y_0 = kx_0 + b$. Вычтем из (1)-го уравнения (2)-е, получим:

$$-\begin{array}{l} y = kx + b \\ y_0 = kx_0 + b \end{array} \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = k(x - x_0)$$ - ***уравнение пучка прямых.***

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. Подставим в него вместо $(x_1; y_1)$ координаты точки *A*, а вместо $(x_2; y_2)$ координаты точки *B*.




Получим: $\dfrac{y - 0}{b - 0} = \dfrac{x - a}{0 - a}$ ;

$$\frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a} \quad ; \quad \frac{y}{b}=\frac{x}{-a}+1, \; \frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1.$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - ***уравнение прямой в отрезках на осях,***

где $a$ и $b$ – отрезки, отсекаемые прямой на осях $OX$ и $OY$.

Если у двух пересекающихся прямых $l_1$ и $l_2$ известны угловые коэффициенты $k_1$ и $k_2$, то можно найти угол между двумя прямыми:

$\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1 \quad ; \; \operatorname{tg}\alpha_2 = k_2 \quad ; \; \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$, а по формуле тангенса разности имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1+k_1 \cdot k_2}$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \; \frac{k_2 - k_1}{1+k_1 \cdot k_2} \; \right|.$$

**<u>Частные случаи:</u>**

1) Пусть $l_1 \| l_2$, тогда угол между ними равен нулю $(\alpha = 0)$. Тогда:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0 \quad ; \quad \frac{k_2 - k_1}{1+k_1 \cdot k_2} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k_2 - k_1 = 0 \quad ; \quad \boxed{k_1 = k_2}$$

т.е., если угловые коэффициенты равны, то прямые параллельны.

2) Пусть $l_1 \perp l_2$, тогда α = 90°, а тангенс 90° - не существует. Следовательно,

$$\frac{k_2 - k_1}{1+k_1 \cdot k_2} = \text{не существует} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}} \quad ,$$

т.е. если угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, то прямые перпендикулярны.

3) Возможны следующие расположения прямых $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

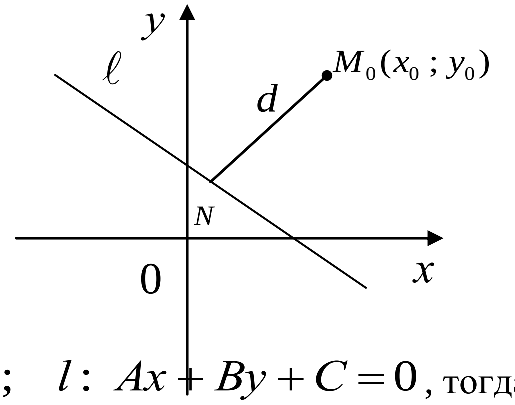
а) если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются;

б) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны;

в) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

## 11 Расстояние от точки до прямой

Под расстоянием от точки $M_0$ до прямой $l$ понимают длину перпендикуляра $M_0N = d$, опущенного из точки $M$ на прямую $l$.




$M_0 \notin l$ ; $l:\ Ax + By + C = 0$, тогда:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

### *Решение типовых примеров*

**Задача 1.** Написать уравнение прямой $\ell$, проходящей через точки $M_1(-1;4)$ и $M_2(5;2)$. Найти угловой коэффициент прямой $\ell$ и отрезки, которые она отсекает на осях координат.

**Решение.**

$\dfrac{x+1}{5+1} = \dfrac{y-4}{2-4}$, $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-4}{-2}$, $-2x-2 = 6y-24$, $x+3y-11=0$ - общее уравнение прямой. Отсюда следует, что $3y = -x+11$ или $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{11}{3}$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом. Здесь $k = -\dfrac{1}{3}$. Из уравнения $x+3y-11=0 \Rightarrow x+3y=11$, $\dfrac{x}{11} + \dfrac{3y}{11} = 1$, $\dfrac{x}{11} + \dfrac{y}{11/3} = 1$. Итак, a=11, b=$\dfrac{11}{3}$.

**Задача 2.** Найти угол между прямыми $\ell_1: x+2y+6=0$ и $\ell_2: 3x+y-2=0$.

**Решение.** Так как $\ell_1: y = -1/2x - 3$, то $k_1 = -1/2$. Аналогично, $\ell_1: y = -3x + 2$, то $k_2 = -3$.

Тогда

$$\mathrm{tg}\Theta = \frac{-3 + 1/2}{1 + (-3)\cdot(-1/2)} = -1, \quad \Theta = 135^0.$$

**Задача 3.** Совпадают, параллельны или пересекаются следующие прямые:

а) $l_1: 2x + y - 1 = 0$ и $l_2: x + 5y + 5 = 0$;

б) $l_1: -x + 6y + 2 = 0$ и $l_2: x - 6y - 2 = 0$;

в) $l_1: 3x + 6y + 7 = 0$ и $l_2: x + 2y + 14 = 0$.

**Решение.** Найдем соотношение соответствующих коэффициентов прямых:

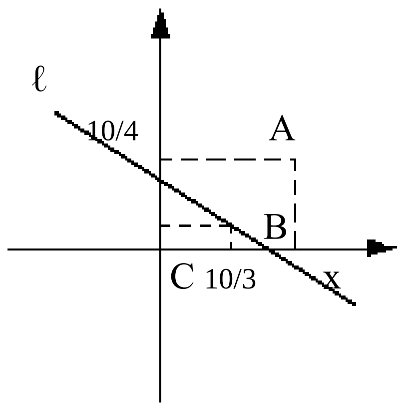
а) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{5}$, следовательно, прямые пересекаются;

б) $\dfrac{-1}{1} = \dfrac{6}{-6} = \dfrac{2}{-2}$, следовательно, прямые совпадают;

в) $\dfrac{3}{1} = \dfrac{6}{2} \neq \dfrac{7}{14}$, следовательно, прямые параллельны.

**Задача 4.** Найти расстояние от точек A(4;3), B(2;1) и C(1;0) до прямой *3x+4y-10=0* . Построить точки и прямую.

**Решение**. A=3, B=4, C=-10




$$d_A = \frac{|3\cdot 4 + 4\cdot 3 - 10|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|12 + 12 - 10|}{5} = \frac{14}{5}$$

$$d_B = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 1 - 10|}{5} = 0$$

$$d_C = \frac{|3\cdot 1 + 4\cdot 0 - 10|}{5} = \frac{7}{5}$$

Уравнение данной прямой в отрезках $\ell: \quad \dfrac{x}{\frac{10}{3}} + \dfrac{y}{\frac{10}{4}} = 1$

**Задача 5.** Даны координаты вершин треугольника $A(2,5),\ B(5,1),\ C(11,3)$.

1) Вычислить длину стороны $BC$.

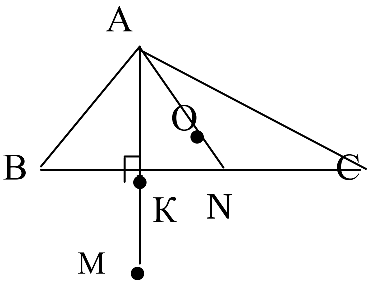
2) Составить уравнения сторон $AB$ и $BC$.

3) Найти точку пересечения медиан.

4) Найти тангенс угла B.

5) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину.

6)Найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A, относительно прямой BC.




**Решение.**

1) Длину стороны BC определим как расстояние между двумя точками: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, тогда $|BC| = \sqrt{(11-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

2) Уравнение прямой BC: $\dfrac{x - x_в}{x_c - x_в} = \dfrac{y - y_в}{y_c - y_в}$; $\dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y-1}{2}$; $x - 3y - 2 = 0$.

Уравнение прямой $AB$: $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$; $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-5}{-4}$; $4x + 3y - 23 = 0$.

3) Найдем координаты точки N – середины стороны BC:

$$x_N = \frac{x_в + x_c}{2} = \frac{5+11}{2} = 8;\ y_N = \frac{y_в + y_c}{2} = \frac{1+3}{2} = 2;\ N(8,2).$$

Точка пересечения медиан O делит каждую медиану на отрезки в отношении $\lambda = 2:1$.

Используем формулы деления отрезка в данном отношении $\lambda$:

$$x_0 = \frac{x_A + \lambda x_N}{1+\lambda};\ y_0 = \frac{y_A + \lambda y_N}{1+\lambda};$$

$$x_0 = \frac{2 + 2\cdot 8}{3} = 6;\ y_0 = \frac{5 + 2\cdot 2}{3} = \frac{9}{3} = 3;\ O(6,\ 3).$$

4) Тангенс угла при вершине В найдем по формуле $tg\angle B = \dfrac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}}$.

Уравнение прямой ВС: $x - 3y - 2 = 0$, тогда $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$, $k_{BC} = \dfrac{1}{3}$.

Уравнение прямой $AB$: $4x + 3y - 23 = 0$, тогда $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{23}{3}$, $k_{AB} = -\dfrac{4}{3}$.

$$tg\angle B = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{1}{3}}{1 + (-\frac{4}{3}) \cdot \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = -\frac{9}{3} = -3.$$

5) Уравнение высоты АК запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ перпендикулярно прямой $BC$. Так как $AK \perp BC$, то

$$k_{AK} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

Тогда уравнение $AK$ найдем по формуле: $y - y_A = k_{AK}(x - x_A)$.

$y - 5 = -3(x - 2),\ y + 3x - 11 = 0$.

Длину высоты АК можно найти как расстояние от точки А до прямой ВС: $|AK| = d = \dfrac{|1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

6) Точка М, симметричная точке А относительно прямой ВС, расположена на прямой АК, перпендикулярной к прямой ВС, на таком же расстоянии от прямой, как и точка А. Координаты точки К найдем как решение системы $\begin{cases} x - 3y - 2 = 0, \\ 3x + y - 11 = 0. \end{cases}$ Систему решим по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 35;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5;$$

$x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{35}{10} = \dfrac{7}{2}$; $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$; следовательно, $K\left(\dfrac{7}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

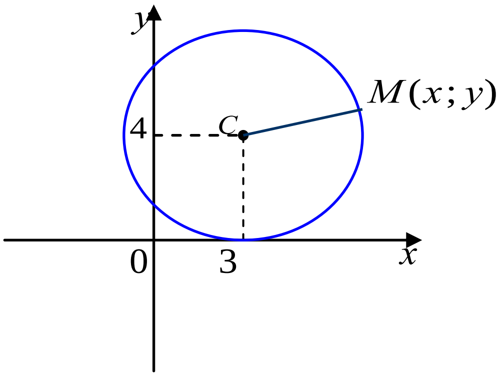
Точка К является серединой отрезка АМ.

$x_К = \frac{x_А + x_М}{2}$; $\frac{7}{2} = \frac{2 + x_М}{2}$; $x_М = 5$; $y_К = \frac{y_А + y_М}{2}$; $\frac{1}{2} = \frac{5 + y_М}{2}$; $y_М = -4$; $М(5, -4)$.

## 12 Кривые второго порядка

Линии, описывающиеся уравнениями второй степени относительно x и y, называются кривыми второго порядка. К ним относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

**Окружность.**




Уравнение окружности с центром в точке *C (a; b)* и радиусом *R* имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$ - ***нормальное уравнение окружности.***

Если центр окружности находится в начале координат, то $a = b = 0$ и уравнение примет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$ - ***каноническое уравнение окружности***

**Эллипс**.

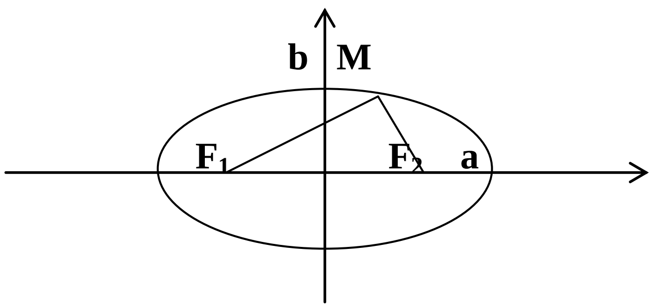
Множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная *2a*, называется *эллипсом.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ - ***каноническое уравнение эллипса,***

где $a$ – большая полуось;

$b$ – малая полуось.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$ - ***нормальное уравнение эллипса.***




$F_1$, $F_2$ – фокусы. $F_1$ = (c; 0); $F_2$(-c; 0) c – половина расстояния между фокусами;

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ . Т.к. $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

**Гипербола.**

Множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний, которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная равная *2a*, называется ***гиперболой***.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ - ***каноническое уравнение гиперболы,***

где $a$ – действительная полуось;

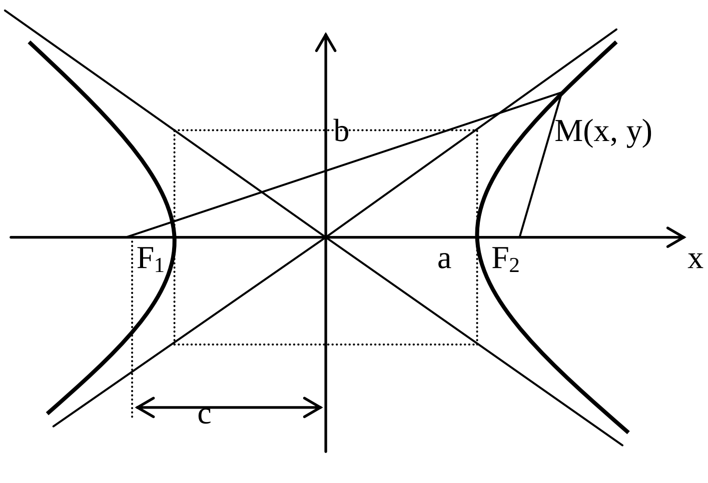
$b$ - мнимая полуось.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$ - ***нормальное уравнение гиперболы,***

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$ - ***уравнение асимптот гиперболы.***

$F_1$, $F_2$ – фокусы гиперболы.

$F_1F_2 = 2c$. $c^2 = a^2 + b^2$

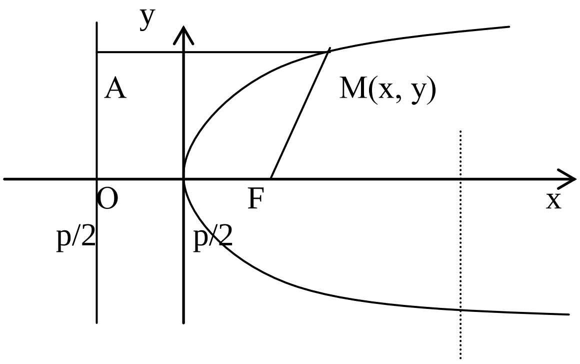



Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

**Парабола.**

Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой фокусом, и одной прямой, называемой директрисой, называется ***параболой***.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой**.**




$y^2 = 2px$ - ***каноническое уравнение параболы***

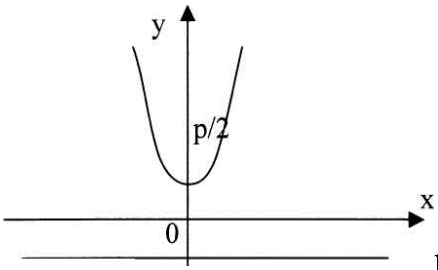
$(y-b)^2 = 2p(x-a)$ - ***уравнение параболы со смещенной вершиной (нормальное уравнение параболы)***

Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы.

Уравнение директрисы: x = -p/2.

Фокус параболы $F(\frac{p}{2};0)$.

$x^2 = 2py$ - парабола, симметричная относительно оси ОУ.




$y = -\frac{p}{2}$ - директриса

Эксцентриситет параболы считается равным 1.

## 13 Числовая последовательность и ее предел

***Определение 1.*** Если каждому числу $n$ из натурального ряда чисел $1,2,3,...,n,...$ поставлено в соответствие действительное число $u_n$, то множество действительных чисел $u_1,u_2,u_3,...,u_n,...$ называется числовой последователь-ностью и обозначается $\{u_n\}$.

Числа $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ называются элементами последовательности. $u_n$ – общий член последовательности.

Последовательность $\{u_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M, что для любого ее элемента $u_n$ выполняется неравенство:

$$u_n \le M \qquad (u_n \ge M).$$

Последовательность $\{u_n\}$ называется ***ограниченной***, если она ограничена сверху и снизу.

***Определение 2.*** Число $a$ называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что для $n > N$ выполняется неравенство:
$|u_n - a| < \varepsilon$.

Символическая запись $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Последовательность, имеющую предел, называют сходящейся.

Неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенству $a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$, которое означает, что все элементы последовательности $\{u_n\}$, номера которых $n > N$, находятся в $\varepsilon$ – окрестности точки $a$.

***Теорема 1.*** Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

***Теорема 2.*** Сходящаяся последовательность ограничена.

***Теорема 3.*** Алгебраическая сумма, произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен соответственно алгебраической сумме, произведению пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \pm \lim_{n\to\infty} v_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \cdot v_n = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n.$$

***Теорема 4.*** Частное двух сходящихся последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \ne 0$, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}.$$

***Теорема 5.*** Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

**Пример.** Доказать, что последовательность $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, ..., \frac{n}{2n+1}, ...$ при $n \to \infty$ имеет пределом число $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $\varepsilon$ – произвольное положительное число. Требуется доказать, что существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ выполняется неравенство:

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon .$$

Найдем $\left| \dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2} \right| = \left| -\dfrac{1}{2(2n+1)} \right| = \dfrac{1}{2(2n+1)}$.

Таким образом, неравенство $\left| u_n - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$ выполняется, если $\dfrac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon,$ откуда $2(2n+1)\varepsilon > 1$ или $n > \dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$.

В качестве числа N можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$.

Зададим $\varepsilon = \dfrac{1}{40}$, тогда $n > \dfrac{1}{4 \cdot \dfrac{1}{40}} - \dfrac{1}{2} = 19\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, начиная с номера $n = 20$, будет выполняться неравенство $\left| u_n - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$, то есть, $\left| \dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{40}$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

## 14 Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть $x_0 \in X$ или $x_0 \bar{\in} X$. Возьмем из множества X последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ элементы которой отличны от $x_0$ $(x_n \neq x_0)$, сходящуюся к $x_0$. Последовательность функции $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ тоже образуют числовую последовательность.

***Определение 1.*** Число А называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к $x_0$ последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента $x$, отличных от $x_0$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу А.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Функция $y = f(x)$ в точке $x_0$ может иметь только один предел.

***Определение 2.*** Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (или в точке $x_0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если число $A_1$ есть предел функции $y = f(x)$ при $x$ стремящемся к $x_0$ так, что $x$ принимает только значения, меньшие $x_0$, то число $A_1$ называется левым пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или $f(x_0 - 0) = A_1$.

Аналогично определяется правый предел функции $y = f(x)$ при $x$ стремящемся к $x_0$, при $x > x_0$:

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ или $f(x_0 + 0) = A_2$.

Если левый и правый пределы функции $y = f(x)$ существуют и равны, то есть $A_1 = A_2 = A$, то число А есть предел этой функции в точке $x_0$, то есть, если:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A, \text{ то } \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

***Определение 3.*** Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $M > 0$, что для всех значений $x$, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

**Основные теоремы о пределах.**

***Теорема 1.*** Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = B$, то функции $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$ и $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеют в точке $x_0$ пределы равные соответственно $A \pm B$; $A \cdot B$ *и* $\dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

***Теорема 2.*** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)\right]^n$.

***Теорема 3 .*** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} C = C$.

***Теорема 4 .*** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} C f(x) = C \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$.

***Теорема 5.*** Пусть функция $f(x)$ – имеет предел в данной точке $x_0$. Тогда она ограничена в некоторой окрестности точки $x_0$.

***Теорема 6.*** Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $q(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x_0$, за исключением может быть, самой точки $x_0$, и для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq q(x) \leq \varphi(x)$. Пусть, кроме того $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} q(x) = A$.

## 15 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

***Определение 1.*** Функции $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$.

***Определение 2.*** Функции $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

***Теорема.*** Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию, являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

***Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.*** Для того, чтобы функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ имела пределом число А, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \to x_0$.

Деление одной бесконечно малой функции на другую может привести к различным результатам.

Пусть $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \beta(x) = 0$.

1) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

2) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые одного порядка.

3) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

***Важнейшие эквивалентности***

1) $\sin x \sim x$;

2) $\operatorname{tg} x \sim x$;

3) $\arcsin x \sim x$;

4) $\operatorname{arctg} x \sim x$;

5) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;

6) $e^x - 1 \sim x$;

7) $a^x - 1 \sim x$;

8) $\ln(1+x) \sim x$;

9) $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$;

10) $(1+x)^k - 1 \sim kx$;

(в частности $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$).

4) Если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0,$ то $\alpha(x)$ – бесконечно малая *n*-го порядка относительно $\beta(x)$.

***Определение 3.*** Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих неравенству, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$. В этом случае записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Аналогично определяется бесконечно большая функция при $x \to \infty$.

***Теорема о связи между бесконечно малой и бесконечно большой функциями.***

Функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой. Функция обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

## 16 Замечательные пределы

***Первый замечательный предел:***

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

***Второй замечательный предел:***

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

## 17 Вычисление пределов

При вычислении предела функции $y = f\left(x\right)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция $f\left(x\right)$ является элементарной и предельное значение аргумента функции принадлежит её области определения, тогда вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, так как предел элементарной функции $f\left(x\right)$ при $x \to x_0$, где $x_0$ входит в область её определения, равен частному значению функции при $x = x_0$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$.

2. Функция $f\left(x\right)$ в точке $x = x_0$ не определена, или же вычисляется предел функции $f\left(x\right)$ при $x \to \infty$.

Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится непосредственно к применению теорем о пределах, свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f\left(x\right)$ в точке $x = x_0$ или при $x \to \infty$ представляет собой неопределённость типа «$\frac{0}{0}$»; «$\frac{\infty}{\infty}$»; «$0\cdot\infty$»; «$\infty-\infty$»; «$1^{\infty}$»; «$0^0$»; «$\infty^0$».

### *Решение типовых примеров*

**Задача 1.** Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+1\right) = 5 \neq 0$, то применим теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x^2+1} = \frac{4+2-2}{4+1} = \frac{4}{5}.$$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x-3}{loq_2\left(x^2+1\right)}$.

Решение.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x-3}{loq_2\left(x^2+1\right)} = \frac{\left(-1\right)^2+5\cdot\left(-1\right)-3}{loq_2\left[\left(-1\right)^2+1\right]} = \frac{-7}{loq_2 2} = -7$$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

44. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Решение. Функция $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ в точке $x=2$ не определена. Так как при $x=2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем неопределенность вида «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на $x-2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, так как $x^2-5x+6=0$ при $x_1=2,\quad x_2=3$.

$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, так как $x^2-3x+2=0$ при $x_1=2,\quad x_2=1$.

Итак, имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{2-3}{2-1}=-1.$$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}$.

Решение. При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на $x-3$. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению $3-\sqrt{x+6}$, то есть на выражение $3+\sqrt{x+6}$, получим

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(3-\sqrt{x+6}\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$ {перемножив сопряженные выражения, избавимся от иррациональности в числителе} =

$$=\lim_{x\to 3}\frac{9-(x+6)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=-\frac{1}{3+\sqrt{3+6}}=-\frac{1}{3+3}=-\frac{1}{6}.$$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{x+6}-2\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+6-4}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\frac{1}{-4\left(\sqrt{4}+2\right)}=-\frac{1}{4(2+2)}=-\frac{1}{16}.$$

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x+3-4)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+3}+2}{\sqrt{1+1}+\sqrt{2}}=\frac{2+2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^3+1\right)=\infty;\quad \lim_{x\to\infty}\left(3x^2+2x-1\right)=\infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида «$\dfrac{\infty}{\infty}$». Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на $x^3$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Решение. В заданном примере имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)=\infty$, значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{2}{9-x^2}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Приведем дроби, стоящие под знаком предела, к общему знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{2}{9-x^2}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{3+x-2}{9-x^2}=\lim_{x\to 3}\frac{1+x}{9-x^2}=\infty.$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Для вычисления этого предела воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{x\cdot x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=8\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=8\cdot 1=8$$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Решение. В данном примере имеем неопределенность вида «$1^\infty$». Для его вычисления используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^6=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^6=e^6.$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 4x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}\cdot\cos 0=\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}.$$

При вычислении этого предела воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin x \sim x$ при $x\to 0$. Следовательно, $\sin 3x\sim 3x$ и $\sin 4x\sim 4x$ при $x\to 0$. Затем бесконечно малые функции в числителе и в знаменателе заменили эквивалентными им функциями.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}+2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида « $1^{\infty}$». Для вычисления предела используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}+2}=\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}\cdot(1-5x)^2=$

$$=\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}\cdot(-5)}\cdot 1=\left[\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}\right]^{-5}=e^{-5}.$$

Вычислить односторонние пределы:

16. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{4}{(x-2)^3}$.

Решение. Пусть $x<2$, тогда при $x\to 2-0$ функции $x-2$ и $(x-2)^3$ являются отрицательными бесконечно малыми, поэтому $\dfrac{4}{(x-2)^3}$ – отрицательная бесконечно большая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{4}{(x-2)^3}=-\infty.$$

При $x>2$ функции $x-2$ и $(x-2)^3$ – положительные бесконечно малые, поэтому $\dfrac{4}{(x-2)^3}$ – положительная бесконечно большая функция.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{4}{(x-2)^3}=+\infty$.

17. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение. При $x\to 1-0$ функция $x-1$ – отрицательная бесконечно малая, следовательно $\dfrac{1}{x-1}$ – отрицательная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно малая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1.$$

При $x\to 1+0$ функция $x-1$ – положительная бесконечно малая, следовательно, $\dfrac{1}{x-1}$ – положительная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно большая положительная функция. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0.$$

## 18 Непрерывность функции

### а) Определение непрерывности функции в точке

***Определение 1***. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если предел функции и ее значение в этой точке равны, то есть:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$, так как $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

Таким образом, для непрерывной функции можно менять знак функции и знак предела.

Из определения непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$ следует:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$$

или

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$

***Определение 2.*** (на языке «$\varepsilon-\delta$»). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству:

$$|x-x_0|<\delta$$

выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Разность $x-x_0$ называется приращением аргумента $x$ в точке $x_0$ и обозначается $\Delta x = x - x_0$.

Разность $f(x)-f(x_0)$ называется приращением функции в точке $x_0$ и обозначается

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \text{ или } \Delta y = f(x) - f(x_0).$$

***Определение 3.*** Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

***Теорема 1.*** Все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

***Теорема 2.*** Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции в точке $x_0$, то функции $f(x) \pm \varphi(x)$; $f(x)\cdot\varphi(x)$; $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ также непрерывны в точке $x_0$ (последняя при условии, что $\varphi(x_0) \neq 0$).

***Теорема 3.*** Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$ непрерывна в точке $x_0$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на $[a,b]$, если она непрерывна в каждой его точке.

**б) Точки разрыва функции**

***Определение 1.*** Точка $x_0$ называется точкой разрыва функции $f(x)$, если эта функция не является непрерывной в точке $x_0$.

***Определение 2.*** Точка разрыва $x_0$ называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если в этой точке существуют односторонние пределы. Разрывы первого рода делятся на два вида: скачки и устранимые разрывы.

Если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x_0$ существуют, но не равны, то в точке $x_0$ функция имеет скачок:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

или

$$f(x_0-0) \neq f(x_0+0).$$

Если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x_0$ существуют и равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то функция $f(x)$ в точке $x_0$ имеет устранимый разрыв:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$$

или

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0).$$

## 19 Производная функции

**Определение 1.** Производной функции $f(x)$ в точке $x$ называется предел отношения приращения функции $\triangle f(x)$ в этой точке к приращению аргумента $\triangle x$, при условии, что $\triangle x \to 0$.

Обозначение производной функции $y = f(x)$

$$f'(x), y', \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}.$$

По определению:

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

или

$$y' = \lim_{x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \quad y' = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Операцию нахождения производной называют дифференцированием.

### *Основные правила и формулы дифференцирования*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(u+v-w)' = u' + v' - w'$ | |
| 2. | $(uv)' = u'v + v'u$ | |
| 3. | $(cu)' = cu'$ | |
| 4. | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ | $c' = 0, \quad c = const$ |
| 5. | $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$ | $x' = 1$ |
| 6. | $(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$ | $(x^n)' = nx^{n-1}$ |
| 7. | $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}; \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 8. | $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ | $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ |
| 9. | $(e^u)' = e^u \cdot u'$ | $(e^x)' = e^x$ |
| 10. | $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| 11. | $(\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$ | $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ |
| 12. | $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ | $(\sin x)' = \cos x$ |

| | | |
|---|---|---|
| 13. | $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$ | $\left(\cos x\right) = -\sin x$ |
| 14. | $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ | $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| 15. | $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$ | $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| 16. | $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 17. | $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 18. | $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ | $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ |
| 19. | $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$ | $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ |

### ***Решение типовых примеров***

Найти производные от функций:

*а) Производные элементарных функций*

**Пример 1.** $y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$

Решение.

$$y' = 15x^2 - 4x + 3$$

**Пример 2.** $y = 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{x^2}$

Решение. Перепишем заданное выражение, используя дробные и отрицательные показатели:

$$y = 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-2}$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + 3 \cdot (-2) x^{-3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$$

**Пример 3**. $y = x^3 \cos x$

Решение. По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$y' = (x^3)' \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

**Пример 4**. $y = \dfrac{arctgx}{x^3}$

Решение. Применим правило дифференцирования дроби:

$$y' = \frac{(arctgx)' x^3 - arctgx (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{x^3 \cdot \dfrac{1}{1+x^2} - arctgx \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x - 3(1+x^2) arctgx}{x^4 (1+x^2)}$$

б) *Производные сложных функций*

**Пример 5**. $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$.

Решение. Вводим вспомогательную функцию $u = x^2 + 3x + 1$, тогда можно записать $y = \sqrt{u}$, зная, что:

$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, получим $y' = \frac{(x^2 + 3x + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}} = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$

**Пример 6**. $y = (x^2 + 5x + 7)^8$

Решение. Пусть $u = x^2 + 5x + 7$, тогда $y = u^8$, $y' = 8u^7 \cdot u'$

$u' = 2x + 5$

$y = 8(x^2 + 5x + 7)^7 (2x + 5)$

## 20 Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) от функции $y = f(x)$ называется производная от её производной $y' = f'(x)$, то есть:

$$y'' = \left[ f'(x) \right]'$$

Производной $n$-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от её $(n-1)$-ой производной:

$$y^{(n)} = \left[ f^{(n-1)}(x) \right]'.$$

Обозначения $y''$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$; $y^{(n)}$; $\frac{d^n y}{dx^n}$

### *Решение типовых примеров*

**Пример 1.** Найти производную 2-го порядка от функции $y = \sin^2 x$.

Решение.

$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x \qquad y'' = 2\cos 2x$

**Пример 2.** Найти производную третьего порядка функции $y = x\ln 2x$.

Решение.

Продифференцируем эту функцию трижды:

$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1;$

$y'' = \left(\ln 2x + 1\right)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x};$

$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

Итак, $\left(x\ln 2x\right)''' = -\frac{1}{x^2}$.

## 21 Производная неявно заданной функции

Функция $y = f\left(x\right)$ задана неявно уравнением $F\left(x,y\right) = 0$, если при подстановке её в это уравнение, она обращает его в тождество:

$$F\left(x, f\left(x\right)\right) \equiv 0.$$

Если функция $y = f\left(x\right)$ задана неявно уравнением $F\left(x,y\right) = 0$, то для нахождения производной $y'$ нужно продифференцировать по $x$ обе части этого уравнения, учитывая, что $y$ есть функция от $x$, а затем разрешить полученное уравнение относительно $y'$.

Чтобы найти $y''$ неявно заданной функции, надо уравнение $F\left(x,y\right) = 0$ дважды продифференцировать по $x$ и т.д.

### *Решение типовых примеров*

Найти производную неявно заданной функции

**Пример 1.** $xy^2 = \operatorname{ctg} y$.

Решение.

$x'y^2 + 2xyy' = -\frac{y'}{\sin^2 y}$; $y^2 + 2xyy' = -\frac{y'}{\sin^2 y}$; $y^2 \sin^2 y = -y'\left(2xy\sin^2 y + 1\right)$;

$y' = -\frac{y^2 \sin^2 y}{2xy\sin^2 y + 1}$.

**Пример 2.** Найти $y'$: $x^3 \cdot y^2 + 5xy + 4 = 0$

Решение. Рассматриваем у как функцию х. Находим производную.

$3x^2 \cdot y^2 + 2x^3 yy' + 5y + 5xy' = 0$

Решаем полученное уравнение относительно y':

$y' = -\frac{3x^2 y^2 + 5y}{2x^3 y + 5x}$

**Пример 3**. $arctgy - y + x = 0$ Найти y'.

Решение.

$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0$ или $y' - y' - y^2 y' + 1 + y^2 = 0$. $y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1$, тогда

$y'' = -2y^{-3} \cdot y' = -\frac{2y'}{y^3}$. В правую часть вместо $y$ подставим его значение:

$y'' = -\frac{2}{y^3} \cdot \left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$

## 22 Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$, т.е. имеет в этой точке конечную производную $y' = f'(x)$, то:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

***Определение 2.*** $f'(x)\Delta x$ приращения функции $\Delta y$, линейная относительно приращения аргумента $\Delta x$, называется дифференциалом функции и обозначается:

$$df(x) = f'(x)\Delta x \quad \text{или} \quad dy = y'\Delta x.$$

Положив $y = x$, получим $dx = \Delta x$ и поэтому $dy \approx y'd\,x$ или $df(x) = f'(x)d\,x$, отсюда $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Из определения следует, что при достаточно малом приращении аргумента $\Delta x = dx$:

$$\Delta f(x) \approx df(x) \quad \text{или} \quad \Delta y \approx dy.$$

Так как

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

то

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \approx f(x) + df(x).$$

Итак,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Последняя формула применяется в приближенных вычислениях для вычисления значения функции, близкого к значению $f(x)$.

Дифференциал сложной функции $y = f\left[u(x)\right]$ имеет вид:

$$dy = df(u)du = df(u)u'(x)dx.$$

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка, т.е.:

$$d^2 y = d(dy) = y''dx^2$$

или
$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2,$$

отсюда
$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Дифференциал $n$ – го порядка имеет вид:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

или
$$d^n y = y^{(n)}dx^n,$$

отсюда $$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

***Решение типовых примеров***

Найти дифференциал функции

**Пример.** $y = (1 + \operatorname{tg} x)^3$.

Решение.

$dy = y'dx$

$$y' = \left[(1 + \operatorname{tg} x)^3\right]' = 3(1 + \operatorname{tg} x)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg} x)' = 3(1 + \operatorname{tg} x)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом,

$$dy = \frac{3(1 + \operatorname{tg} x)^2 dx}{\cos^2 x}.$$

## 23 Правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки $x_0$ и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки $x_0$.

Тогда, *предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l \qquad (1)$$

**Замечания:**

1. Правило Лопиталя (1) верно и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x = x_0$, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0.$

2. Формула (1) справедлива и в том случае, когда $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ выражения (1), то правило Лопиталя можно применить еще раз:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

***Решение типовых примеров***

### «*Неопределённость вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$»

**Пример 1**. Найти пределы, применяя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$,

б)

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-(2-2x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{-x+1}{x}}{\dfrac{-2(1-x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}=-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}=-1$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=(\textit{неопределённость}\left[\frac{0}{0}\right],\textit{ применим правило Лопиталя})=$$

$x\uparrow 0$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=(\textit{снова неопределённость}\left[\frac{0}{0}\right],\textit{ вторично правило Лопиталя})=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\cos x=\frac{1}{6}.$$

### «*Неопределённость вида* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$»

**Пример 2**. Вычислить:

а) $$\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}-\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to +0}(-x)=0.$$

*Замечание*: в условии задачи подчёркнуто, что $x\to +0$, это указание является существенным, потому что при $x\to -0$ и при $x\to 0$, предел не существует, т.к. отрицательные числа логарифмов не имеют.

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tg5x}=\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\dfrac{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}{\dfrac{5}{\cos^2 5x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\dfrac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}$ (прежде чем применять правило Лопиталя, преобразуем дробь):

$$\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\Pi}{2}}\left(\frac{cos5x}{\cos 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{cos5x}{\cos 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x}\right)^2=\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}\left(\lim_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{-1}\right)^2=\frac{5}{3}.$$

### «*Неопределённость вида* $[\infty-\infty]$»

Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=+\infty$, то для определения предела $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$ надо преобразовать эту разность к такому виду:

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}},\qquad \text{тогда}\qquad \lim_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}}$$

учитывая, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=+\infty$, получили «неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$», которую мы умеем раскрывать с помощью правила Лопиталя.

**Пример 3.** Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})=$ (при $x\to 1$ $\frac{1}{\ln x}$ и $\frac{1}{x-1}$ бесконечно большие величины одного порядка, а поэтому имеем неопределённость $[\infty-\infty]$):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{2}$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}$

«***Неопределенности вида*** $[0\cdot\infty]$**»** могут быть сведены к «*неопределённости вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$ *или* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$».

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$,

тогда $f(x)\cdot\phi(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{\phi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)$ или $f(x)\cdot\phi(x)=\dfrac{\phi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$,

получим: $$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\phi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\phi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

**Пример 4.** Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to +0} x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to +0}(-x)=0$.

б) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ (при $x\to+\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}=0$)

«***Неопределенности вида*** $\boldsymbol{1^{\infty}}$***,*** $\boldsymbol{\infty^0}$***,*** $\boldsymbol{0^0}$ **»** сводятся к «*неопределенности вида 0* $\cdot\infty$» с помощью тождества:

$$\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)} (f(x) > 0) \quad \left[e^{\ln x} = x\right]$$

Можно записать:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} e^{\varphi(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$$

Дело сводится к определению предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

**Пример 5**.Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \left[0^0\right] = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = e^0 = 1$,

$$\left(\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0\right)$$

б) $\lim\limits_{x\to0}(1+mx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln x(1+mx)} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln x(1+mx)} = e^m$

$$\left(\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln x(1+mx) = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+mx)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{m}{1+mx}}{1} = m\right)$$

в) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = \lim\limits_{x\to+0} e^{tgx\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0} tgx\ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

$$\left(\lim_{x\to+0} tgx\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{tgx}} = \lim_{x\to+0}\frac{-\frac{\cancel{1}}{\cancel{x^2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{x}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to+0}\sin x\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 0\cdot1 = 0\right)$$

## 24 Полное исследование функции и построение графика

При полном исследовании функции решаются следующие вопросы:

1. Нахождение области определения функции.
2. Выяснение вопроса о четности и нечетности функции.
3. Определение точек разрыва функции.
4. Определение асимптот графика функции.
5. Определение интервалов возрастания и убывания функции.
6. Определение экстремума функции.
7. Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика.
8. Определение точек перегиба.

Полученные данные следует использовать для построения графика функции. Для большей точности эскиза графика рекомендуется построить ещё и отдельные точки графика, давая значения независимой переменной и определяя соответствующие значения функции. Полезно также получаемые данные сразу наносить на чертёж.

### *Решение типовых примеров*

Исследовать функцию и построить график:

**Пример 1.** $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$

1) $Д(y) = R$,

2) функция нечётная, т.к. $y(-x) = -\dfrac{2x}{1+x^2}$, т.е. $f(-x) = -f(x)$, следовательно, её график симметричен относительно начала координат.

3) Найдём асимптоты графика функции

а) функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

б) $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$y = 0$ (ось $Ox$) – горизонтальная асимптота.

4) Найдём первую производную и возможные точки экстремума:

$$y' = \frac{2\left(1+x^2\right) - 2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$y' = 0$ $\qquad 1 - x^2 = 0$ $\qquad x_{1,2} = \pm 1$ .

5) Найдём вторую производную и возможные точки перегиба:

$$y'' = \frac{-4x\left(1+x^2\right)^2 - 2\left(1-x^2\right)\cdot 2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{-4x\left(1+x^2\right) - 8x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{-4x - 4x^3 - 8x + 8x^3}{\left(1+x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{4x^3 - 12x}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

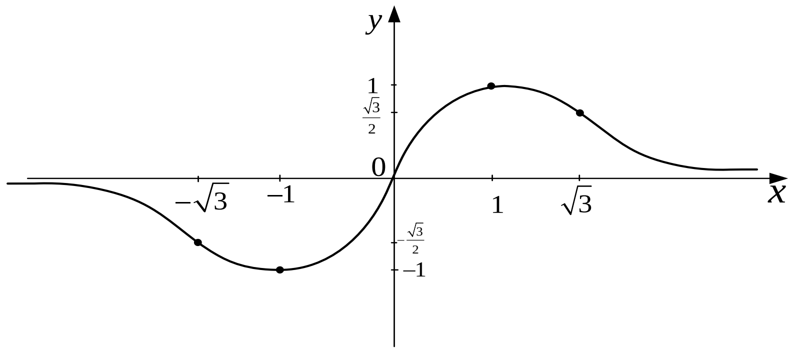
$y'' = 0$ $\qquad 4x(x^2-3) = 0$ $\qquad x_3 = 0$ $\qquad x_{4,5} = \pm\sqrt{3}$ .

6) Строим таблицу

| $x$ | 0 | (0; 1) | 1 | (1; $\sqrt{3}$) | $\sqrt{3}$ | ($\sqrt{3}$;+$\infty$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | + | 0 | – | – | – |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | 0 | – | – | – | 0 | + |
| $y$ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ↘ |
| | т.п. | | max | | т.п. | |

7) Строим график




**Пример 2.** $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$

1) $Д(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

2) функция нечётная, т.к. $y(-x)=-\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)=-y(x)$, следовательно, график симметричен относительно начала координат.

3) Найдём асимптоты графика функции:

а) $\lim\limits_{x\to\pm0}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)=\pm\infty$ $\quad x=0$ - вертикальная асимптота

б) $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{2};\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)=0$$

$y=\dfrac{x}{2}$ - наклонная асимптота.

4) Найдём возможные точки экстремума:

$$y'=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2};\quad y'=0 \qquad \frac{2}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad x^2=4 \qquad x_{1,2}=\pm 2\ .$$

5) Найдём возможные точки перегиба:

$$y''=\frac{4}{x^3};\quad y\neq 0$$

6) Составим таблицу, учитывая нечетность функции

| $x$ | 0 | (0; 2) | 2 | $(2;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $\nexists$ | – | 0 | + |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $\overline{\exists}$ | + | + | + |
| $y$ | $\overline{\exists}$ | ↘ | 2 | ↗ |
| | т.р. | | min | |

7) Строим график функции