ФГБОУ СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*Кафедра электроснабжения и эксплуатации электрооборудования*

# Решение прикладных задач агроинженерии

## Учебное пособие для выполнения курсовой работы по дисциплине «Современные методы исследования в агроинженерии»

Ставрополь, 2023

УДК 511.3 (075.8)
ББК 40.76я73
Х81

**Рецензент**
доктор технических наук, заместитель директора Института электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского федерального университета по научной работе
*А. С. Степанов*

**Хорольский В. Я.**
Х81 Решение прикладных задач агроинженерии: учебное пособие / В. Я. Хорольский, В. Н. Шемякин, С. В. Аникуев : Ставропольский государственный аграрный университет. – Ставрополь: 2023 – 28 с.

Изложены методические положения по решению часто встречающихся задач эксплуатационно-ремонтного обслуживания распределительных электрических сетей. Материал базируется на использовании теории массового обслуживания, методов линейного программирования, выбора оптимального решения.

Для студентов вузов по направлениям магистерской подготовки 35.04.06 – «Агроинженерия».

©

УДК 511.3 (075.8)
ББК 40.76я73

# Предисловие

Переход высшей школы на систему образования с подготовкой бакалавров и магистров диктует необходимость создания методического обеспечения для разработки магистерских диссертаций. Среди различных дисциплин, обеспечивающих решение такой задачи необходимо отметить использование прикладных математических методов.

Специфика построения и функционирования электроэнергетических объектов связана с необходимостью проведение плановых и неплановых мероприятий по поддержанию электрооборудования в исправном состоянии и обеспечения надежного электроснабжения потребителей. При этом следует учитывать случайный характер процессов, происходящих в электроустановках и необходимость оперативного и квалифицированного устранения возникающих неисправностей. Решение таких задач не мыслимо без применения математических методов.

Основное теоретическое содержание пособия составляют вопросы, связанные с использованием теории массового обслуживания, линейного программирования, проведением оптимизационных расчетов.

В пособии даются методические рекомендации по решению ряда конкретных задач, возникающих в практике эксплуатационного обслуживания электрических сетей, связанных с наличием очереди при устранении аварийных ситуаций в электрических сетях, с поэтапным проведением эксплуатационных работ, с минимизацией затрат при выполнении капитального ремонта сетей, с решением задачи формирования оптимального резервного фонда электрооборудования.

Освоение прикладных математических методов путем решения практических задач из области электроэнергетики позволит более качественно проводить научные исследования при освоении магистерских программ, получать научно-обоснованные рекомендации по вопросам проектирования и эксплуатации электросетевого оборудования. В конечном итоге знание и умение применять математические методы даст возможность магистранту качественно и в установленные сроки разработать диссертацию, а производству получить квалифицированных специалистов, способных на должном уровне решать производственные задачи, творчески мыслить и способствовать дальнейшему развитию и совершенствованию закрепленного за ними производственного участка.

Авторы надеются, что методические рекомендации, изложенные в данном пособии, будут также полезны студентам и аспирантам других направлений, работающим над магистерскими и кандидатскими диссертациями.

# 1 Рекомендации по выполнению курсовой работы

## 1.1 Примерное содержание и последовательность выполнения курсовой работы

Курсовая работа должен включать следующие разделы:

1. Определение показателей ремонтно-восстановительных работ в электрических сетях в аварийных ситуациях (СМО с неограниченной очередью).

2. Расчет характеристик ремонтно-восстановительных работ с учетом их поэтапного проведения (многофазные СМО).

3. Минимизация транспортных расходов при проведении капитального ремонта электрических сетей (транспортная задача линейного программирования).

4.Определение оптимального резервного фонда электроустановки.

В процессе выполнения курсового проекта рекомендуется соблюдать предложенный порядок выполнения расчетов.

## 1.2 Указания по оформлению расчетно-пояснительной записки

Исходными данными для выполнения курсовой работы являются материалы о работе электросетевого предприятия, собираемые в процессе производственной практики или задаваемые преподавателем.

Курсовая работа должна содержать расчетно-пояснительную записку (15–20 с) формата А4 (210 х 297). Необходимые рисунки, получаемые в результате расчетов, размещаются по тексту и выполняются в одном из графических редакторов.

Расчетно-пояснительная записка должна быть написана или набрана на персональном компьютере на листах белой бумаги с одной стороны с оставлением полей: с левой стороны – не менее 35 мм; с правой – 10 мм; сверху и снизу – 20 мм. Межстрочный интервал – 1,5. Страницы должны быть пронумерованы. Записку следует подписать и поставить дату окончания работы. В конце записки приводятся выводы, список использованных источников, содержание.

Титульный лист оформляется в соответствии с принятой на факультете формой.

# 2 Методические указания по выполнению курсовой работы

## 2.1 Моделирование задач электроэнергетики методами теории массового обслуживания

### 2.1.1 Общие положения

Теорию массового обслуживания следует рассматривать как раздел прикладной математики, изучающей процессы, связанные с удовлетворением массового спроса на выполнение какого-либо вида услуг с учетом случайного характера спроса и обслуживания. Применительно к электроэнергетике это могут быть задачи: формирования резервного фонда электрооборудования, работа ремонтного персонала по ликвидации аварийных ситуаций в электроустановках, производство переключений и подготовка рабочих мест в электрических сетях оперативным персоналом, оценка надежности восстанавливаемых систем и т. д.

Каждая система массового обслуживания (СМО) может быть представлена в виде определенного числа обслуживающих единиц, которые называются каналами обслуживания (термин взят из телефонных сетей, применительно к которым начала развиваться теория массового обслуживания). В качестве канала могут рассматриваться различного вида приборы и приспособления, вычислительная машина, коллектив людей или отдельный исполнитель, выполняющий определенный вид работ. По числу каналов СМО делится на одноканальные и многоканальные системы.

Функционирование любой СМО заключается в обслуживании поступающего в нее потока заявок или требований. Заявки обычно поступают нерегулярно, образуя случайный поток заявок (требований). На обслуживание заявки также необходимо определенное время. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к неравномерной загрузке СМО. В какие-то периоды времени скапливается большое количество заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО, не получив обслуживания), в другие периоды СМО может работать с недогрузкой или простаивать.

В электроэнергетике довольно часто приходиться сталкиваться с системами, в которых заявка, поступившая в систему в любой момент времени, может застать канал занятым обслуживанием. Характерным с этой точки зрения является работа оперативно-ремонтного персонала при возникновении аварийных ситуаций в электрических сетях. Повреждение, как случайное событие, может произойти в любой момент времени, на любой отходящей линии или подстанции, а может произойти одновременно на нескольких фидерах. Поскольку повреждения, возникающие в разных местах, сразу устранить невозможно, то выездная бригада последовательно устраняет одно повреждение за другим.

Исходя из вышеизложенного, в качестве СМО с ожиданием следует рассматривать систему, в которой заявка, заставшая все каналы занятыми, становиться в очередь и ожидает своего обслуживания. При рассмотрении таких систем помимо ранее рассмотренных показателей эффективности СМО дополнительно следует учитывать такие характеристики как средняя длина очереди, время пребывания заявки в очереди и т. д.

## 2.1.2 Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Пусть имеется n-канальная СМО, на которую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda$, а интенсивность обслуживания $\mu = 1/t_{обсл}$. Для такой системы возможны следующие состояния с учетом числа заявок (обслуживаемых и ожидающих обслуживания): $s_0$ – канал свободен, заявок нет; $s_1$ – занят один канал, остальные свободны; $s_2$ – заняты два канала, остальные свободны; …; $s_k$ – заняты k каналов, остальные свободны; …; $s_n$ – заняты все n каналов (очереди нет); $s_{n+1}$ – заняты все n каналов, в очереди одна заявка; …; $s_{n+m}$ – заняты все n каналов, в очереди m заявок.

Граф состояний системы показан на рисунке 2.1.

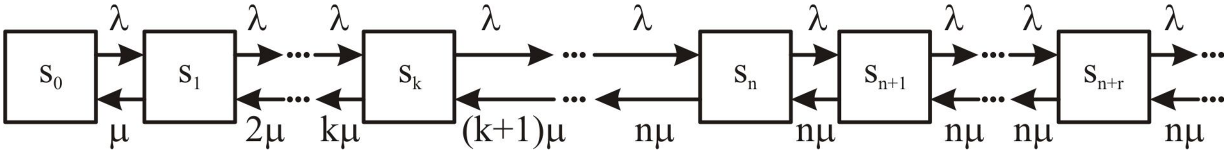



**Рисунок 2.1 – Граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью**

Следует обратить внимание на то, что для таких систем имеется отличие, заключающееся в том, что интенсивность потока восстановлений (переводящего систему из одного состояния в другое справа налево) не остается постоянной, а по мере увеличения числа заявок от 0 до n увеличивается от величины $\mu$ до величины $n\mu$, так как, соответственно, увеличивается число каналов обслуживания. При числе заявок больше n интенсивность потока восстановлений остается постоянной, равной $n\mu$.

Для рассматриваемого графа можно написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова и для предельных вероятностей, приравнивая производные нулю, получить следующую систему алгебраических уравнений

$$
\begin{cases}
0 = -\lambda p_0 + \mu p_1; \\
0 = \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\
0 = \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1}; \quad (1 \le k \le n-1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\
0 = \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu) p_n + (n+1)\mu p_{n+1}; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\
0 = \lambda p_{n+m-1} - [\lambda + (n+m)\mu] p_{n+m} + (n+m+1)\mu p_{n+m+1}.
\end{cases} \tag{2.1}
$$

Используя формулы для процесса гибели и размножения, можно получить следующие выражения для предельных вероятностей состояний n-канальной СМО с неограниченной очередью

$$
p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}. \tag{2.2}
$$

$$
p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \ \dots, \ p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ \dots, \ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \tag{2.3}
$$

$$
p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \ \dots, \ p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0, \ \dots. \tag{2.4}
$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди

$$
p_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0. \tag{2.5}
$$

Показатели эффективности многоканальной СМО с неограниченной очередью рассчитываются по следующим формулам:
среднее число занятых каналов

$$
\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho; \tag{2.6}
$$

среднее число заявок в очереди

$$
\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}; \tag{2.7}
$$

среднее число заявок в системе

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho; \tag{2.8}$$

среднее время пребывания заявки в очереди

$$\bar{t}_{оч} = \frac{1}{\lambda}\bar{r}; \tag{2.9}$$

среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t}_{сист} = \frac{1}{\lambda}\bar{z}. \tag{2.10}$$

Поскольку в рассматриваемой системе с неограниченной очередью при $\rho < 1$ любая заявка, пришедшая в систему будет обслужена, то вероятность отказа $p_{отк} = 0$, относительная пропускная способность $Q = 1$, а абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока заявок $A = \lambda$.

Для определения оптимального числа ремонтных бригад по устранению повреждений в электрических сетях помимо показателей эффективности системы массового обслуживания необходимо ввести критерий оптимизации. Существует несколько подходов к выбору такого показателя. Можно воспользоваться достаточно простым и удобным аналитическим выражением экономического критерия, предложенным в работах Н. Ш. Кремера [9]. Относительную величину затрат можно определить по формуле $C_{отн} = \frac{1}{\lambda}n + 3\bar{t}_{оч}$.

Рассмотрим конкретный пример по определению показателей таких СМО.

**Пример 2.1.** В условиях повышенной гололедно-ветровой нагрузки в регионе происходит массовое отключение фидеров воздушных линий электропередачи. Поток аварийных отключений в районе электрических сетей достиг 11 штук за смену (8 ч). Средняя продолжительность устранения повреждения 2 ч. Необходимо определить: 1 – количество ремонтных бригад, при котором очередь не будет расти до бесконечности и характеристики СМО; 2 – оптимальное число ремонтных бригад и характеристики СМО в этом случае; 3 – провести сравнение.

Р е ш е н и е: 1. По условию задачи имеем: $\lambda = \frac{11}{8} = 1{,}38\ 1/\text{ч}$; $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ 1/\text{ч}$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1{,}38}{0{,}5} = 2{,}76$.

Известно, что очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\frac{\rho}{n} < 1$, то есть при $n > \rho = 2{,}76$. Следовательно, минимальное количество ремонтных бригад следует принять равным 3.

2. Определим вероятности состояний СМО при n = 3.

Вероятность того, что в систему не поступят заявки об отключениях

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{2{,}76}{1} + \frac{2{,}76^2}{1\cdot 2} + \frac{2{,}76^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1{,}5^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(3-2{,}76)}\right)^{-1} = 0{,}02.$$

Таким образом, в среднем в двух процентах от общего объема сетей не будут выполняться ремонтные работы.

Вероятность того, что в СМО будет очередь

$$p_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 = \frac{2{,}76^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(3-2{,}76)} = 0{,}81.$$

3. Рассчитаем показатели эффективности СМО:

среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2} = \frac{2{,}76^4\cdot 0{,}02}{3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\left(1-\frac{2{,}76}{3}\right)^2} = 10{,}07;$$

среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{оч} = \frac{1}{\lambda}\bar{r} = \frac{1}{1{,}38}\cdot 10{,}07 = 7{,}30\ \text{ч};$$

среднее число отключенных фидеров

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho = 10{,}07 + 2{,}76 = 12{,}83;$$

среднее время нахождения потребителей в отключенном состоянии

$$\bar{t}_{сист} = \frac{1}{\lambda}\bar{z} = \frac{1}{1{,}38}\cdot 12.83 = 9{,}30\ \text{ч}.$$

Для определения оптимального числа ремонтных бригад по устранению повреждений в электрических сетях помимо показателей эффективности системы массового обслуживания необходимо ввести критерий оптимизации. Относительную величину затрат определим по формуле $C_{отн} = \frac{1}{\lambda}n + 3\bar{t}_{оч} = \frac{1}{1,38} \cdot 3 + 3 \cdot 7,30 = 24,07$.

Анализ полученных характеристик эффективности системы массового обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке ремонтных подразделений при наличии трех бригад.

4. Для определения оптимального числа ремонтных бригад были вычислены показатели эффективности системы массового обслуживания при различном количестве ремонтных подразделений. Результаты расчетов сведены в таблицу 1.2.

**Таблица 1.2 – Показатели эффективности системы массового обслуживания**

| Характеристика СМО | Число ремонтных бригад | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Вероятность простоя ремонтной бригады | 0,02 | 0,05 | 0,06 | 0,06 | 0,06 |
| Число заявок в очереди на ремонт | 10,07 | 0,87 | 0,22 | 0,02 | 0,02 |
| Время ожидания в очереди, ч | 7,30 | 0,63 | 0,16 | 0,01 | 0,01 |
| Относительная величина затрат, ед. | 24,07 | 4,79 | 4,10 | 4,38 | 5,10 |

Как следует из количественных данных, приведенных в таблице 1.2, минимальные затраты можно получить при $n_{опт} = 5$. Проведенными дополнительными расчетами других показателей эффективности системы массового обслуживания для $n = 5$ установлено, что $p_{оч} = 0,03$; $\bar{t}_{сист} = 2,16$ ч.

5. Выполненные исследования позволили установить, что при числе ремонтных бригад n = 5 по сравнению с n = 3 существенно уменьшилась вероятность возникновения очереди $p_{оч}$, длина очереди $\bar{r}$ и среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{оч}$. При этом обеспечивается минимум относительной величины затрат на выполнение ремонтных работ.

### 2.1.3 Многофазные системы массового обслуживания

Специфика ремонтно-эксплуатационного обслуживания электрических сетей предопределяет использование многофазных СМО, когда обслуживание поступившей заявки осуществляется в несколько этапов. Характерная ситуация возникает в электрических сетях при возникновении аварийной ситуации Проведение ремонтных работ обычно осуществляется в два этапа – отключение поврежденного участка и подготовка рабочего места выполняется оперативно-выездной бригадой, а непосредственно восстановительные работы проводит ремонтное подразделение. При этом в зависимости от сложности повреждения последний вид работ может проводить одна или несколько бригад. Специфичным может быть также отсутствие очереди по причине малой интенсивности потока отключений электрических сетей.

Рассмотрим простейшую СМО без очереди с подготовкой каналов. На n – канальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda$. Время обслуживания заявок распределено по показательному закону с параметром $\mu$. До начала обслуживания канал должен быть подготовлен. Время подготовки $t_{подг}$ имеет показательное распределение с параметром $\varphi$ и не зависит от того, как давно канал прекратил работу.

При поступлении заявки вначале выполняется операция подготовки, а затем она поступает на обслуживание. Заявка, заставшая все каналы занятыми, на обслуживание не принимается.

В рассматриваемом случае обслуживание заявки состоит из двух фаз: подготовки со временем подготовки $t_{подг}$ и самого обслуживания в течение времени $t_{обсл}$. В результате общее среднее обслуживания $\tilde{t}_{обсл} = \bar{t}_{подг} + \bar{t}_{обсл}$.

Случайная величина $\tilde{t}_{обсл}$ обычно распределена по обобщенному закону Эрланга второго порядка [4] с параметрами $\mu$ и $\varphi$.

Известно, что формулы Эрланга справедливы не только для показательного, но и для любого другого распределения времени обслуживания. Для решения практических задач нам необходимо найти величину $\tilde{\mu}$.

$$t_{обсл} = 1/\mu + 1/\varphi = \frac{\mu + \varphi}{\mu\varphi}. \tag{2.11}$$

Следовательно,

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu\varphi}{\mu + \varphi}. \tag{2.12}$$

Определив $\tilde{\rho} = \lambda/\tilde{\mu}$ и подставив его в формулы Эрланга, получим:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{1!} + \ldots + \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} + \ldots + \frac{\tilde{\rho}^n}{n!}\right)^{-1}; \tag{2.13}$$

$$p_k = \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} p_0, \ (1 \le k < n); \tag{2.14}$$

$$p_{отк} = \tilde{p}_n = \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0 . \qquad (2.15)$$

Показатели эффективности СМО определяются по известным формулам

$$Q = 1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0; \qquad A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0\right). \qquad (2.16)$$

Для определения среднего числа занятых каналов нужно разделить А на $\tilde{\mu}$

$$k = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}}\left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0\right) = \tilde{\rho}\left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0\right). \qquad (2.17)$$

## 2.2 Оптимальное резервирование электроэнергетических установок

Довольно в практике научных исследований для решения задачи определения оптимального количества резервных элементов используется метод наискорейшего спуска.

Оптимизационная задача может быть сформулирована следующим образом. Комплект электрооборудования, используемый на сетевом предприятии, может не удовлетворять требованиям по надежности. С целью доведения показателей надежности до заданных требований осуществляется введение структурной избыточности. При этом формулируется экстремальная задача комбинаторного типа, математическое содержание которой сводится к нахождению такой совокупности электротехнических агрегатов, которая обеспечивает минимальную величину их суммарной стоимости при: выполнении ограничений, наложенных на показатели надежности.

Будем исходить из следующих предпосылок. Электроустановка состоит из n последовательно соединенных агрегатов независимых в смысле надежности. Каждый агрегат характеризуется определенными показателями надежности. Численные значения их для i-й функциональной подсистемы зависят от принятого способа резервирования и количества резервных элементов

$$R_i = f(v_i, h_i), \qquad (2.18)$$

где $v_i$ – способ резервирования;
$h_i$ – количество резервных элементов.

Поскольку наиболее распространенными показателями надежности являются вероятность безотказной работы и коэффициент готовности, результирующий показатель надежности электрооборудования определяется по выражению

$$R(V,H) = R_1(v_1,h_1)R_2(v_2,h_2)\ \cdots\ R_n(v_n,h_n) = \prod_{i=1}^{n} R_i(v_i,h_i)\,. \qquad (2.19)$$

В качестве целевой функции рассмотрим суммарные затраты на содержание резервного фонда и ущерб от выхода из строя электрооборудования, тогда

$$C(V,H) = C(v_1, v_2, ..., v_n; h_1, h_2, ... h_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i(v_i, h_i), \qquad (2.20)$$

где $C$ – стоимость системы;

$c_i$ – стоимость одного i-го элемента.

С учетом изложенного, математическую формулировку задачи оптимального резервирования можно представить в следующем виде

$$(v_1, v_2, ..., v_n; h_1, h_2, ... h_n) \to \min\left[C = \sum_{i=1}^{n} c_i(v_i, h_i)\right] \qquad (2.21)$$

$$\prod_{i=1}^{n} R_i(v_i, h_i) \ge R^*,$$

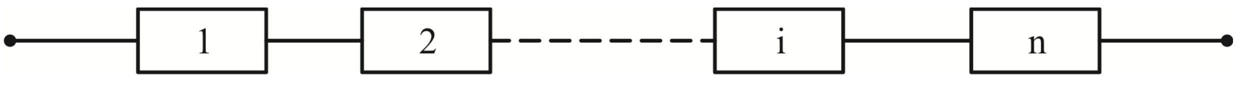
где $\forall v_i \ge 0$, $\forall h_i \ge 0$ – целые числа;

$R^*$ – заданное значение показателя надежности электрооборудования.

Не исключается и обратная постановка задачи оптимального резервирования.

При применении метода наискорейшего спуска процесс оптимизации разворачивается во времени таким образом, что на каждом шаге отыскивается участок резервирования, подключение к которому одного элемента дает наибольший выигрыш в виде увеличения показателя надежности на единицу затрат, т. е. движении к экстремуму осуществляется по направлению максимальной частной производной.

Рассмотрим систему, состоящую из n последовательно соединенных элементов, которые отличаются друг от друга вероятностью безотказной работы и стоимостью



Решение задачи оптимизации при использовании метода наискорейшего спуска можно представить в виде следующего многошагового процесса.

Обозначим $P_i(m_i)$ вероятность безотказной работы за фиксированное время $t_i$ агрегата при наличии $m_1$ резервных элементов, а через $c_i$ – стоимость одного элемента i-го типа. Для каждого агрегата вычислим $P_i(m_i)$, а также $d_i(m_i)$, где $d_i(m_i) = [P_i(m_i+1) – P_i(m_i)]/c_iP_i(m_i)$

1-й шаг. Определяем агрегат с номером k, для которого $d_k(1) = \max d_i(1)$, и к нему добавляем один резервный элемент. Затем вычисляем значения

$$P^{(1)} = P^{(0)}P_k(1)/P_k(0); \; C^{(1)} = C^{(0)} + c_k,$$

где $P^{(0)}$, $C^{(0)}$ – вероятность безотказной работы и стоимость нерезервированной системы

$$P^{(0)} = \prod_{i=1}^{n} P_i(0), \; C^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \; .$$

2-й шаг. Определяем максимальную из величин $d_i(l)$, $i \neq k$, $d_k(2)$. Добавляем один резервный элемент к g-му агрегату, для которого $d_g(l) = \max d_i(1)$ или снова к k-му агрегату, если $d_k(2) > d_i(1)$. Вычисляются значения

$$\begin{array}{lll}
P^{(2)} = P_g(1)P^{(1)}/P_g(0) & \text{если} \;\; d_g(1) > d_k(2) & \text{или} \\
P^{(2)} = P_k(2)P^{(1)}/P_k(1) & \text{если} \;\; d_k(2) > d_i(1), & \text{а также} \\
C^{(2)} = C^{(1)}+c_g & \text{если} \;\; d_g(1) > d_k(2) & \text{или} \\
C^{(2)} = C^{(1)}+c_k & \text{если} \;\; d_k(2) > d_i(1) &
\end{array}$$

На последующих шагах процедуры повторяются. Многошаговый процесс останавливается на шаге N, на котором выполняется условие $C^{(N)} < C < C^{(N+1)}$.

## 2.3 Использование метода линейное программирования для решения задач агроинженерии

### 2.3.1 Формулировка задачи линейного программирования

Возникновение и начало применения методов математического программирования для решения производственных задач относится к 1938 году, когда по заданию Ленинградского фанерного треста профессор Ленинградского государственного университета Л. В. Канторович решил ряд задач, связанных с организацией и планированием производства специальным математическим методом, названным им тогда методом разрешающих множеств. В США методы математического программирования появились впервые лишь в 1947 году, когда Данциг разработал численный метод решения задач линейного программирования, названный симплекс-методом.

Линейное программирование – математический метод отыскания максимума или минимума линейной функции при наличии ограничений виде линейных неравенств или уравнений.

Максимизируемая (минимизируемая) функция представляет собой принятый критерий эффективности решения задачи, соответствующей поставленной цели. Она получила название целевой функции. Ограничения характеризуют имеющиеся возможности решения задач.

Применение методов математического программирования и ЭВМ дает возможность решать сложные производственно-экономические задачи. Однако на каждом шагу встречаются небольшие варианты задач, которые можно и целесообразно решать вручную.

Сущность решения задачи линейного программирования заключается в том, чтобы найти условия, обращающие целевую функцию в максимум или минимум.

Решение, удовлетворяющее условию задачи и соответствующее намеченной цели, называется оптимальным планом.

В общем виде, когда количество неизвестных равно n, задача линейного программирования формулируется следующим образом:
среди неизвестных $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m. \end{cases} \tag{2.22}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots x_n \ge 0. \tag{2.23}$$

определить такие неизвестные, при которых линейная функция

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.24}$$

достигнет своего наименьшего (наибольшего) значения. Линейная функция z называется линейной формой, линейным функционалом или целевой функцией. Наибольшее распространение получило название целевая функция. Его и будем применять в дальнейшем

В более короткой форме записи уравнение (2.22) имеет вид:
среди неизвестных $x_j$, где $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих системе

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \ (i = 1, 2, ..., m), \ x_j \geq 0 \qquad (2.25)$$

определить такие значения, при которых линейная функция

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.26)$$

достигнет своего наименьшего (наибольшего) значения.

В приведенных выражениях $x_j$, где $j = 1, 2, \ldots, n$, есть сокращенная запись любой из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые можно получить, если в выражении $x_j$ индексу j придавать последовательно значения 1, 2, …, n. То есть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – искомые (неизвестные) величины. Ими могут быть в зависимости от вида задачи количественные значения изделий определенного вида, материала соответствующей марки, оборудования той или иной группы и т. д.

Коэффициенты при неизвестных целевой функции (2.26) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – заданные постоянные величины. Они также зависят от решаемой задачи и могут представлять собой себестоимость, цену или прибыль от того или иного изделия, цену материалов или оборудования, трудозатраты на выполнение мероприятий и др.

Коэффициентами при неизвестных в линейных уравнения (2.25) являются числа $a_{ij}$, где i – номер уравнения или строки, в котором находится данный коэффициент, j – номер неизвестной, при которой стоит этот коэффициент или номер столбца.

Коэффициенты $a_{ij}$ являются заданными постоянными числами и выражают те или иные затраты времени на изготовление оборудования, объем материалов на изготовление изделия и т. д.

Свободные члены в линейных уравнениях (2.25) $b_i$ обозначаю, например, величину тех или иных ресурсов, которыми располагают предприятия, или могут располагать. Ими могут быть оборудование или время его работы, запасы материалов, численность персонала, продолжительность работы, трудозатраты и др. Искомые переменные величины $x_j$ не могут быть отрицательными.

Каждое из решений системы (2.25) принято называть возможным или допустимым планом.

Все множество решений или допустимых планов называется областью определения целевой функции. Она может оказаться пустой, если условия (2.25) и (2.26) несовместны.

Из множества решений, удовлетворяющих условиям (2.25) необходимо найти такое, при котором целевая функция (2.26) принимала бы максимальное или минимальное значение. Нахождение экстремума целевой функции при условиях, что переменные удовлетворяют линейным ограничениям и составляет предмет линейного программирования.

При решении задач методами линейного программирования могут быть три случая:

- условия задачи (2.25) и (2.26) противоречивы, то есть не существует набора чисел $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, удовлетворяющих всем условиям задачи;
- условия (2.25) и (2.26) не противоречивы, но целевая функция не ограничена;
- система условий (2.25) и (2.26) совместна и экстремум целевой функции существует, то есть значение максимума или минимума целевой функции (2.26) конечно.

Для большинства правильно поставленных задач будет иметь место третий случай.

### 2.3.2 Оптимизация транспортных расходов при проведении капитального ремонта электрической сети (транспортная задача линейного программирования)

В общем виде постановку транспортной задачи можно сделать следующим образом. На нескольких станциях отправления сосредоточен груз, который необходимо доставить на известное число пунктов приема. Объем отправляемого груза с каждого пункта и принимаемого груза задан. При закрытой транспортной задаче сумма объемов, подлежащих отправке, и сумма объемов принимаемого груза должны быть равны. Заданы также транспортные расходы, связанные с перевозкой единицы груза из любой точки отправления в любой пункт назначения. Требуется составить такой план перевозок груза, при котором общие транспортные расходы были бы наименьшими. При этом был бы точно удовлетворен спрос в каждом пункте назначения, был бы вывезен весь груз со станций отправления.

Математическая формулировка транспортной задачи в общем виде такова.

Среди неотрицательных решений системы

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, ..., n); \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, ..., m). \end{cases} \tag{2.27}$$

выбрать такое, при котором функция

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min, \tag{2.28}$$

где $i$ – номер станции отправления;

$j$ – номер пункта назначения;

$x_{ij}$ – количество груза, предназначенного для отправки из $i$-ой станции в $j$-ый пункт приема;

$a_i$ – объем груза, сосредоточенного на станции отправления $i$;

$b_j$ – объем груза, который необходимо доставить в $j$-ый пункт приема;

$c_{ij}$ – транспортные расходы, связанные с перевозкой одной единицы груза с $i$-ой станции отправления на $j$-ый пункт приема;

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ – означает, что суммирование элементов $c_{ij}x_{ij}$ производится сначала по индексу $j$ при любом фиксированном значении $i$, затем по индексу $i$.

Приведенная математическая формулировка свидетельствует о том, что транспортная задача является задачей линейного программирования, так как ее решение сводится к нахождению минимума линейной функции от неотрицательных переменных, удовлетворяющих системе линейных уравнений.

В принципе, транспортная задача может быть решена универсальным симплекс-методом. Однако наличие специфических ограничений в математической постановке задачи привели к созданию специального метода решения транспортной задачи. Этот метод впервые был предложен советскими математиками Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным в 1949 году. Он является упрощенным вариантом симплекс-метода и приспособлен именно для решения транспортных задач.

Рассмотрим важное положение, которым приходится руководствоваться в процессе выполнения расчетов при решении транспортных задач. Систему ограничений транспортной задачи можно разрешить относительно $m + n - 1$ неизвестных, то есть оптимальное решение транспортной задачи следует искать среди $m + n - 1$ неизвестных $x_{ij}$, удовлетворяющих системе ограничений.

Алгоритм решения транспортной задачи включает несколько этапов. На первом этапе определяется какое-либо первоначальное допустимое решение. На втором этапе это решение проверяется на оптимальность. Если результат положительный, то задача решена. В противном случае осуществляется переход к новому улучшенному допустимому решению и т. д., пока не будет найден оптимальный вариант.

Методику решения транспортной задачи удобно рассмотреть на конкретном примере с введением по ходу решения необходимых количественных данных.

**Пример 2.2.** Планом проведения капитального ремонта высоковольтной линии электропередачи предусматривается замена деревянных опор на железобетонные опоры. Заказ на изготовление опор размещен на трех заводах железобетонных изделий $A_1$, $A_2$, $A_3$ в следующих количествах: $a_1 = 20$, $a_2 = 80$, $a_3 = 120$ штук. По трассе ЛЭП намечено 4 пункта, куда будут поставляться опоры. В пункт $B_1$ должно быть доставлено $b_1 = 60$, в пункт $B_2$ – $b_2 = 100$, в пункт $B_3$ – $b_3 = 20$ и в пункт $B_4$ – $b_4 = 40$ опор. При этом количество опор, изготавливаемых на заводах железобетонных изделий равно сумме потребностей в пунктах приема $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 220$ шт.

Транспортные расходы в у. е., связанные с перевозкой каждой опоры из любого завода железобетонных изделий указан в таблице

| Завод железобетонных изделий | Пункт назначения | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
| $A_1$ | $c_{11} = 3$ | $c_{12} = 6$ | $c_{13} = 5$ | $c_{14} = 1$ |
| $A_2$ | $c_{21} = 1$ | $c_{22} = 4$ | $c_{23} = 3$ | $c_{24} = 2$ |
| $A_3$ | $c_{31} = 4$ | $c_{32} = 3$ | $c_{33} = 1$ | $c_{34} = 2$ |

Необходимо составить план перевозок опор, при котором общие транспортные расходы будут минимальными.

Р е ш е н и е: 1. Определим какое-либо первоначальное допустимое решение. Для этого составим специальную таблицу следующего вида:

В клетках, в которых записаны стоимости перевозок, оставлены свободные левые нижние углы, куда будем вписывать найденные значения $x_{ij}$, которые в дальнейшем будем называть поставками.

Для определения $x_{ij}$ воспользуемся методом северо-западного угла. Поставки каждый раз вписываются в верхний левый (северо-западный) угол таблицы. Вначале определим поставку для клетки ($A_1$, $B_1$). Для этого сравним потребность $B_1 = 60$ и запас $A_1 = 20$. Меньшее значение из этих чисел примем за поставку $x_{11}$ и величину $c_{11}$ в этой клетке заключим в рамку.

| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 60 | 100 | 20 | 40 |
| $A_1$ | 20 | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $c_{14}$ |
| $A_2$ | 80 | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $c_{23}$ | $c_{24}$ |
| $A_3$ | 120 | $c_{31}$ | $c_{32}$ | $c_{33}$ | $c_{34}$ |

(2.29)

Так как запас $A_1$ исчерпан, строку $A_1$ временно исключим из рассмотрения. Теперь верхней левой клеткой будет ($A_2$, $B_1$). Сравнивая потребность $B_1 = 40$ с запасом $A_2 = 80$, выбираем величину 40, $c_{21}$ заключаем в рамку и столбец $B_1$ временно исключаем из рассмотрения.

Теперь верхней левой клеткой таблицы будет клетка ($A_2$, $B_2$). Сравнивая цифры 40 и 100, заносим в эту клетку цифру 40 и $c_{22}$ заключаем в рамку. Так как запас $A_2$ полностью исчерпан, то строку $A_2$ временно исключаем из рассмотрения.

В результате получим таблицу, состоящую из одной строки $A_3$, в клетки которой и вписываем оставшиеся поставки: $x_{32} = 60$, $x_{33} = 20$, $x_{34} = 40$, а $c_{32}$, $c_{33}$ и $c_{34}$ заключаем в рамки. В итоге получим таблицу:

| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 60 | 100 | 20 | 40 |
| $A_1$ | 20 | $\boxed{c_{11}}$ 20 | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $c_{14}$ |
| $A_2$ | 80 | $\boxed{c_{21}}$ 40 | $\boxed{c_{22}}$ 40 | $c_{23}$ | $c_{24}$ |
| $A_3$ | 120 | $c_{31}$ | $\boxed{c_{32}}$ 60 | $\boxed{c_{33}}$ 20 | $\boxed{c_{34}}$ 40 |

(2.30)

В результате проведенных операций нами получен следующий план перевозок: $x_{11} = 20$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 0$, $x_{21} = 40$, $x_{22} = 40$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 60$, $x_{33} = 20$, $x_{34} = 40$.

При таком плане все опоры с заводов железобетонных изделий $A_1$, $A_2$, $A_3$ будут вывезены, а потребности пунктов размещения опор на трассе воздушной линии $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ будут удовлетворены. Таким образом, нами получено допустимое решение поставленной задачи.

Затраты на перевозку опор в этом случае составят

$$z_1 = 20c_{11} + 40c_{21} + 40c_{22} + 60c_{32} + 20c_{33} + 40c_{34}.$$

Рассматривая полученную таблицу, можно заметить следующую особенность: число клеток, выделенных рамками, на 1 меньше общего числа строк и столбцов таблицы, то есть оно равно $m + n - 1$. Указанная особенность обусловлена ходом заполнения таблицы. Действительно, каждый раз мы записываем поставку в клетку, после чего исключаем строку или столбец. Исключение составило лишь последнее заполнение, когда мы одновременно вычеркнули сразу и столбец и строку. Так как число строк равно m, столбцов – n, то число заполненных клеток будет равно $m + n - 1$.

В результате построения таблицы нам удалось получить $m + n - 1$ неизвестных, относительно которых разрешима система ограничений.

Назовем эти неизвестные базисными величинами, а полученное решение – базисным. Остальные неизвестные (значения которых не вписаны в таблицу) будем называть свободными неизвестными, а клетки без рамок – свободными клетками.

Оптимальное решение следует искать среди возможных базисных решений.

Используя таблицу, помещенную в условие задачи, найденный план перевозок имеет значение целевой функции

$$z = 3 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 60 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 = 540.$$

2. Исследование базисного решения на оптимальность.

Сопоставим каждой станции $A_i$ некоторую величину $\alpha_i$, а каждому пункту $B_j$ некоторую величину $\beta_j$ и свяжем эти величины следующим образом $\alpha_i + c_{ij} = \beta_j$.

Величинам $\alpha_i$ и $\beta_j$ можно придать простой смысл:

$\alpha_i$ – стоимость изготовления одной опоры на заводе железобетонных изделий;

$\beta_j$ – стоимость опоры в пункте назначения;

$c_{ij}$ – затраты на перевозку опоры из станции отправления i в пункт назначения j.

Значения целевой функции нельзя уменьшить для всех свободных клеток таблицы, если выполняется неравенство $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$.Если такое неравенство выполняется, то решение оптимально.

Итак, для исследования базисного решения на оптимальность из системы уравнений $\alpha_i + c_{ij} = \beta_j$, соответствующих базисным клеткам таблицы перевозок, определить величины $\alpha_i$ и $\beta_j$ и проверить неравенство $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ для каждой свободной клетки.

В начале определим величины: $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ и величины $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4$. Поскольку одной из величин: $\alpha_1$ можно придать любое произвольное значение, примем ее равной нулю. Тогда для клетки ($A_1$, $B_1$) из уравнения $\alpha_1 + c_{11} = \beta_1$ определим $\beta_1$: $0 + 3 = \beta_1$, $\beta_1 = 3$. Запишем значение $\beta_1$ под столбцом $B_1$. Из равенства $\alpha_2 + c_{21} = \beta_1$ установим значение $\alpha_2$: $\alpha_2 + 1 = 3$, $\alpha_2 = 2$. Запишем значение $\alpha_2 = 2$ справа от таблицы, напротив строки $A_2$. Проведя аналогичные вычисления, определим значения: $\beta_2 = 6$, $\alpha_3 = 3$, $\beta_3 = 4$, $\beta_4 = 5$. В результате получим следующую таблицу

| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 60 | 100 | 20 | 40 | |
| $A_1$ | 20 | $\boxed{3}$ 20 | 6 | 5 | 1 | $\alpha_1 = 0$ |
| $A_2$ | 80 | $\boxed{1}$ 40 | $\boxed{4}$ 40 | 3 | 2 | $\alpha_2 = 2$ |
| $A_3$ | 120 | 4 | $\boxed{3}$ 60 | $\boxed{1}$ 20 | $\boxed{2}$ 40 | $\alpha_3 = 3$ |
| | | $\beta_1 = 3$ | $\beta_2 = 6$ | $\beta_3 = 4$ | $\beta_4 = 5$ | |

(2.31)

Проверим, выполняется ли неравенство $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ для свободных клеток полученной таблицы. Для свободной клетки ($A_1$, $B_2$) неравенство выполняется: $0 + 6 \geq 6$, для свободной клетки ($A_1$, $B_3$) – также выполняется: $0 + 5 \geq 4$, а для свободной клетки ($A_1$, $B_4$): $0 + 1 < 5$ – не выполняется. Следовательно, имеющийся план перевозок не оптимален. Целевую функцию можно уменьшить, вводя перевозку опор из $A_1$ в $B_4$.

3. Определение нового базисного решения.

В клетку ($A_1$, $B_4$) впишем поставку $\Delta > 0$. Если мы в клетку ($A_1$, $B_4$) внесли поставку $\Delta$, то ее следует вычесть из $x_{11}$, что в свою очередь требует добавки ее к $x_{22}$ и так далее, пока мы не вернемся в клетку ($A_1$, $B_4$).

| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 60 | 100 | 20 | 40 |
| $A_1$ | 20 | $\boxed{3}$<br>20 - Δ | 6 | 5 | 1<br>Δ |
| $A_2$ | 80 | $\boxed{1}$<br>40 + Δ | $\boxed{4}$<br>40 - Δ | 3 | 2 |
| $A_3$ | 120 | 4 | $\boxed{3}$<br>60 + Δ | $\boxed{1}$<br>20 | $\boxed{2}$<br>40 |

(2.32)

Обходя клетки таблицы (2.32) в той последовательности, в какой мы компенсируем Δ, получим замкнутую ломаную линию, чередующуюся из горизонтальных и вертикальных звеньев (указаны пунктиром). Одна из вершин этой ломаной линии находится в свободной клетке, остальные – в базисных клетках (не обязательно во всех). Такая ломаная линия называется циклом пересчета, соответствующим свободной клетке. Клетки, в которых величина Δ записана со знаком «+», будем называть положительными вершинами цикла пересчета, а клетки, в которых Δ записана со знаком «–» – отрицательными вершинами цикла пересчета.

Существует определенное правило перераспределения поставок [5]. Начиная со свободной клетки, для которой неравенство $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ не выполняется, и двигаясь по циклу пересчета, в вершинах цикла расставляют чередуясь знаки «+» и «–». Просматриваются поставки, записанные в отрицательных вершинах, и среди них выбирается наименьшая. Это число прибавляется ко всем поставкам, записанным в положительных вершинах, и вычитается из всех поставок в отрицательных вершинах. Свободная клетка, для которой строится цикл пересчета, объявляется базисной, а одна из базисных, входящих в цикл пересчета, – свободной, так как поставка в ней будет равна нулю.

В нашем случае минимальной является поставка Δ = 20, ее помещаем в клетку ($A_1$, $B_4$) и объявляем базисной, помечая рамкой, а клетку ($A_1$, $B_1$) делаем свободной, уничтожая в ней рамку.

В результате получим следующую таблицу

| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 60 | 100 | 20 | 40 |
| $A_1$ | 20 | 3 | 6 | 5 | $\boxed{1}$ |
| $A_2$ | 80 | $\boxed{1}$ 60 | $\boxed{4}$ 20 | 3 | 2 |
| $A_3$ | 120 | 4 | $\boxed{3}$ 80 | $\boxed{1}$ 20 | $\boxed{2}$ 20 |

(2.33)

После пересчета мы получим новый план перевозок: $x_{14} = 20$, $x_{21} = 60$, $x_{22} = 20$, $x_{32} = 80$, $x_{33} = 20$, $x_{34} = 20$, $x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{23} = x_{24} = x_{31} = 0$.

Значение целевой функции при новом базисном плане будет $1 \cdot 20 + 1 \cdot 60 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 80 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 20 = 460$.

Как видим, величина целевой функции уменьшилась.

Одной из особенностей формирования цикла пересчета является возможность появления в нескольких вершинах нулей. В этой ситуации лишь одна из них объявляется свободной, а остальные остаются базисными с нулевыми поставками. Этим сохраняется равенство числа базисных клеток $m + n - 1$.

4. Исследование полученного базисного решения на оптимальность.

Сначала определим $\alpha_i$ и $\beta_j$. Принимая $\alpha_1 = 0$, определим $\beta_4$: $0 + 1 = \beta_4$, откуда $\beta_4 = 1$. Зная $\beta_4$, определим $\alpha_3$ (клетка $(A_3, B_4)$): $\alpha_3 + 2 = 1$, следовательно $\alpha_3 = -1$. Аналогичным образом мы получим другие значения $\alpha_i$ и $\beta_j$: $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 0$, и $\alpha_2 = 2$. В результате можно составить следующую таблицу

| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 60 | 100 | 20 | 40 | |
| $A_1$ | 20 | 3 | 6 | 5 | $\boxed{1}$ | $\alpha_1 = 0$ |
| $A_2$ | 80 | $\boxed{1}$ 60 | $\boxed{4}$ 20 | 3 | 2 | $\alpha_2 = -2$ |
| $A_3$ | 120 | 4 | $\boxed{3}$ 80 | $\boxed{1}$ 20 | $\boxed{2}$ 20 | $\alpha_3 = -1$ |
| | | $\beta_1 = -1$ | $\beta_2 = 2$ | $\beta_3 = 0$ | $\beta_4 = 1$ | |

(2.34)

5. Проверим, выполняется ли неравенство $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ для свободных клеток этой таблицы. Для свободных клеток ($A_1$, $B_1$), ($A_1$, $B_2$), ($A_1$, $B_3$), неравенство выполняется, так как для них, соответственно $0 + 3 \geq -1$; $0 + 6 \geq 1$; $0 + 5 \geq 0$ и $-2 + 3 \geq 0$, на для свободной клетки ($A_2$, $B_4$) неравенство не выполняется: $-2 + 2 < 1$. Следовательно, базисный план не оптимален и его можно улучшить, увеличив поставку в клетку ($A_2$, $B_4$).

6. Построим новый базисный план. Пометим знаком «+» клетку ($A_2$, $B_4$) и ходом ладьи построим цикл пересчета. Получим следующую таблицу

| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 60 | 100 | 20 | 40 |
| $A_1$ | 20 | 3 | 6 | 5 | $\boxed{1}$ |
| $A_2$ | 80 | $\boxed{1}$ 60 | $\boxed{4}$ 20 - | 3 | 2 |
| $A_3$ | 120 | 4 | $\boxed{3}$ 80 + | $\boxed{1}$ 20 | $\boxed{2}$ 20 - |

(2.35)

Среди поставок, имеющих знак «–», наименьшей является поставка, равная 20. Увеличивая поставки в клетках со знаком «+» на 20 и уменьшая поставки в клетках со знаком «–» на 20 единиц, получим следующую таблицу

| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 60 | 100 | 20 | 40 | |
| $A_1$ | 20 | 3 | 6 | 5 | $\boxed{1}$ | $\alpha_1 = 0$ |
| $A_2$ | 80 | $\boxed{1}$ 60 | 4 | 3 | $\boxed{2}$ 20 | $\alpha_2 = -1$ |
| $A_3$ | 120 | 4 | $\boxed{3}$ 100 | $\boxed{1}$ 20 | $\boxed{2}$ 0 | $\alpha_3 = -1$ |
| | | $\beta_1 = 0$ | $\beta_2 = 2$ | $\beta_3 = 0$ | $\beta_4 = 1$ | |

(2.36)

Клетка ($A_2$, $B_4$) теперь будет базисной с поставкой, равной 20.

В результате пересчета поставок в двух базисных клетках ($A_2$, $B_2$) и ($A_3$, $B_4$) поставки стали равны нулю. Однако, лишь одну из них, например, ($A_2$, $B_2$) мы объявим свободной, а другую ($A_3$, $B_4$) оставим базисной с нулевой поставкой. Этим мы сохраним равенство количества базисных клеток числу $m + n - 1$.

7. Проверим на оптимальность полученное новое базисное решение. Приравняв $\alpha_1 = 0$ в таблице (2.36), определим остальные $\alpha_i$, $\beta_j$ и запишем их справа и под таблицей.

Проверим выполнение неравенства $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$ для всех свободных клеток ($0 + 3 \geq 0$; $0 + 6 \geq 2$; $0 + 5 \geq 0$; $-1 + 4 \geq 2$; $-1 + 3 \geq 0$; $-1 + 4 \geq 0$) устанавливаем, что полученное решение является оптимальным.

Осуществив такой план перевозок, суммарные затраты на доставку опор будут наименьшими и составят

$$z_{\min} = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 20 = 440 .$$

При решении транспортной задачи может возникнуть ситуация, когда оптимальный план будет не один, а несколько. В этом случае рекомендуется выбирать один из них, пользуясь не только количественными, но и другими соображениями, например, скоростью доставки груза в некоторые пункты, условиями перевозки и т. д.

# Литература


1. Авсиевич А. В. Теория массового обслуживания / А. В. Авсиевич, Е. Н. Авсиевич. – Самара: Самарская государственная академия путей сообщения, 2004.
2. Афанасьев М. Ю. Прикладные задачи исследования операций / М. Ю. Афанасьев, К. А. Багриновский. – М.: Инфра-М, 2006.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М.: ACADEMA, 2005.
4. Вентцель Е. С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Радио и связь, 1983.
5. Волков В. А. Элементы линейного программирования / В. А. Волков. – М.: «Просвещение», 1975.
6. Головин Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И Головин. – М.: Наука, 1985.
7. Калашникова Т. В. Исследование операций в экономике / Т. В. Калашникова. – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2011.
8. Красс М. С. Математика в экономике / М. С. Красс, Б. П. Чупринов. – М.: «Финансы и статистика», 2007.
9. Кремер Н. Ш. Математика для экономистов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин. – М.: «Высшее образование», 2007.
10. Невежин В. П. Исследование операций и принятие решений в экономике / В. П. Невежин, С. И. Кружилов, Ю. В. Невежин. – М.: «ФОРУМ», 2011.
11. Саакян Г. Р. Лекции по теории массового обслуживания / Г. Р. Саакян. – Шахты: ЮРГУЭС, 2006.
12. Синьков В. М. Математические задачи сельской электрификации / В. М. Синьков, С. И. Пересыпкин, Н. М. Филиппов. – Киев: «Вища школа», 1978.
13. Хорольский В. Я. Эксплуатация электрооборудования / В. Я. Хорольский, М. А. Таранов, В. Н. Шемякин. – Ставрополь: «АГРУС», 2010.
14. Хорольский В. Я. Прикладные методы для решения задач электроэнергетики / В. Я. Хорольский, М. А. Таранов, В. Н. Шемякин, С. В. Аникуев. – Ставрополь: «АГРУС», 2014.
15. Электроэнергетика / Ю. В. Шаров, В. Я. Хорольский, М. А. Таранов, В. Н. Шемякин. – Ставрополь, «АГРУС», 2011.

# Содержание