

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра Математика

Гулай Т.А.

ЗАОЧНОЕ ОБУЧЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

наименование дисциплины

методические указания к изучению дисциплины

38.03.01 Экономика

наименование направления

Ставрополь
2019

1. Общие положения

Формой обучения студента – заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. В процессе самостоятельной работы студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. В помощь заочникам организуются чтение лекций, практические занятия. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса математики является сдача семестрового экзамена в соответствии с учебным планом по специальности.

Изучение материала по учебнику

Изучение материала по учебнику следует выполнять согласно указанным в программе курса темам. Изучая тот или иной вопрос темы по учебнику, целесообразно выполнять на бумаге все вычисления и вычерчивать имеющиеся в учебнике чертежи.

При самостоятельном изучении материала полезно вести конспект. В конспект по мере проработки материала рекомендуется вписывать определения, теоремы, формулы, уравнения и т.п. Поля конспектов могут послужить для выделения тех вопросов, на которые необходимо получить письменную или устную консультацию. Ведение конспекта должно быть аккуратным, расположение текста хорошо продуманным. Конспект поможет в подготовке к теоретической части экзамена.

Решение задач

Чтение учебника должно сопровождаться разбором предлагаемых решений задач. Решение рекомендуется выполнять в отдельной тетради. Каждый этап решения задачи должен быть обоснован, исходя из теоретических положений курса. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно.

В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и других математических констант.

Самопроверка

Опыт прочного усвоения материала темы показывает, что самопроверку проводить необходимо. В настоящем пособии приводятся для самопроверки вопросы, которые акцентируют внимание на наиболее важных, ключевых положениях темы. В процессе выполнения самопроверки необходимо избегать пользования учебником или

конспектом. Желание обратиться к учебнику или конспекту показывает недостаточное усвоение материала темы.

Консультации

При изучении теоретического материала или при решении задач у студента могут возникнуть вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся. В такой ситуации студенту следует обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации. При этом необходимо точно указать вопрос, учебник и место в учебнике, где рассмотрен затрудняющий студента вопрос. Если непреодолимые затруднения возникли при решении задачи, то следует указать характер затруднения, привести план решения.

Контрольная работа

В процессе изучения курса студент должен выполнить одну контрольную работу, которая проходит рецензирование. По полученным результатам студент может сделать выводы о степени усвоения им соответствующего раздела курса, внести коррективы в процесс последующей самостоятельной работы по изучению теоретического материала.

К выполнению контрольной работы следует приступать после тщательного разбора имеющихся в учебнике и сборниках задач решений с ответами. В дополнение к предложенным задачам сборников в данном пособии рассмотрены некоторые примеры.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно, так как в противном случае рецензирование работы как диалог общения преподавателя – рецензента и студента с целью оказания последнему методической помощи не достигнет цели.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять, поскольку без их предъявления студент не допускается к сдаче экзамена.

Лекции, практические занятия

Во время экзаменационных сессий для студентов - заочников читаются лекции, проводятся занятия. На лекциях и практических занятиях проводится обзор наиболее важных разделов курса, могут рассматриваться отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых учебных пособиях.

Зачеты и экзамены

К зачету допускаются студенты, выполнившие контрольную работу (работы должны быть зачтены преподавателем-рецензентом). Экзамен проводится в письменной форме. Студенту предстоит ответить на вопросы экзаменационного билета. Как правило, экзаменационный билет

содержит один теоретический вопрос и три практических задания. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела: решение задач должно выполняться без ошибок и уверенно. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявленными программой.

2. Методические указания к изучению дисциплины

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций ОП ВО и овладение следующими результатами обучения по дисциплине:

Код компетенции	Содержание компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
ОПК-2	Способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач	Знать: механизмы сбора, порядок анализа и обработки данных, необходимых для решения экономических задач
		Уметь: осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения экономических задач
		Владеть: методикой сбора, анализа и обработки данных, необходимых для решения экономических задач
ПК-4	Способность на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты	Знать: теоретические математические модели экономики
		Уметь: анализировать и содержательно интерпретировать результаты, полученные при построении математических моделей экономических процессов
		Владеть: методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов

– 3. Методические указания к выполнению контрольной работы

Контрольные работы, как вид учебных занятий, являются основной формой текущего контроля успеваемости и качества подготовки студентов и имеют целью проверить ход и степень усвоения учебного материала по наиболее важным темам изучаемой математической дисциплины.

Контрольные работы выполняются в виде письменных ответов на вопросы, решения примеров и задач. Содержание заданий на контрольную работу и порядок ее проведения устанавливаются кафедрой

Уровень сложности примеров (задач) рассчитан на среднего, систематически работающего студента и позволяет уверенно применять теоретические знания при их решении.

При подготовке к контрольным работам необходимо:

- повторить теоретический материал отработанных лекций, алгоритм и методы решения примеров и задач, выполненных на практических занятиях;
- ознакомиться со структурой и решением типовых задач согласно «нулевому» варианту задания на контрольную работу;
- получить консультацию у ведущего преподавателя по неувоенным вопросам;
- использовать рекомендованную литературу при самостоятельном освоении учебного материала.

При выполнении контрольных работ необходимо:

- переписать дословно условие задачи (примеры) и сделать общепринятую символическую запись указанных величин;
- предварительные расчеты проводить в черновиках, соблюдая правила математики;
- выписать нужные формулы и определить, что в них известно, а что – неизвестно; определить также требуемый метод решения;
- расчеты вести с предельной аккуратностью и тщательностью.
- проверить правильность хода решения и результатов вычислений;
- уметь правильно пользоваться разрешенными таблицами (схемами) и данными алгоритмами;
- ответы на поставленные вопросы при необходимости пояснить графиками, рисунками, которые должны быть аккуратно оформлены;
- общепринятые обозначения, математические символы писать в соответствии с принятыми стандартами, буквы латинского и греческого алфавитов писать правильно, а сделанные исправления должны быть четкими и понятными.

При оценке результатов выполнения контрольной работы учитываются следующие критерии:

- полнота, правильность и рациональность методов решения примеров (задач);
- степень самостоятельности выполнения контрольной работы;
- соблюдения установленных требований преподавателя;
- аккуратность, точность и четкость символических обозначений и оформления графиков

4. Контрольные задания

Введение в математический анализ

Понятие функции, свойства функций

Определение : Пусть даны два числовых множества X и Y . Функцией называется правило, по которому каждой переменной $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$.

Функция обозначается $y = f(x)$ или $y = y(x)$ или $y = \varphi(x)$.

Переменная x – независимая переменная или аргумент функции; переменная y – зависимая переменная или значение функции.

Определение : Множество всех значений независимой переменной x , при которых функция существует называется областью определения функции и обозначается $D(y)$.

Определение : Множество всех возможных значений зависимой переменной y называется областью значений функции и обозначается $E(y)$.

Используют следующие способы задания функции:

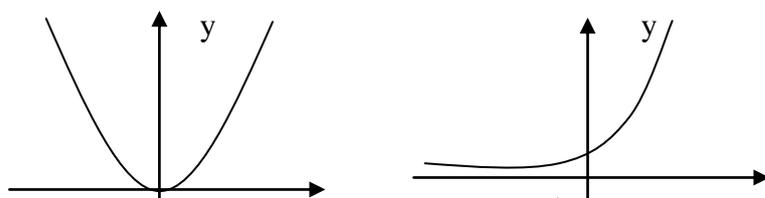
1. Аналитический способ – задание функций с помощью формул.

Например,

$$y = 2 \sin^3 x, \quad y = \sqrt{x} + x^2.$$

2. Графический способ – задание функций с помощью графика.

Например,

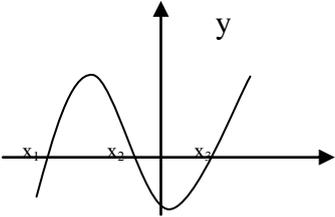
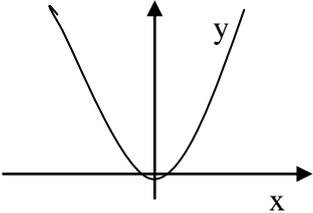
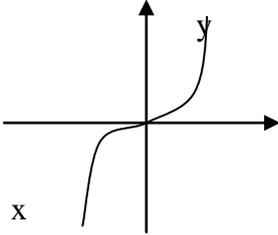


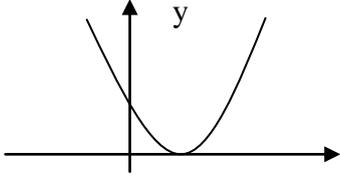
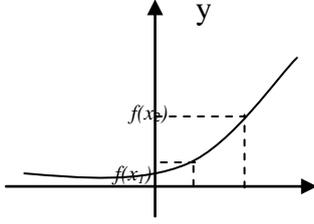
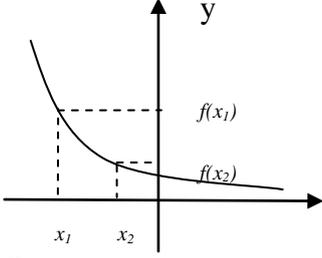
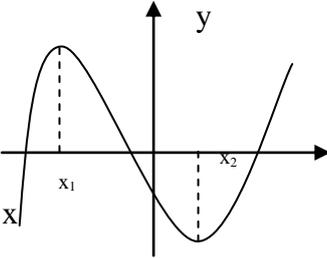
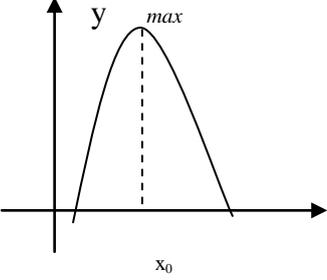
3. Табличный способ – задание функций с помощью таблиц.

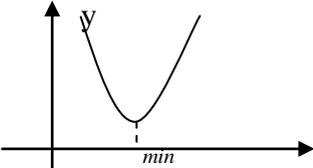
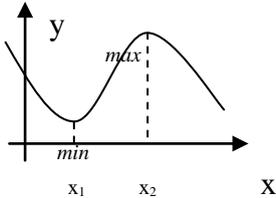
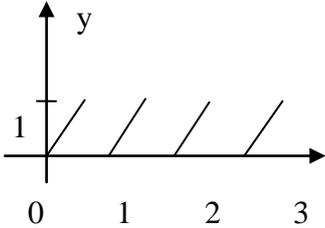
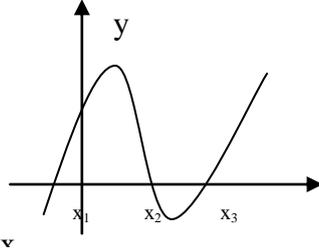
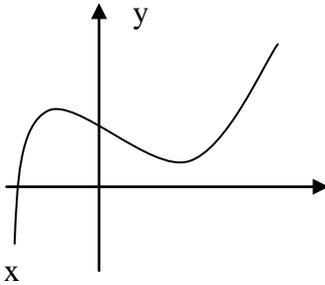
4. Словесный способ – задание функций с помощью алгоритма вычисления. Например, $y = [x]$ – целая часть числа x .

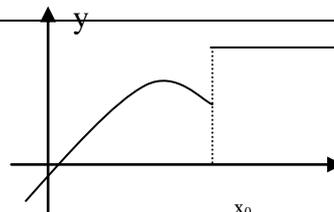
Целая часть числа x – это ближайшее целое число, не превосходящее самого числа x .

Свойства функций приведены в таблице:

Название свойства	Определение	Графическое изображение
Нули функции	<p>Нулём функции называется то значение x, при котором функция обращается в 0, то есть $f(x) = 0$.</p>	 <p>Нули – это точки пересечения графика функции с осью Ox.</p>
Четность функции	<p>Функция называется чётной, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$</p>	 <p>Четная функция симметрична относительно оси Oy</p>
Нечетность функции	<p>Функция называется нечётной, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.</p>	 <p>Нечетная функция симметрична относительно начала координат.</p>

	<p>Функция которая не является ни чётной ,ни нечётной называется функцией общего вида.</p>	
<p>Возрастание функции</p>	<p>Функция $f(x)$ называется возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е.</p> $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	
<p>Убывание функции</p>	<p>Функция $f(x)$ называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е.</p> $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$	
	<p>Промежутки, на которых функция либо только убывает , либо только возрастает называются промежутками монотонности .</p>	 <p>$f(x)$ имеет 3 промежутка монотонности : $(-\infty; x_1), (x_1; x_2), (x_3; +\infty)$</p>
<p>Локальный максимум</p>	<p>Точка x_0 называется точкой локального максимума, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство:</p> $f(x_0) > f(x).$	

<p>Локальный минимум</p>	<p>Точка x_0 называется точкой локального минимума, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) < f(x)$.</p>	
	<p>Точки локального максимума и точки локального минимума называются точками локального экстремума.</p>	 <p>x_1, x_2 – точки локального экстремума.</p>
<p>Периодичность функции</p>	<p>Функция $f(x)$ называется периодической, с периодом T, если для любого x выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.</p>	
<p>Промежутки знакопостоянства</p>	<p>Промежутки, на которых функция либо только положительна, либо только отрицательна называются промежутками знакопостоянства.</p>	 <p>$f(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; +\infty)$ $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3)$</p>
<p>Непрерывность функции</p>	<p>Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции при $x \rightarrow x_0$ равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.</p>	



ва	Точки разрыва	Точки, в которых нарушено условие непрерывности называются точками разрыва функции. x_0 - точка разрыва.
----	---------------	---

Теория пределов

Определение: Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при x , стремящемся к a , если для любой последовательности чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ сходящейся к числу a , следует, что последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \dots$ сходится к числу A .

Предел функции в точке a обозначается

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Основные теоремы о пределах

Приведем основные теоремы, на которых основано вычисление пределов:

1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$
6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

! Все правила имеют смысл, если пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют.

Техника вычисления пределов

При вычислении предела элементарной функции $f(x)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

• Функция $f(x)$ определена в предельной точке $x = a$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

• Функция $f(x)$ в предельной точке $x = a$ не определена или же вычисляется предел функции при $x \rightarrow \infty$. Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода.

Необходимо помнить, что

$$\frac{C}{\infty} = 0, \frac{\infty}{C} = \infty, \infty + C = \infty, \frac{0}{C} = 0, \frac{C}{0} = \infty, 0 + C = C.$$

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x = a$ или при $x \rightarrow \infty$ представляет собой

неопределенность (типа $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$).

При вычислении пределов при $x \rightarrow \infty$ основные теоремы о пределах сохраняют силу и, кроме того, используются правила:

а) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наибольшую степень переменной;

б) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наименьшую степень переменной;

в) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, иногда достаточно числитель и знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить дробь на множитель, приводящий к неопределенности;

г) чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности;

д) чтобы раскрыть неопределенность типа $\infty - \infty$, необходимо числитель и знаменатель дроби одновременно умножить на сопряженное

выражение и тем самым свести к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Вычислить пределы функций:

$$\text{Пример 1: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{x^3 - 1} = \frac{2 \cdot 2^2}{2^3 - 1} = \frac{8}{7}$$

$$\text{Пример 2: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x-1} = \frac{5}{1-1} = \left(\frac{5}{0} \right) = \infty$$

$$\text{Пример 3: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x + 4}{1 + 3x^2 - x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + 4}{\frac{1}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{x^3}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} - 1} = \frac{5 - \frac{2}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty} - 1} = \frac{5 - 0 + 0}{0 + 0 - 1} = -5$$

$$\text{Пример 4: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{-(x-1)(x+1)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1 \\ x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{-x-1} = \frac{1-2}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = 0,5$$

$$\text{Пример 5: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4-x} - 2)(\sqrt{4-x} + 2)}{3x(\sqrt{4-x} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - x - 4}{3x(\sqrt{4-x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{3x(\sqrt{4-x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3 \cdot (\sqrt{4-x} + 2)} = -\frac{1}{12}$$

Литература: [1] стр. 188-204, задания № 6.23-6.50, стр.198.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называется функцией?
2. Что такое область определения и область значений функции
3. Перечислите способы задания функций, их достоинства.
4. Перечислите основные свойства функций.
5. Дайте определение предела функции в точке.
6. Какая функция называется непрерывной в точке?
7. Сформулируйте основные свойства пределов.

8. Как раскрывается неопределенность вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$?

Дифференциальное исчисление

Понятие производной

Определение: Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения ее приращения $\Delta f(x)$ к приращению Δx аргумента x , когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} .$$

Если этот предел конечный, то функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x . Если же этот предел есть ∞ , то говорят, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x бесконечную производную.

Механический смысл производной: скорость есть первая производная пути по времени, т.е. $v = S'(t)$.

Геометрический смысл производной: тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ равен первой производной этой функции, вычисленной в точке касания, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0)$$

Таблица производных

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' & (\cos x)' &= -\sin x \\
(u + v - w)' &= u' + v' - w' & (\sin x)' &= \cos x \\
(C \cdot u)' &= C \cdot u' & (tgx)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} & (ctgx)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\
(C)' &= 0 & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(x)' &= 1 & (arctgx)' &= \frac{1}{1+x^2} \\
(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & (arcctgx)' &= -\frac{1}{1+x^2} \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a} \\
(e^x)' &= e^x & & \\
(a^x)' &= a^x \ln a & &
\end{aligned}$$

Процесс нахождения производных называется дифференцированием функции.

Рассмотрим примеры.

Найти производные функций:

Пример 1: $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 2 \sin x + 9$

$$\begin{aligned}
\text{Решение: } y' &= (3x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 2 \sin x + 9)' = (3x^2)' + (\sqrt[3]{x^2})' + (2 \sin x)' + 9' = \\
&= 6x + (x^{\frac{2}{3}})' + 2 \cos x + 0 = 6x + \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} + 2 \cos x = 6x + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \\
&+ 2 \cos x = 6x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + 2 \cos x = 6x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2 \cos x
\end{aligned}$$

Пример 2: $y = x^2 \cdot \ln x$

$$\text{Решение: } y' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x$$

Пример 3: $y = \frac{1+x^2}{5^x}$

$$\begin{aligned}
\text{Решение: } y' &= \frac{(1+x^2)'5^x - (1+x^2)(5^x)'}{5^{2x}} = \frac{2x \cdot 5^x - (1+x^2) \cdot 5^x \ln 5}{(5^x)^2} = \\
&= \frac{5^x(2x - (1+x^2) \ln 5)}{5^{2x}} = \frac{2x - \ln 5 + x^2 \ln 5}{5^x}
\end{aligned}$$

Дифференциал функции

Определение: Дифференциалом функции $y=y(x)$ называется произведение ее производной на дифференциал независимой переменной:

$$dy = y'(x)dx .$$

Для большей наглядности рассмотрим пример.

Пример 1: Найти дифференциал функции $y = 3x^2 + 5$

Решение: $dy = y'dx$;

Так как $y' = (3x^2 + 5)' = 6x$, то $dy = 6x dx$.

Дифференцирование сложной функции

Пусть $y = y(u)$, где $u = u(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y = y[u(x)]$ есть также дифференцируемая функция, причем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: производная сложной функции равна произведению производных функций, ее составляющих.

Производные сложных функций находятся при помощи таблицы:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(\arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\text{arcctgu})' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1: Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg} 5x$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= (\ln \operatorname{tg} 5x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} 5x} (\operatorname{tg} 5x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} 5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} (5x)' = \frac{\cos 5x}{\sin 5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = \\ &= \frac{5}{\sin 5x \cdot \cos 5x} = \frac{5}{\frac{1}{2} \sin 10x} = \frac{10}{\sin 10x} \end{aligned}$$

Пример 2: Найти производную функции $y = x \sin^2 \sqrt{2x-1}$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } y' &= (x \sin^2 \sqrt{2x-1})' = x' \cdot \sin^2 \sqrt{2x-1} + x \cdot (\sin^2 \sqrt{2x-1})' = \\ &= \sin^2 \sqrt{2x-1} + x \cdot (2 \sin \sqrt{2x-1}) \cdot (\sin \sqrt{2x-1})' = \\ &= \sin^2 \sqrt{2x-1} + 2x \cdot \sin \sqrt{2x-1} \cdot \cos \sqrt{2x-1} \cdot (\sqrt{2x-1})' = \\ &= \sin^2 \sqrt{2x-1} + x \cdot \sin(2\sqrt{2x-1}) \cdot \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \sin^2 \sqrt{2x-1} + \\ &+ x \cdot \sin(2\sqrt{2x-1}) \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \sin^2 \sqrt{2x-1} + \frac{x \sin(2\sqrt{2x-1})}{\sqrt{2x-1}} \end{aligned}$$

Производные высших порядков

Определение: Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y=f(x)$ есть производная от ее первой производной:
 $y'' = [f'(x)]'$.

Определение: Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y=f(x)$ есть производная от ее второй производной:
 $y''' = [f''(x)]'$.

Определение: Производная n -ого порядка (n -я производная) от функции $y=f(x)$ есть производная от ее $(n-1)$ -й производной:
 $y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1: Найти производную второго порядка $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } y' &= \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 1)' \cdot (x - 1) - (x^2 + 1) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)^2 - 2}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'' &= \left(\frac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2} \right)' = \frac{[(x-1)^2 - 2](x-1)^2 - [(x-1)^2 - 2] \cdot [(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = \\
&= \frac{[2(x-1)(x-1)' - (2)'](x-1)^2 - [(x-1)^2 - 2]2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} = \\
&= \frac{2(x-1)^3 - 2(x-1)^3 - 4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-4}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

Пример2: Найти производную второго порядка функции $y = e^{x^3}$.

Решение: $y' = (e^{x^3})' = e^{x^3} \cdot (x^3)' = e^{x^3} \cdot 3x^2$

$$\begin{aligned}
y'' &= (3x^2 \cdot e^{x^3})' = (3x^2)' \cdot e^{x^3} + 3x^2 \cdot (e^{x^3})' = 6x \cdot e^{x^3} + 3x^2 \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2 = \\
&= e^{x^3} (6x + 9x^4) = 3xe^{x^3} (2 + 3x^3).
\end{aligned}$$

Литература: [1] стр. 205-213, 215-220; задания № 7.1-7.31 стр.205, № 7.38-7.90 стр.217.

Вопросы для самопроверки:

1. Дать определение производной функции.
2. Что называется приращением аргумента, приращением функции?
3. Какой механический смысл имеет производная?
4. Сформулировать геометрический смысл производной.
5. Как найти производную суммы или разности?
6. Как найти производную произведения?
7. Как найти производную частного двух функций?
8. Дать определение дифференциала функции.
9. Сформулируйте правила нахождения производной сложной функции?
10. Как найти производную второго порядка? производную четвертого порядка.

Исследование функции с помощью производной

Определение: Точка x_0 называется точкой локального максимума, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство:

$$f(x_0) > f(x).$$

Определение: Точка x_0 называется точкой локального минимума, если для любого x из окрестности точки x_0 выполняется неравенство:

$$f(x_0) < f(x).$$

Точки минимума и максимума функции называются точками экстремума данной функции, а значения функции в этих точках — экстремумами функции.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью первой производной

1. Найти производную функции $f'(x)$.

2. Найти критические точки по первой производной, т.е. точки, в которых производная обращается в нуль или терпит разрыв.

3. Исследовать знак первой производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если на промежутке $f'(x) < 0$, то на этом промежутке функция убывает; если на промежутке $f'(x) > 0$, то на этом промежутке функция возрастает.

4. Если в окрестности критической точки $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума, если с «-» на «+», то точкой минимума.

5. Вычислить значения функции в точках минимума и максимума.

С помощью приведенного алгоритма можно найти не только экстремумы функции, но и промежутки возрастания и убывания функции.

Пример 1: Найти промежутки монотонности и экстремумы функции:

$$f(x) = x^3 - 3x^2.$$

Решение: Найдем первую производную функции $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Найдем критические точки по первой производной, решив уравнение $3x^2 - 6x = 0$

$$3x \cdot (x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 2$$

Исследуем поведение первой производной в критических точках и на промежутках между ними.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		т. max 0		т. min -4	

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$$

Ответ: Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$;

функция убывает при $x \in (0; 2)$;

точка минимума функции $(2; -4)$;

точка максимума функции $(0; 0)$.

Правило нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью второй производной

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные точки данной функции, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$.
3. Найти вторую производную $f''(x)$.
4. Исследовать знак второй производной в каждой из стационарных точек. Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то — минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.
5. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 1: Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию: $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Решение: Находим производную: $f'(x) = 2x - 2$.

Решая уравнение $f'(x) = 0$, получим стационарную точку $x = 1$.
Найдем теперь вторую производную: $f''(x) = 2$.

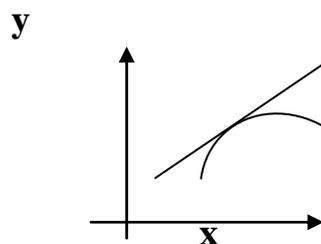
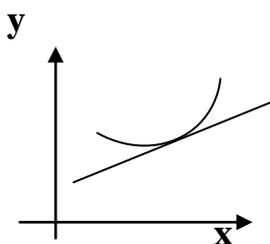
Так как вторая производная в стационарной точке положительна, $f''(1) = 2 > 0$, то при $x = 1$ функция имеет минимум: $f_{\min} = f(1) = -4$.

Ответ: Точка минимума имеет координаты $(1; -4)$.

Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба

Определение: Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой вниз в промежутке $(a; b)$, если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка.

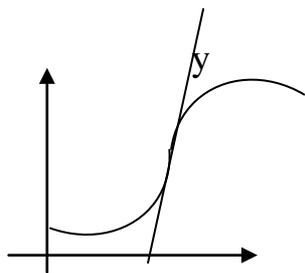
Определение: Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой вверх в промежутке $(a; b)$, если она лежит ниже касательной в любой точке этого промежутка.



Определение: Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются промежутками выпуклости графика функции.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком ее второй производной: если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз на этом промежутке; если же $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх на этом промежутке.

Определение: Точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется точкой перегиба.



х

Точками перегиба могут служить только критические точки II рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$

1. Найти вторую производную $f''(x)$.
2. Найти критические точки II рода функции $y = f(x)$, т.е. точки, в которой $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутка, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба графика функции.
4. Вычислить значения функции в точках перегиба.

Пример 1: Найти промежутки выпуклости и точки перегиба следующей кривой: $f(x) = 6x^2 - x^3$.

Решение: Находим $f'(x) = 12x - 3x^2$, $f''(x) = 12 - 6x$.

Найдем критические точки по второй производной, решив уравнение $12 - 6x = 0$.
 $x = 2$.

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$		точка перегиба 16	

$$f(2) = 6 \cdot 2^2 - 2^3 = 16$$

Ответ: Функция выпукла вверх при $x \in (2; +\infty)$;
 функция выпукла вниз при $x \in (-\infty; 2)$;
 точка перегиба $(2; 16)$.

Общая схема для построения графиков функций

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти точки пересечения графика функций с осями координат.
3. Исследовать функцию на четность или нечетность.
4. Исследовать функцию на периодичность.
5. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции.
6. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции.
7. Найти асимптоты функции.
8. По результатам исследования построить график.

Пример: Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = x^3 - 3x.$$

Решение:

1) Функция определена на всей числовой оси, т. е. ее область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Найдем точки пересечения с осями координат:

с осью ОХ : решим уравнение $x^3 - 3x = 0$

$$x(x^2 - 3) = 0, \quad x = 0 \quad \text{или} \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

с осью ОУ: $y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$

3) Выясним, не является ли функция четной или нечетной:

$$y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x).$$

Отсюда следует, что функция является нечетной.

4) Функция неперiodична.

5) Найдем промежутки монотонности и точки экстремума функции:

$$y' = 3x^2 - 3.$$

Критические точки: $3x^2 - 3 = 0$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y		т. max 2		т. min -2	

$$y(0) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2$$

$$y(2) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$$

6) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

$$y'' = 6x$$

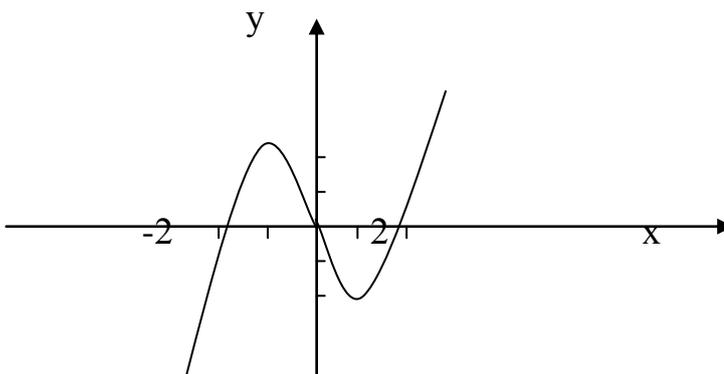
Критические точки: $6x = 0$, $x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	-	0	+
y		точка перегиба 0	

$$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$$

7) Функция непрерывна, асимптот у нее нет.

8) По результатам исследования построим график функции:



Литература: [1] стр. 221-230, 232-236; задания № 7.91-7.97, стр. 221, 7.98-7.99, стр. 230, 7.101, стр. 236; [3] стр. 78-84, 88-90.

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое критические точки функции?

2. Сформулировать достаточные условия возрастания и убывания функции.

3. Какими точками отделяются промежутки возрастания от промежутков убывания функции?

4. Сформулируйте правила нахождения точек экстремума функции.

5. Сформулировать достаточное условие выпуклости функции. Приведите алгоритм нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба.

Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл. Методы вычисления

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Любая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Определение: Совокупность $F(x) + C$ всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

- $\int f(x)dx = f(x)$;
- $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
- $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;
- $\int d(f(x)) = f(x) + C$;
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование предполагает использование при нахождении неопределенных интегралов таблицы интегралов

Таблица интегралов

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int a^{kx+b} dx = \frac{a^{kx+b}}{k \cdot \ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \cdot \ln|a^2 \pm x^2| + C$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

Рассмотрим нахождение интегралов непосредственным методом.

Пример 1: Найти неопределенный интеграл:

$$\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx.$$

Решение:
$$\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx =$$

$$= \int 5 \cos x dx + \int 2 dx - \int 3x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{4}{x^2 + 1} dx =$$

$$= 5 \int \cos x dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= 5 \sin x + 2x - 3 \frac{x^3}{3} + \ln|x| - 4 \cdot \operatorname{arctg} x + C =$$

$$= 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4 \cdot \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 2: Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{x^2 - 2}{x^2} dx.$

Решение:
$$\int \frac{x^2 - 2}{x^2} dx = \int \frac{x^2}{x^2} dx - \int \frac{2}{x^2} dx = \int dx - 2 \int x^{-2} dx =$$

$$= x - 2 \frac{x^{-1}}{-1} + C = x + \frac{2}{x} + C.$$

Пример 3: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$

Решение:
$$\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} = \int \frac{(x^2 + 1 - 1) dx}{x^2 + 1} = \int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= \int dx - \operatorname{arctg} x + C = x - \operatorname{arctg} x + C$$

Метод подстановки в неопределенном интеграле

(метод замены переменной)

Этот метод заключается в том, что заменяют переменную x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ -непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)dt$ и получают $\int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

При этом получают искомую функцию, выраженную через переменную t . Для возвращения к переменной x необходимо заменить t значением $t = \psi(x)$, которое находится из соотношения $x = \varphi(t)$.

Рассмотрим нахождение интегралов методом подстановки.

Пример 1: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \int \frac{dx}{x \ln^2 x} &= \left| \begin{array}{l} \ln x = t; \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = \\ &= -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C \end{aligned}$$

Пример 2: Найти неопределенный интеграл $\int ctg x dx$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \int ctg x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t; \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \\ &= \ln|\sin x| + C \end{aligned}$$

Пример 3: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$

$$\text{Решение: } \int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = t \operatorname{tg} t + C = t e^x + C$$

Пример 4: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{4 + 25x^2}$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \int \frac{dx}{4 + 25x^2} &= \int \frac{dx}{2^2 + (5x)^2} = \left| \begin{array}{l} 5x = t \\ dt = 5dx \\ dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{5} dt}{2^2 + t^2} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{5x}{2} + C. \end{aligned}$$

Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок на n частей точками $a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка.

Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$$

Определение: Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$

Простейшие свойства определенного интеграла

1) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx$$

3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

4) Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

5) Отрезок интегрирования можно разделить на части:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

c -точка, лежащая между a и b .

6) Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$, в том случае, когда можно найти соответствующую первообразную $F(x)$, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Рассмотрим нахождение простейших определенных интегралов.

Пример 1: Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение: $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$

Пример 2: Вычислить определенный интеграл: $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$.

Решение:
$$\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^9 = \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^9 = \left(\frac{2}{3} 9\sqrt{9} - 2\sqrt{9} \right) - \left(\frac{2}{3} 1\sqrt{1} - 2\sqrt{1} \right) =$$

$$= 12 + \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ преобразуется с помощью подстановки $t = \varphi(x)$ или $x = \psi(t)$ в определенный интеграл относительно новой переменной t . При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами t_1 и t_2 , которые находятся из исходной подстановки.

Из первой подстановки новые пределы интегрирования вычисляются непосредственно: $t_1 = \varphi(a)$, $t_2 = \varphi(b)$.

Из второй подстановки новые пределы интегрирования находятся путем решения уравнений $a = \psi(t_1)$, $b = \psi(t_2)$.

Таким образом, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\psi(t)] \cdot \psi'(t)dt$$

Пример 1: Вычислить определенный интеграл методом замены переменной $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx &= \left. \begin{array}{l} t = \cos x, \quad t_1 = \cos 0 = 1 \\ dt = -\sin x dx, \quad t_2 = \cos(\pi/2) = 0 \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -\int_1^0 t^2 dt = -\frac{t^3}{3} \Big|_1^0 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (0^3 - 1^3) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Пример 2: Вычислить определенный интеграл: $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} &= \left. \begin{array}{l} x = t^2 \quad t_1 = \sqrt{1} = 1 \\ dx = 2tdt \quad t_2 = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{2tdt}{t+1} = \\ &= 2 \int_1^2 \frac{(t+1) - 1}{t+1} dt = 2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2(t - \ln(t+1)) \Big|_1^2 = \\ &= 2(2 - \ln 3) - 2(1 - \ln 2) = 2 + 2 \ln \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Литература: [1] стр 247-264, 267-284, задания № 8.1-8.95, стр. 252, 9.1-9.14, стр. 278; [3] стр. 169-184, 195-200.

Вопросы для самопроверки:

1. В чем заключается смысл действия, обратного дифференцированию?
2. Дать определение первообразной функции
3. Чем отличаются друг от друга любые две первообразные данной функции $f(x)$?
4. Как проверить, правильно ли найдена первообразная данной функции $f(x)$?
5. Дать определение неопределенного интеграла.
6. Перечислить свойства неопределенного интеграла
7. Дать определение определенного интеграла.
8. Перечислить свойства определенного интеграла.
9. Запишите формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.
10. В чем отличия методов замены переменной в определенном и неопределенном интегралах?

Дифференциальные уравнения

Определение: Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы различных порядков, называется дифференциальным уравнением.

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0.$$

Определение: Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

(Например, $y' \sin x + y \operatorname{tg} x = 1$ - первого порядка;

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^3 \quad - \quad \text{второго порядка.}$$

Определение: Функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, называется решением этого уравнения. Решение дифференциального уравнения, содержащее столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, называется общим решением этого уравнения.

Для уравнения 1-го порядка: $y = \varphi(x, C)$

2-го порядка: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$

Определение: Функции, получаемые из общего решения при различных числовых значениях произвольных постоянных, называются частными решениями этого уравнения.

Определение: Задача на нахождение частного решения дифференциального уравнения при заданных начальных условиях называется задачей Коши.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение: Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x) \cdot N_1(y) dx + M_2(x) \cdot N_2(y) dy = 0.$$

Алгоритм решения:

1) Поделим все члены уравнения на $N_1(y) \cdot M_2(x)$, получим:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0, \text{ здесь переменные разделены.}$$

2) Интегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C,$$

после чего находим общее решение данного дифференциального уравнения в виде $C = y(x)$

Пример: Найти общее решение дифференциального уравнения:
 $\cos^2 y \cdot \operatorname{ctg} x dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$.

Решение:

Разделим на $\cos^2 y \cdot \sin^2 y$

$$\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx + \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 y} dy = 0, \text{ переменные разделены.}$$

Проинтегрируем обе части полученного равенства.

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 y} dy = 0$$

Интегралы находим методом подстановки.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx + \int \frac{\sin y}{\cos^3 y} dy = 0$$

$$\begin{array}{l|l} t = \sin x & v = \cos y \\ dt = \cos x dx & dv = -\sin y \end{array}$$

$$\int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dv}{v^3} = 0$$

$$\frac{t^{-2}}{-2} - \frac{v^{-2}}{-2} = C \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2v^2} = C$$

Произведя обратную подстановку, получим:

$$-\frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2\cos^2 x} = C \quad \text{или} \quad -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = C$$

Отсюда,

$$\frac{-\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = C$$

Ответ: $\frac{1 - 2\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = C$ - общее решение уравнения.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение: Однородной функцией переменных x и y называется функция, все члены которой имеют одинаковую степень.

Например, $f(x, y) = 2x^2 - 5xy$, $f(x, y) = x^2 y + xy^2$ - однородные функции второй и третьей степени соответственно.

Определение: Уравнение вида $f(x, y) = \varphi(x, y)$, где $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ - однородные функции одной и той же степени, называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой, где $u = u(x)$ - новая искомая функция.

Пример 1: Найти общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$$

Решение: Положим $y = ux$. Дифференцируя равенство $y = ux$, получим $dy = xdu + udx$. Подставляя выражения в уравнение, получим:

$$(x^2 + u^2x^2)dx - xux(xdu + udx) = 0$$

$$x^2dx + u^2x^2dx - x^3udu - x^2u^2dx = 0$$

Разделим переменные в полученном уравнении.

$$x^2dx = x^3udu; \quad udu = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем, $\int udu = \int \frac{dx}{x}$. Отсюда, $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$.

Сделаем обратную замену: $u = \frac{y}{x}$, получим $\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$.

Ответ: $\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение: Уравнение вида $\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Уравнения такого вида сводятся к двум уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ - некоторые функции, зависящие от x .

Алгоритм решения:

1) Вводится подстановка $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

2) Исходное уравнение принимает вид:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x).$$

3) Группируются слагаемые при u .

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

4) Выражение в скобках приравнивается к нулю:

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, решая его, находим $v = v(x)$.

5) Полученное значение v подставляется в выражение:

$$v \frac{du}{dx} = Q(x).$$

Решив уравнение с разделяющимися переменными, получим функцию $u = u(x, C)$.

б) Общее решение уравнения запишется в виде:

$$y = u(x, C) \cdot v(x).$$

Пример 1: Найти общее решение уравнения

$$y' - y \operatorname{tg} x = \sin x.$$

Решение: Обозначим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Уравнение примет вид $u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x = \sin x$.

Вынесем во втором и третьем слагаемом общий множитель за скобки, получим $u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \sin x$.

Выражение в скобках приравняем к нулю $v' - v \operatorname{tg} x = 0$

Перепишем в виде $\frac{dv}{dx} = v \operatorname{tg} x$

Умножая обе части уравнения на $\frac{dx}{v}$, получим $\frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx$,

интегрируем $\int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{tg} x dx$

находим $\ln|v| = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$, применим замену $\left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\}$

получим $\ln|v| = -\int \frac{dt}{t}$,

откуда $\ln|v| = -\ln|t|$ или $\ln|v| = -\ln|\cos x|$, $\ln|v| = -\ln|\cos x|^{-1}$.

Пропотенцируем обе части равенства $v = \frac{1}{\cos x}$.

Найденную функцию v подставим в выражение $u'v = \sin(x)$ и решим полученное уравнение $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sin x$

$$du = \sin x \cdot \cos x \cdot dx \text{ или } du = \frac{1}{2} \sin 2x dx$$

Интегрируем $\int du = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$,

Получим $u = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$.

Зная функции u и v , можно записать ответ.

Ответ: Общее решение уравнения $y = \frac{1}{\cos x} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cos 2x + C\right)$.

Пример 2: Найти частное решение дифференциального уравнения $xy' - 3y = x^4 e^x$, если $y = e$ при $x = 1$.

Решение: Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Отсюда, $xu'v + xuv' - 3uv = x^4 e^x$.

Вынесем u за скобки: $xu'v + u(xv' - 3v) = x^4 e^x$.

Приравняв скобку к 0, получим: $xv' - 3v = 0$.

Отсюда, $x \frac{dv}{dx} - 3v = 0$, $\frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x}$.

Интегрируем $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3dx}{x}$,

$\ln|v| = 3 \ln|x|$, $\ln|v| = \ln|x|^3$, $v = x^3$.

Подставив $v = x^3$ в выражение $xu'v = x^4 e^x$, получим уравнение относительно функции u и решим его.

$xu'x^3 = x^4 e^x$, $u' = e^x$, $\frac{du}{dx} = e^x$.

Проинтегрируем $\int du = \int e^x dx$. Функция $u = e^x + C$.

Запишем общее решение уравнения: $y = (e^x + C) \cdot x^3$.

Частное решение найдем из условия $y = e$ при $x = 1$.

$e = (e^1 + C) \cdot 1^3$, $e + C = e$, $C = 0$.

Частное решение заданного уравнения имеет вид: $y = e^x \cdot x^3$.

Ответ: $y = x^3 e^x$ - частное решение уравнения.

Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае имеют вид: $F(x, y, y', y'') = 0$.

Дифференциальные уравнения вида $y'' = f(x)$ решаются двукратным интегрированием.

Полагая $y' = z$, имеем $y'' = z'$ или $z' = f(x)$, $\frac{dz}{dx} = f(x)$, $dz = f(x)dx$.

Интегрируя $\int dz = \int f(x)dx$, получим $z = F(x) + C_1$.

Возвращаясь к функции y , имеем $\frac{dy}{dx} = F(x) + C_1$

$dy = (F(x) + C_1)dx$, $\int dy = \int (F(x) + C_1)dx$.

$y = \Phi(x) + C_1 x + C_2$ - это есть общее решение уравнения $y'' = f(x)$.

Пример 1: Найти общее решение уравнения $y'' = 1 - x^2$.

Решение: Пусть $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'$.

После подстановки имеем $\frac{dz}{dx} = 1 - x^2$ или $dz = (1 - x^2)dx$.

Интегрируя обе части равенства, получим $z = x - \frac{x^3}{3} + C_1$.

Вернувшись к функции y , получаем уравнение $\frac{dy}{dx} = x - \frac{x^3}{3} + C_1$.

Интегрируя его $\int dy = \int (x - \frac{x^3}{3} + C_1) dx$, получим

$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2$ - это есть общее решение уравнения.

Ответ: $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение: Уравнения вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q – постоянные величины, называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для отыскания общего решения такого уравнения составляется характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$,

которое решается как квадратное уравнение. При его составлении в исходном уравнении производные функции y заменяются соответствующей степенью переменной k , причем сама функция y заменяется единицей.

Общее решение исходного дифференциального уравнения строится в зависимости от характера корней k_1 и k_2 .

Возможны три случая:

1) k_1 и k_2 – действительные и различные, тогда

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) k_1 и k_2 – действительные и равные, тогда $k_1 = k_2 = k$ и

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx};$$

3) k_1 и k_2 – комплексно-сопряженные: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$,

$$\text{тогда } y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример1: Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 5y' - 6y = 0.$$

Решение: Заменим данное уравнение характеристическим:

$$k^2 - 5k - 6 = 0.$$

решаем его, получаем $D = (-5)^2 - 4 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49$.

$$k_1 = \frac{5-7}{2} = -1, \quad k_2 = \frac{5+7}{2} = 6.$$

Как видно, корни действительные и различные, поэтому

общее решение можно записать в виде $y = C_1 e^{-1x} + C_2 e^{6x}$.

Ответ: $y = C_1 e^{-1x} + C_2 e^{6x}$.

Пример 2: Решить дифференциальное уравнение $y'' + 9y = 0$.

Решение: Заменяем данное уравнение характеристическим

$k^2 + 9 = 0$, найдем корни, $k^2 = -9$, значит $k_{1,2} = \pm 3i$.

Отсюда действительная часть комплексного числа $\alpha = 0$, мнимая часть $\beta = 3$, следовательно общее решение имеет вид:

$y = e^{0x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Ответ: $y = e^{0x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

Пример 3: Решить дифференциальное уравнение

$y'' + 6y' + 25y = 0$.

Решение: Заменяем данное уравнение характеристическим:

$k^2 + 6k + 25 = 0$.

Решая его, получаем $D = 36 - 4 \cdot 25 = 36 - 100 = -64$;

$k_1 = \frac{-6 - 8i}{2} = -3 - 4i$, $k_2 = \frac{-6 + 8i}{2} = -3 + 4i$;

получили комплексно - сопряженные корни, где $\alpha = -3$ и $\beta = 4$.

Тогда общее решение запишется в виде $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Ответ: $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$

Пример 4: Решить дифференциальное уравнение

$y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение: Заменяем данное уравнение характеристическим:

$k^2 + 4k + 4 = 0$.

Решая его, получаем $D = 4^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$;

$k_1 = k_2 = \frac{-4}{2} = -2$,

получили два одинаковых действительных корня, тогда

общее решение уравнения запишется в виде $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x)$.

Ответ: $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x)$.

Литература: [1] стр.316-326, 330-334, 335-344, задания № 10.7-10.39, стр. 326, № 10.54-10.73, стр. 335, № 10.84-10.102, стр. 345; [4] стр.417-422, 435,443-445.

Вопросы для самопроверки:

1. Как можно определить порядок дифференциального уравнения?
2. Сколько постоянных интегрирования имеет дифференциальное уравнение первого порядка? Третьего порядка?
3. Как проверить правильность решения дифференциального уравнения?
4. В чем заключается задача Коши?
5. В какой последовательности решают дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными?
6. Приведите алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.
7. Привести пример дифференциального уравнения второго порядка.
8. Сколько начальных условий должно быть задано при нахождении частного решения дифференциального уравнения второго порядка?
9. Что называется характеристическим уравнением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
10. Запишите решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами для случая когда корни характеристического уравнения а) действительные и различные; б) комплексные.

Числовые и функциональные ряды

Понятие числового ряда.

Признаки сходимости числовых рядов

Определение: Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где числа a_1, a_2, \dots — называются членами ряда, член a_n — общим членом ряда.

Суммы конечного числа членов ряда: $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$; $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ называются частичными суммами ряда. Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют бесконечную последовательность частичных сумм $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$.

Определение: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ при n стремящемся к ∞ имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Число S в этом случае называется суммой ряда.

Если же последовательность частичных сумм $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ при n стремящемся к ∞ конечного предела не имеет, то ряд называется расходящимся.

Необходимый признак сходимости ряда: Если ряд сходится, то общий член ряда a_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Достаточный признак расходимости ряда:

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Признак сравнения: Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и для всех n выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку, для сравнения часто используются:

1. Ряд геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, ($a > 0$), который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

2. Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ являющийся расходящимся всегда;

3. Обобщенно – степенной ряд $1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^q} + \dots + \frac{1}{n^q} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$, который сходится при $q > 1$ и расходится при $q \leq 1$.

Признак Даламбера: Пусть дан ряд с положительными членами

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, тогда при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ – расходится.

З а м е ч а н и е. При $l=1$, ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью признака сравнения или других признаков.

Признак Коши: Пусть дан ряд с положительными членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и существует } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l, \text{ тогда при } l < 1$$

ряд сходится, при $l > 1$ – расходится, при $l=1$ требуются дополнительные исследования.

Интегральный признак. Пусть дан ряд

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

члены которого являются значениями некоторой функции $f(x)$, положительной, непрерывной и убывающей на

полуинтервале $[1; +\infty)$. Тогда если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)$

сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$; если же $\int_1^{+\infty} f(x)$ расходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ так же расходится.}$$

Рассмотрим примеры исследования числовых рядов на сходимость.

Пример 1: Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ расходится.

Решение: Проверим, выполняется ли необходимое условие сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$.

Следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, а значит ряд расходится.

Пример 2: Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ на сходимость.

Решение: Применим признак Даламбера:

$$\text{Здесь } a_n = \frac{n}{3^n}; \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{3^n \cdot 3}.$$

$$\text{Вычислим предел: } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{3^n \cdot 3 \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Так как $l < 1$, то по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 3: Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ на сходимость.

Решение: Применим признак Даламбера

$$a_n = \frac{n!}{10^n}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} = \frac{n!(n+1)}{10^n \cdot 10}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot 10^n}{10^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (n+1) \cdot 10^n}{10^n \cdot 10 \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty > 1, \text{ так как } l > 1, \text{ то}$$

по признаку Даламбера ряд расходится.

Пример 4: Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n$ на сходимость.

Решение: Применим признак Коши: $a_n = \left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n$.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{5n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(5 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{3}{5}.$$

Так как $l = \frac{3}{5} < 1$, то по признаку Коши ряд сходится.

Знакопеременные ряды

Определение: Ряд с членами произвольных знаков называется знакопеременным.

Определение: Знакопеременный ряд называется знакопеременным, если положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно

$$a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n.$$

Приведем достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Признак сходимости Лейбница. Если абсолютные величины членов знакопеременного ряда $a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$ монотонно убывают: $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ и общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимости рядов

Возьмем знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем их расположение в ряде произвольно.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Определение: Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, а сам знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то он называется условно сходящимся.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ является рядом с положительными членами, то для исследования вопроса о его сходимости можно применять рассмотренные ранее признаки сходимости: признаки сравнения, Даламбера, интегральный и др.

Пример 1: Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Решение: Составим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - это гармонический ряд, он расходится. Для исследования на сходимость исходного знакочередующегося ряда применим признак Лейбница: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$ - первое условие выполнено;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ - второе условие выполнено.

Таким образом, по признаку Лейбница ряд сходится.

Так как ряд из модулей расходится, а сам знакочередующийся ряд сходится, значит, он сходится условно.

Пример 2: Исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость: $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Решение: Составим ряд из абсолютных величин членов дан-

ного ряда: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - это обобщенно-степенной

ряд. Так как показатель степени $q = 2 > 1$, то он сходится. Если сходится ряд из модулей, то знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Степенные ряды

Определение: Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

называется функциональным рядом.

Определение: Степенным рядом называется функциональный ряд

вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$ где x - независимая переменная, x_0 - фиксированное число, $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ - постоянные коэффициенты.

При $x_0 = 0$ степенной ряд принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Определение: Областью сходимости степенного ряда называется совокупность всех значений x , при которых данный ряд сходится.

Нахождение области сходимости состоит из двух этапов:

1) Определяется интервал сходимости степенного ряда, т.е. интервал $(-R; R)$ числовой оси, симметричный относительно точки $x=0$ и обладающий тем свойством, что при всех $|x| < R$ - ряд сходится. R - радиус сходимости нахо-

дится по формуле: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

2) Исследуется сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = -R$ и $x = R$.

В зависимости от результатов исследования, область сходимости запишется одним из следующих неравенств:

$$-R \leq x \leq R \quad \text{или} \quad x \in [-R; R];$$

$$-R < x \leq R \quad \text{или} \quad x \in (-R; R];$$

$$-R \leq x < R \quad \text{или} \quad x \in [-R; R);$$

$$-R < x < R \quad \text{или} \quad x \in (-R; R).$$

Для степенного ряда вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид $-R < x - x_0 < R$ или $-R + x_0 < x < R + x_0$.

Пример 1: Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$.

Решение: Найдем радиус сходимости степенного ряда.

В данном случае $a_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$, тогда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 3^n \cdot 3}{n \cdot 3^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot 3}{n} = 3$$

Запишем интервал сходимости: $-3 < x < 3$.

Исследуем сходимость степенного ряда на концах интервала.

При $x = 3$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - это гармонический ряд, он расходится.

При $x = -3$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Исследуем его на сходимость с помощью признака Лейбница: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Оба условия признака Лейбница выполняются, следовательно ряд сходится.

Рассмотрим ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Как показано выше данный ряд расходится. Отсюда можно сделать вывод, что при $x = -3$ заданный степенной ряд сходится условно.

Ответ: Область сходимости ряда $-3 \leq x < 3$.

Литература: [1] стр.396-418, 420-429, 431-445, задания № 12.1-12.8, стр. 407, № 12.9-12.13, стр. 429, № 13.3, стр. 446; [4] стр. 379-402.

Контрольные вопросы:

1. Что называется частичной суммой числового ряда?
2. Что называется суммой ряда?
3. Какой ряд называется сходящимся?
4. Какой ряд называется расходящимся?
5. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда с неотрицательными членами.

6. Сформулируйте достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

7. Какой ряд называется знакочередующимся ?

8. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующихся рядов?

9. Дать понятие функционального ряда.

10. Что называется интервалом и областью сходимости степенного ряда?

11. Приведите алгоритм нахождения области сходимости.

Задания контрольной работы

Задание 1: Вычислить пределы функций:

Вариант 1:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 4x - 5} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{\sqrt{2x + 11} - 5}$$

Вариант 2:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4}{2x^2 + 3x + 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{4x - 3} - 3}$$

Вариант 3:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)(x+2)}{2x^3 + 5} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{3x^2 - 5x - 2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{20 - x} - x}{x^2 - 16}$$

Вариант 4:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 5}{3x^2 + 7} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + 4x - 7} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 - x} - 3}{x^2 + x}$$

Вариант 5:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x + 1}{3x^4 + 5} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{6x + 4} - 4}$$

Вариант 6:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 6}{3x^2 + 7x - 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 5x - 7} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{\sqrt{5x} - 5}$$

Вариант 7:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x + 3}{2x^2 + 7} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 9x + 14} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{2x - 8} - 2}{x - 6}$$

Вариант 8:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{3x^2 + 7x + 2} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{\sqrt{2x - 1} - 3}$$

Вариант 9:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^2}{3x^2 + 5x + 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 7x + 6} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + 3x} - \sqrt{4 - 3x}}{7x}$$

Вариант 10:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 5x^2}{2x^2 + 3x + 3} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 9x + 18}{3x^2 - 17x - 6} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x + 2} - 1}$$

Вариант 11:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 - 2x}{3x^3 + 4x^2 + x} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 4x - 4} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{x^2 + 1}}$$

Вариант 12:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 4x^2 - x}{2x^5 + 2x - 3} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 7x + 10} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

Вариант 13:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4}{5x - x^2 - 7x^3} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{4x+1} - 3}$$

Вариант 14:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 9}{7x^2 + 10x^3 + 5} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - x - 14}{x^2 + 8x + 12} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$$

Вариант 15:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{6x^2 + 4x + 9} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 7x + 5} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}$$

Вариант 16:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 10x^2 - 3}{2x^5 - 5x^4 + 3x} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x^2} - 2}{3x^2}$$

Вариант 17:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 1}{x^2 + 2x^3 - x^4} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 4x - 5} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2x+11} - 5}{7 - x}$$

Вариант 18:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4}{5x^2 + 3x + 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{9 - x^2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x - 3}$$

Вариант 19:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 6}{1 - 7x + 3x^2} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{2}}{x^4 - 16}$$

Вариант 20:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - x + 2x^3}{5x^3 + 3x^2 + 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{25 - x^2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}}$$

Вариант 21:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^4 + 2x + 3} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 8}{1 - \sqrt{x-3}}$$

Вариант 22:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 6x + 7}{9 - 2x^3} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + 5x - 12}{4 - x} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x}$$

Вариант 23:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6 + 5x^5 - 10x}{3x^4 - x^3 + x^6} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{16 - x^2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4}$$

Вариант 24:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{1 - 7x + 3x^4} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 8x + 15} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{x-3}}{2 - \sqrt{x}}$$

Вариант 25:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 14x^2}{1 - 2x - 7x^5} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{3x^2 - 2x - 1} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - 20}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

Вариант 26:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^3 - 1}{8x + 3x^3} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{1 - x} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5 - \sqrt{22-x}}{x+3}$$

Вариант 27:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 5x^2 + 3x^5}{7 + 2x - x^5} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - x - 2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5-x^2} - \sqrt{5}}{x^2}$$

Вариант 28:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{1 - 3x^3} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 9x + 10} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{x-4}}{x-5}$$

Вариант 29:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{7x^2 + 3x - 1} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{25 - x^2}{x^2 - 2x - 15} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{2 - \sqrt{2x-6}}$$

Вариант 30:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x^2 + x^3}{x - 2x^3} \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 10x + 21}{x^2 + 8x + 15} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$$

Задание 2 . Найти производные функций.

В пункте в) найти вторую производную:

Вариант 1:

$$\text{a) } y = x \cdot \operatorname{tg}^3(x^2 - 1) \quad \text{б) } y = \ln^2 \sin 2x \quad \text{в) } y = x^2 \cdot (\ln x - 1)$$

Вариант 2:

$$\text{a) } y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} \quad \text{б) } y = (e^{-\sin x} + 1)^2 \quad \text{в) } y = \ln \operatorname{ctg} 2x$$

Вариант 3:

$$\text{a) } y = \ln(\operatorname{arctg} x) \quad \text{б) } y = \cos 2x \cdot \sin^2 x \quad \text{в) } y = x \cdot \operatorname{arctg} x$$

Вариант 4:

$$\text{a) } y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{б) } y = \arcsin \sqrt{1-3x} \quad \text{в) } y = x^3 \cdot \ln x$$

Вариант 5:

$$\text{a) } y = \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} \quad \text{б) } y = \ln(\operatorname{tg} 2x) \quad \text{в) } y = \operatorname{arctg} x$$

Вариант 6:

$$\text{a) } y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1}) \quad \text{б) } y = 2^x \cdot \sin^2 x \quad \text{в) } y = e^{\cos 3x}$$

Вариант 7:

a) $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$ б) $y = \frac{e^x}{\cos x}$ в) $y = 2^x \cdot \sin x$

Вариант 8:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \cos 6x$ б) $y = e^{\sin^2 7x}$ в) $y = e^x \cdot \sin x$

Вариант 9:

a) $y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ б) $y = \cos^5 3x \cdot \sin^3 5x$ в) $y = x \cdot e^{-x^2}$

Вариант 10:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1}$ б) $y = e^{\sin x} \cos^2 x$ в) $y = \sqrt{1 + x^2}$

Вариант 11:

a) $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ б) $y = \ln^2 \cos \sqrt{x}$ в) $y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x$

Вариант 12:

a) $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$ б) $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$ в) $y = e^x \cdot (1 + x^3)$

Вариант 13:

a) $y = x^2 \cdot \operatorname{arctg} x^2$ б) $y = 5^{\arcsin 2x}$ в) $y = e^{\sqrt{x}}$

Вариант 14:

a) $y = \operatorname{arctg}(e^{3x})$ б) $y = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} 4x}$ в) $y = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$

Вариант 15:

a) $y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$ б) $y = x \cdot \sin^2 x$ в) $y = x^2 \cdot \ln 3x$

Вариант 16:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \arcsin x$ б) $y = 2^{\arcsin^2 3x}$ в) $y = x \cdot \ln 5x$

Вариант 17:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sin 3x$ б) $y = 2^{\sin^2 3x}$ в) $y = e^x \cdot \ln x$

Вариант 18:

a) $y = \sin^5 x + \cos^4 5x$ б) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ в) $y = x^2 \cdot \ln x$

Вариант 19:

a) $y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ б) $y = \sin^3 2x$ в) $y = e^{5x^2}$

Вариант 20:

a) $y = \frac{3 - x^2}{6\sqrt{x}}$ б) $y = \ln \operatorname{tg} \sqrt{x}$ в) $y = 2^{\sin 3x}$

Вариант 21:

a) $y = (x^2 + 1) \cdot \ln(1 + x^2)$ б) $y = \sqrt{\cos 2x}$ в) $y = (2x + 1)^4$

Вариант 22:

a) $y = \frac{2}{x} \cdot \sin x^2$ б) $y = 3^{\arcsin 2x}$ в) $y = \ln \sin 2x$

Вариант 23:

$$\text{a) } y = e^{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg} 3x \quad \text{б) } y = \arcsin^2(1-3x) \quad \text{в) } y = \frac{x^2+1}{x}$$

Вариант 24:

$$\text{a) } y = \ln \frac{3x+1}{3x-1} \quad \text{б) } y = \ln^2(\sin 4x) \quad \text{в) } y = \operatorname{arctg}(x^2)$$

Вариант 25:

$$\text{a) } y = 3^{x^2} \cdot \operatorname{arctg} x \quad \text{б) } y = (1 + \cos^2 5x)^3 \quad \text{в) } y = \operatorname{arccotg} 2x$$

Вариант 26:

$$\text{a) } y = \sqrt[3]{x} \cdot \ln(1+x^2) \quad \text{б) } y = \sin^5 3x \quad \text{в) } y = e^{6x}$$

Вариант 27:

$$\text{a) } y = x^2 \cdot \operatorname{tg}(1-x) + \sqrt{1-x^2} \quad \text{б) } y = (x + \sin x)^4 \quad \text{в) } y = \ln \cos 4x$$

Вариант 28:

$$\text{a) } y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} \quad \text{б) } y = 4^{\operatorname{arctg} x^2} \quad \text{в) } y = x \cdot e^{2x}$$

Вариант 29:

$$\text{a) } y = \ln \frac{x^2}{1-x^2} \quad \text{б) } y = \arcsin \sqrt{x} \quad \text{в) } y = (1-2x)^{11}$$

Вариант 30:

$$\text{a) } y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \text{б) } y = (x^3 + 3^x)^3 \quad \text{в) } y = x^2 \cdot \ln x$$

Задание 3: Исследовать функцию и построить ее график:

Вариант 1 : $y = x^3 - 3x + 1$ **Вариант 2 :** $y = \frac{x^3}{6} - x^2$

Вариант 3 : $y = 3 + 3x - x^3$ **Вариант 4 :** $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

Вариант 5 : $y = x^4 - 5x^2 + 4$ **Вариант 6 :** $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

Вариант 7 : $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x$ **Вариант 8 :** $y = (2x-1)^2 \cdot x$

Вариант 9 : $y = x^3 - x^2$ **Вариант 10 :** $y = 36x - 3x^2 - 2x^3$

Вариант 11: $y = x^4 - 2x^2 + 3$ **Вариант 12 :** $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

Вариант 13 : $y = x^2 - x^3$ **Вариант 14:** $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

Вариант 15: $y = 3 + 3x - x^3$ **Вариант 16 :** $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

Вариант 17: $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ **Вариант 18 :** $y = 4x - \frac{x^3}{3}$

Вариант 19 : $y = x \cdot (1-x)^2$ **Вариант 20 :** $y = x^3 + 3x^2 - 1$

Вариант 21 : $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 2$ **Вариант 22 :** $y = x^3 - 12x - 3$

Вариант 23 : $y = 3x^2 - x^3$ **Вариант 24 :** $y = x^3 - x^2$

Вариант 25: $y = 9x + 3x^2 - x^3$ **Вариант 26:** $y = x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$

Вариант 27: $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$ **Вариант 28:** $y = x^3 - 3x - 3$

Вариант 29: $y = x^2(1-x) - 2$ **Вариант 30:** $y = 4 + 5x^2 - x^4$

Задание 4: Найти неопределенные интегралы и вычислить определенный интеграл:

Вариант 1:

a) $\int (3x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{4-x^2}) dx$ б) $\int \frac{\sin x dx}{(1+3\cos x)^2}$ в) $\int_0^1 (2x^3 + 1)^4 \cdot x^2 dx$

Вариант 2:

a) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} + x^5 - \frac{3}{9+x^2}) dx$ б) $\int \frac{dx}{(x-2)^7}$ в) $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x^4 - 8} \cdot x^3}{3} dx$

Вариант 3:

a) $\int (\frac{3}{4+x^2} - 2x + \cos 2x) dx$ б) $\int \frac{3x^2 dx}{2x^3 + 5}$ в) $\int_0^1 (5x^3 + 2)^4 \cdot x^2 dx$

Вариант 4:

a) $\int (4x^3 - \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}) dx$ б) $\int x^3 \cdot \sqrt{2x^4 - 1} dx$ в) $\int_0^{\pi/2} 12^{\sin x} \cdot \cos x dx$

Вариант 5:

a) $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ б) $\int e^{2\sin x} \cdot \cos x dx$ в) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{x dx}{\cos^2 x^2}$

Вариант 6:

a) $\int (2\sin 6x - \frac{1}{x} + e^{5x}) dx$ б) $\int 2^{x^5} \cdot x^4 dx$ в) $\int_0^3 \frac{1}{(1+2x)^9} dx$

Вариант 7:

a) $\int (x^4 + \frac{2}{\sin^2 x} - 3\cos 2x) dx$ б) $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$ в) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$

Вариант 8:

a) $\int (3e^{2x} - \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) dx$ б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{(1+\sin x)^3}}$ в) $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\sin^2 2x}$

Вариант 9:

a) $\int (\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + 2x + \frac{3}{x}) dx$ б) $\int \operatorname{tg} x dx$ в) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

Вариант 10:

a) $\int (5e^{2x} - \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} + 3) dx$ б) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$ в) $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Вариант 11:

$$\text{a) } \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} - \cos 3x \right) dx \quad \text{б) } \int \frac{\ln x dx}{x} \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+9x^2}}$$

Вариант 12:

$$\text{a) } \int \left(\frac{5x\sqrt[3]{x} + 7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{4+x^2} \right) dx \quad \text{б) } \int e^{x^3+1} \cdot x^2 dx \quad \text{в) } \int_0^{\pi} \sin^5 x \cos x dx$$

Вариант 13:

$$\text{a) } \int \left(\cos 2x - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx \quad \text{б) } \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{в) } \int_2^3 \frac{x^2 dx}{x^3-1}$$

Вариант 14:

$$\text{a) } \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + 4e^{2x} \right) dx \quad \text{б) } \int x^2 \sin x^3 dx \quad \text{в) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$$

Вариант 15:

$$\text{a) } \int \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} + 5 \cos 4x \right) dx \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x \ln x} \quad \text{в) } \int_3^6 \left(2 - \frac{x}{3} \right)^5 dx$$

Вариант 16:

$$\text{a) } \int \frac{2-4\cos^2 x}{\cos^2 x} dx \quad \text{б) } \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{(1+\sin x)^3}} \quad \text{в) } \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$$

Вариант 17:

$$\text{a) } \int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx \quad \text{б) } \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} \quad \text{в) } \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

Вариант 18:

$$\text{a) } \int \left(4x^3 + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad \text{б) } \int \sqrt{1-3x} dx \quad \text{в) } \int_2^3 \frac{dx}{(x+3)^4}$$

Вариант 19:

$$\text{a) } \int \left(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} - \sqrt[3]{x} + 2e^{5x} \right) dx \quad \text{б) } \int \sqrt[3]{2x+4} dx \quad \text{в) } \int_2^3 \frac{dx}{(2x+1)^3}$$

Вариант 20:

$$\text{a) } \int \left(2 + \cos 3x - \frac{1}{9+x^2} - \sqrt[3]{x^2} \right) dx \quad \text{б) } \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx \quad \text{в) } \int_0^2 x^3 (2+x^4)^2 dx$$

Вариант 21:

$$\text{a) } \int \left(\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2-9} \right) dx \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x \ln^3 x} \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{x dx}{9+x^2}$$

Вариант 22:

$$\text{a) } \int \left(7-3x+x^3 - \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx \quad \text{б) } \int \frac{\sin x dx}{(1-2\cos x)^2} \quad \text{в) } \int_0^3 (2+x)^5 dx$$

Вариант 23:

$$\text{a) } \int (1 + \cos 6x + 2e^{3x}) dx \quad \text{б) } \int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}} dx \quad \text{в) } \int_0^1 x^2 (2x^3 - 3)^3 dx$$

Вариант 24:

$$\text{a) } \int \left(\frac{1}{x^5} - 4 \sin x + 2 \cdot \sqrt[3]{x} \right) dx \quad \text{б) } \int \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - 5}} dx \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \sin x dx$$

Вариант 25:

$$\text{a) } \int \left(2 \sin 6x - 2^x - \frac{1}{x} \right) dx \quad \text{б) } \int \frac{x^2}{(x^3 - 3)^3} dx \quad \text{в) } \int_0^1 e^{x^3+1} \cdot x^2 dx$$

Вариант 26:

$$\text{a) } \int \left(3x - \frac{1}{9+x^2} + e^{5x} \right) dx \quad \text{б) } \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{(\sin x + 1)^3}} \quad \text{в) } \int_0^{-2} \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$$

Вариант 27:

$$\text{a) } \int \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} - x}{x^2} dx \quad \text{б) } \int \cos^2 x \sin x dx \quad \text{в) } \int_0^{-1/2} e^{-2x} dx$$

Вариант 28:

$$\text{a) } \int \left(x^3 - \frac{1}{4+x^2} + \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx \quad \text{б) } \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos x}} \quad \text{в) } \int_0^1 (2x^3 - 1)^4 \cdot x^2 dx$$

Вариант 29:

$$\text{a) } \int \frac{\sqrt[5]{x^2} + \sqrt{x} - x}{x} dx \quad \text{б) } \int \sqrt{2 \sin x + 1} \cdot \cos x dx \quad \text{в) } \int_2^4 \frac{dx}{x-1}$$

Вариант 30:

$$\text{a) } \int \left(4x^3 - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx \quad \text{б) } \int e^{\sin x} \cos x dx \quad \text{в) } \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx$$

Задание 5: Решить дифференциальные уравнения:

Вариант 1: а) $\sqrt{9+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$

б) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$, $y(\pi/4) = 0,5$ в) $y'' - 4y' - 12y = 0$

Вариант 2: а) $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 3xy^2 dx$

б) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(-1) = 1,5$ в) $y'' + 2y' + y = 0$

Вариант 3: а) $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$

б) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ в) $y'' + 4y' + 5y = 0$

Вариант 4: а) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0$

б) $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$ в) $y'' - 5y' + 4y = 0$

Вариант 5: а) $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$

б) $y' + \frac{y}{x} = xe^x$, $y(1) = e$ в) $y'' + y' - 2y = 0$

Вариант 6: а) $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$

б) $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2$, $y(0) = 1$ в) $y'' + 4y = 0$

Вариант 7: а) $y \ln y + xy' = 0$

б) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$, $y(\pi/2) = 1$ в) $y'' + y = 0$

Вариант 8: а) $\sqrt{4+y^2} + \sqrt{1-x^2} \cdot y \cdot y' = 0$

б) $y' + \frac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$ в) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Вариант 9: а) $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$

б) $y' - \frac{y}{x-2} = x(x-2)$, $y(3) = 1$ в) $y'' - y' = 0$

Вариант 10: а) $y(1 + \ln y) + xy' = 0$

б) $xy' - y = x^2$, $y(1) = 4$ в) $y'' - 2y' = 0$

Вариант 11: а) $\sqrt{4+y^2} dx - ydy = x^2ydy$

б) $xy' - y = x\sqrt{x}$, $y(0) = 1$ в) $y'' + 4y' + 4y = 0$

Вариант 12: а) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$

б) $y' + y = e^x$, $y(0) = 1$ в) $y'' + 16y = 0$

Вариант 13: а) $x\sqrt{1+y^2} - yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

б) $y' - \frac{y}{x} = x^3$, $y(1) = 0$ в) $y'' - 4y = 0$

Вариант 14: а) $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$

б) $y' - \frac{y}{x+1} = e^x \cdot (x+1)$, $y(0) = 1$ в) $y'' + 4y' - 5y = 0$

Вариант 15: а) $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$

б) $y' - \frac{y}{x-3} = x^2 - 3x$, $y(0) = 1$ в) $y'' + y' - 2y = 0$

Вариант 16: а) $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$

б) $y' - \frac{y}{x} = x^5$, $y(1) = 0$ в) $y'' - 6y' + 9y = 0$

Вариант 17: а) $\sqrt{16+y^2} dx - ydy = x^2ydy$

б) $y' + y \operatorname{ctg} x = \sin^2 x$, $y(\pi/4) = 0,5$ в) $y'' + 4y' - 12y = 0$

Вариант 18: а) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 3xy^2dx$

б) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(-1) = 1,5$ в) $y'' + 2y' + y = 0$

- Вариант 19:** а) $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$
 б) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ в) $y'' + 4y' + 5y = 0$
- Вариант 20:** а) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$
 б) $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$ в) $y'' - 5y' + 4y = 0$
- Вариант 21:** а) $2(xy + y)dx = x^2dy$
 б) $x^3y' + 3x^2y = 2$, $y(1) = 1$ в) $y'' + 2y' + 2y = 0$
- Вариант 22:** а) $y' \cdot \sqrt{1+x^2} = x$
 б) $xy' - 2y = x^3e^x$, $y(0) = e$ в) $y'' + 3y' + 2y = 0$
- Вариант 23:** а) $4xydx = (x^2 + 1)dy$
 б) $y' + 4y - 2x = 0$, $y(1) = 0$ в) $y'' + y' - 6y = 0$
- Вариант 24:** а) $(1 - x^2)dy = xydx$
 б) $(1 + x^2)y' - xy = 2x$, $y(0) = -1$ в) $y'' + 3y' = 0$
- Вариант 25:** а) $(1 + x)ydx = (y - 1)xdy$
 б) $y' - \frac{y}{x+2} = x(x+2)$, $y(0) = 2$ в) $y'' - 4y' + 5y = 0$
- Вариант 26:** а) $(xy + x)\frac{dx}{dy} = 1$
 б) $xy' + y = x + 1$, $y(0) = 0$ в) $y'' - y' - 2y = 0$
- Вариант 27:** а) $(1 + x^2)dy - 2x(y + 3)dx = 0$
 б) $y' + y = e^{-x}$, $y(0) = -2$ в) $y'' + 4y' + 29y = 0$
- Вариант 28:** а) $(1 - y)dx + (x + 1)dy = 0$
 б) $x^2y' - 2xy = 3$, $y(1) = -1$ в) $y'' + 4y' + 8y = 0$
- Вариант 29:** а) $(1 + y^2)xdx - (1 + x^2)ydy = 0$
 б) $xy' - y = -x$, $y(1) = 5$ в) $y'' + 25y = 0$
- Вариант 30:** а) $4xdx - 4ydy = 2x^2ydy - 5xy^2dx$
 б) $y' - \frac{y}{x-1} = e^x \cdot (x-1)$, $y(0) = 1$ в) $y'' - 4y' = 0$

Задание 6: Найти область сходимости степенного ряда:

- Вариант 1:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ **Вариант 2:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}$
- Вариант 3:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{\sqrt[3]{n}}$ **Вариант 4:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n \cdot (n+1)}$
- Вариант 5:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot x^n}{2^n}$ **Вариант 6:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 5^n}$

Вариант 7:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n (n+1)(n+2)}$	Вариант 8:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot x^n}{3n^2 + 1}$
Вариант 9:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n \cdot x^n}{n(n+1)}$	Вариант 10:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{8^n (n+1)}$
Вариант 11:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 5^n}$	Вариант 12:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3) \cdot 2^n}$
Вариант 13:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (x+1)^n}{\sqrt{n}}$	Вариант 14:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (x-2)^n}{\sqrt[3]{n}}$
Вариант 15:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n^2 \cdot (n+1)}$	Вариант 16:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 4^n}$
Вариант 17:	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot x^n$	Вариант 18:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
Вариант 19:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$	Вариант 20:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 10^n}$
Вариант 21:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2 \cdot 3^n}$	Вариант 22:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}$
Вариант 23:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{\sqrt[3]{n}}$	Вариант 24:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n \cdot (n+4)}$
Вариант 25:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 1) \cdot x^n}{2^n}$	Вариант 26:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2) \cdot 4^n}$
Вариант 27:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{3^n (n+2)}$	Вариант 28:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{3n^2 + 2}$
Вариант 29:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot (x-1)^n}{n(n+1)}$	Вариант 30:	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{6^n (n+1)}$

Задание 7. Творческое задание

Решить задачи методом составления дифференциальных уравнений

Вариант 1. Известно, что скорость тела, брошенного вертикально вниз с начальной скоростью \mathcal{G}_0 , определяется равенством $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + gt$. Найдите уравнение движения этого тела.

Вариант 2. Найти закон движения тела, если скорость движения пропорциональна пройденному пути и если за первые 10 с тело проходит 100 м, а за 15 с – 200 м.

Вариант 3. Скорость распада радия пропорциональна наличному количеству радия. Известно, что половина первоначального запаса радия распадается по истечении 1600 лет. Найти, какой процент радия окажется распавшимся по истечении 100 лет.

Вариант 4. Законом «естественного роста» называется такой закон роста, при котором скорость роста вещества пропорциональна наличному количеству вещества. Требуется найти формулу для определения

изменения количества вещества y в зависимости от времени t , считая, что в начальный момент $t = 0$ количество вещества было равно y_0 .

Вариант 5. Материальная точка массы m свободно падает под действием силы земного притяжения. Найти закон движения точки без учета сопротивления воздуха, если в момент времени $t = 0$ точка имела скорость v_0 .

Вариант 6. Найти уравнение движения материальной точки массы m , брошенной вертикально вверх с начальной скоростью v_0 без учета сопротивления воздуха.

Вариант 7. При прямолинейном движении материальная точка массы m удаляется от некоторой точки O (начало координат). При этом скорость движения в любой момент времени численно равна половине пройденного пути. Определить путь, скорость и ускорение как функции времени t , если начальная скорость $v_0 = 3$ м/с.

Вариант 8. Тело, нагретое до 100°C , охладилось за 20 мин до 60°C в комнате с температурой 20°C . Найти закон охлаждения тела. Через сколько минут оно остынет до 30°C , если скорость охлаждения пропорциональна разности температуры тела в данный момент и температуры воздуха в комнате?

Вариант 9. За какое время тело, нагретое до 100°C , охладится до 24°C в комнате с температурой 20°C , если до 40°C оно охлаждается за 10 мин?

Вариант 10. Цилиндрический сосуд высотой H и площадью основания имеет внизу отверстие, площадь которого равна σ . Найти время T , за которое жидкость, заполняющая сосуд, вытечет из сосуда, если известно, что скорость v вытекания жидкости выражается формулой $v = \sqrt{2gh}$, где g - ускорение силы тяжести, h — высота столба жидкости над отверстием.

Вариант 11. Тело при температуре 25° погружено в термостат, в котором поддерживается температура 0° . Известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. За какое время тело охладиться до 16° , если за 20 мин оно охлаждается до 20° ?

Вариант 12. За какое время вода, вскипяченная в чайнике, охладиться до 40° в комнате с температурой 20° , если до 60° она охлаждается за 10 мин?

Вариант 13. За 10 мин тело охладилось от 80° до 50° при температуре окружающего воздуха 15° . Найдите температуру тела через 1 ч после начального измерения.

Вариант 14. Вращающийся в жидкости диск замедляет свою угловую скорость за счет трения. Трение пропорционально угловой скорости. С какой угловой скоростью будет вращаться диск в момент

времени $t = 4$ мин, если при $t = 0$ он делает 120 оборотов в минуту, а при $t = 1$ мин его скорость стала равной 80 оборотам в минуту?

Вариант 15. Распад некоторого радиоактивного вещества пропорционален скорости его уменьшения. Найдите зависимость активности распада от времени, если известно что в течение 4 дней она уменьшилась вдвое.

Вариант 16. Толщина кирпичной стены равна 30 см. Найдите зависимость температуры от расстояния точки до наружного края стены, если температура составляет 20° на внутренней и 0° на внешней поверхности стены. Найдите также количество теплоты (на 1 м^2), которое стена отдает наружу в течение суток. Коэффициент теплопроводности считать равным $0,0015 \frac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{град}\cdot\text{с}}$.

Вариант 17. Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием силы F , прямо пропорциональной времени, прошедшему от начала движения, и обратно пропорциональной скорости движения. Найдите зависимость между скоростью v и временем t , если $v = 0$ при $t = 0$.

Вариант 18. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения v на время t . Найдите зависимость между скоростью и временем, если $v = v_0$ при $t = 0$.

Вариант 19. Ускорение точки выражается формулой $a = -\frac{5}{4}s - v$, где v - скорость точки, а s - пройденный ею путь. Найдите уравнение движения точки, если $s = 0$ и $v = 2$ при $t = 0$.

Вариант 20. Определите уравнение колебаний маятника, представляющего собой тело массы m , подвешенное на нити длины l (сопротивлением можно пренебречь и считать, что при малом угле α отклонения $\sin \alpha \approx \alpha$). Найдите период колебания.

Вариант 21. Согласно закону распада радия, скорость распада пропорциональна количеству радия. Известно, что половина первоначального запаса радия распадается за 1600 лет. Какой процент радия распадется через 100 лет?

Вариант 22. Сила, растягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины. Сила в 9,81 Н растягивает пружину на 0,01 м. К пружине подвесили груз в 19,62 Н. Найдите период колебания этого груза, если его слегка вывести из равновесия.

Вариант 23. Тело совершает 90 колебаний в минуту, амплитуда, колебания уменьшается в 2 раза за 15 с. Найдите дифференциальное уравнение колебательного движения.

Вариант 24. Найти уравнение движения материальной точки массы m , брошенной вертикально вверх с начальной скоростью v_0 без учета сопротивления воздуха.

Вариант 25. Определите уравнение колебаний маятника, представляющего собой тело массы m , подвешенное на нити длины l (сопротивлением можно пренебречь и считать, что при малом угле α отклонения $\sin \alpha \approx \alpha$). Найдите период колебания.

Вариант 26. Ускорение точки выражается формулой $a = -\frac{5}{4}s - v$, где v - скорость точки, а s - пройденный ею путь. Найдите уравнение движения точки, если $s=0$ и $v = 2$ при $t = 0$.

Вариант 27. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения v на время t . Найдите зависимость между скоростью и временем, если $v = v_0$ при $t = 0$.

Вариант 28. За какое время вода, вскипяченная в чайнике, охладиться до 40° в комнате с температурой 20° , если до 60° она охлаждается за 10 мин?

Вариант 29. Известно, что скорость тела, брошенного вертикально вниз с начальной скоростью \mathcal{V}_0 , определяется равенством $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + gt$. Найдите уравнение движения этого тела.

Вариант 30. Найти закон движения тела, если скорость движения пропорциональна пройденному пути и если за первые 10 с тело проходит 100 м, а за 15 с – 200 м.

5. Требования к оформлению контрольной работы

1. Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами синего или черного цвета. Необходимо оставить поля шириной 4-5 см для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради должны быть четко написаны фамилия и инициалы студента, его учебный шифр, название дисциплины, номер контрольной работы, номер варианта. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и личную подпись.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в контрольных заданиях, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
4. Задачи и их решения следует располагать в порядке возрастания номеров, указанных в контрольных заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи необходимо полностью записать ее условие.
6. Решения задач должны быть изложены подробно с необходимыми пояснениями по ходу решения.
7. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все ошибки, недочеты и выполнить рекомендации рецензента.
8. В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных выше правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются.

Приложение1

Пример оформления титульного листа контрольной работы

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра «Математика»

Контрольная работа по дисциплине

МАТЕМАТИКА

Выполнил: _____
(Фамилия И.О.)

студент _____ курса _____ направление _____
(срок обучения)

группа _____ № зачетной книжки _____

Подпись: _____

Ставрополь
20_

Перечень контрольных вопросов для проверки знаний по дисциплине

Контрольные вопросы к зачету

1. Функция. Предел и непрерывность функции
2. Постоянные и переменные величины. Определение функции. Область определения функции; способы ее задания. Графическое изображение функции. Основные сведения из классификации функций.
3. Числовые последовательности, их сходимости. Предел числовой последовательности. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности (формулировка).
4. Предел функции. Основные теоремы о пределах.
5. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$
6. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
7. Первый замечательный предел.
8. Второй замечательный предел.
9. Сравнение бесконечно малых величин.
10. Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции. Свойства функций, непрерывных на замкнутых множествах.
11. Дифференциальное исчисление функции одной переменной
12. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной; ее геометрический и механический смысл.
13. Правила дифференцирования функций.
14. Таблица производных
15. Вывод формулы дифференцирования функции: $y=c$.
16. Вывод формулы дифференцирования функции: $y=x$.
17. Вывод формулы дифференцирования функции: $y = u \cdot v$.
18. Вывод формулы дифференцирования функции: $y = \frac{u}{v}$.
19. Вывод формулы дифференцирования функции: $y = u^n$.
20. Вывод формулы дифференцирования функции: $y = \log_a u$.
21. Вывод формулы дифференцирования функции: $y = a^u$.
22. Вывод формулы дифференцирования функции: $y = u \cdot v$.
23. Вывод формулы дифференцирования функции: $y = u^v$
24. Дифференцирование функции, заданной неявно.
25. Производные высших порядков.

26. Производная сложной функции. Производная обратной функции.
27. Дифференциал функции; его геометрический смысл.
28. Свойства дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
29. Применение производной к вычислению пределов (правило Лопиталя).
30. Теоремы Ролля, Лагранжа. Применение производной к исследованию функций.
31. Экстремумы функции. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на интервале.
32. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба.
33. Асимптоты кривой. Схема исследования функции и построения ее графика.
34. Приближенное решение уравнений: графическое отделение корней методом проб;
35. Метод хорд и касательных. Метод итераций.
36. Определение функции нескольких независимых переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
37. Частные производные функции нескольких независимых переменных, их геометрический смысл (для случая двух независимых переменных). Частные производные высших порядков.
38. Полный дифференциал функции нескольких независимых переменных; его применение в приближенных вычислениях.
39. Экстремум функции многих переменных. Нахождение наибольших и наименьших значений функции.
40. Задача обработки наблюдений. Подбор параметров кривых по способу наименьших квадратов.

Вопросы к экзамену

1. Понятие о первообразной функции одной переменной. Теорема о двух первообразных.
2. Понятие о неопределенном интеграле. Свойства неопределенного интеграла.
3. Геометрическое изображение неопределенного интеграла. Таблица интегралов.
4. Методы непосредственного интегрирования (по таблице, разложением, подведением функции под знак дифференциала).
5. Метод интегрирования подведением функции под знак дифференциала и его частные случаи.
6. Интегрирование функции одной переменной методом подстановки.
7. Вывод формулы интегрирования по частям.
8. Нахождение интегралов вида: $\int P(x) \sin ax dx$, $\int P(x) \cos ax dx$, $\int P(x) e^{ax} dx$.
9. Нахождение интегралов вида: $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$.
10. Метод нахождения интегралов вида: $\int e^{ax} \sin b x dx$, $\int e^{ax} \cos b x dx$.
11. Рациональные функции. Алгоритм представления неправильной рациональной дроби в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.
12. Простейшие дроби. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби.
13. Интегрирование простейших дробей I и II типов.
14. Интегрирование простейших дробей III типа.
15. Метод неопределенных коэффициентов при разложении рациональной функции на простейшие дроби.

16. Метод частных значений при разложении рациональной функции на простейшие дроби.
17. Общее правило интегрирования рациональной функции. Пример.
18. Интегрирование тригонометрических функций.
19. Интегрирование иррациональных функций.
20. Интегрирование функций, зависящих от показательной функции.
21. Найти $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ двумя способами и проверить справедливость теоремы о двух первообразных.
22. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
23. Определенный интеграл как предмет интегральной суммы.
24. Свойства определенного интеграла.
25. Формула Ньютона-Лейбница.
26. Вычисление определенного интеграла методом подстановки.
27. Вычисление определенного интеграла по частям.
28. Определенный интеграл на симметричном множестве.
29. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.
30. Приложение определенного интеграла к вычислению объемов тел вращения.
31. Несобственные интегралы I рода (с бесконечными пределами интегрирования).
32. Несобственные интегралы II рода (от разрывных функций).
33. Признаки сходимости несобственного интеграла.
34. Интегральное исчисление в экономике.
35. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение двойного интеграла.
36. Вычисление двойного интеграла. Геометрические приложения двойного интеграла.
37. Понятие о тройном интеграле.
38. Числовые ряды; их сходимость и расходимость. Необходимые условия сходимости. Свойства сходящихся рядов.
39. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости, основанные на сравнении рядов.
40. Признак Даламбера. Интегральный признак Коши.
41. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.
42. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости.
43. Ряды Тейлора и Маклорена. Биномиальный ряд. Разложение в степенной ряд элементарных функций.
44. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям, вычисление определенных интегралов, решение дифференциальных уравнений.