Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра Математика

Гулай Т. А.

ЗАОЧНОЕ ОБУЧЕНИЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

наименование дисциплины

методические указания к изучению дисциплины
и выполнению контрольных работ для студентов
заочной формы обучения

38.03.05 Бизнес-информатика
наименование направления

Ставрополь
2019

1.Общие положения

Формой обучения студента – заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит их следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. В процессе самостоятельной работы студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. В помощь заочникам организуются чтение лекций, практические занятия. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса математики является сдача семестрового экзамена в соответствии с учебным планом по специальности.

Изучение материала по учебнику

Изучение материала по учебнику следует выполнять согласно указанным в программе курса темам. Изучая тот или иной вопрос темы по учебнику, целесообразно выполнять на бумаге все вычисления и вычерчивать имеющиеся в учебнике чертежи.

При самостоятельном изучении материала полезно вести конспект. В конспект по мере проработки материала рекомендуется вписывать определения, теоремы, формулы, уравнения и т.п. Поля конспектов могут послужить для выделения тех вопросов, на которые необходимо получить письменную или устную консультации. Ведение конспекта должно быть аккуратным, расположение текста хорошо продуманным. Конспект поможет в подготовке к теоретической части экзамена.

Решение задач

Чтение учебника должно сопровождаться разбором предлагаемых решений задач. Решение рекомендуется выполнять в отдельной тетради.

Каждый этап решения задачи должен быть обоснован, исходя из теоретических положений курса. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно.

В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и других математических констант.

Самопроверка

Опыт прочного усвоения материала темы показывает, что самопроверку проводить необходимо. В настоящем пособии приводятся для самопроверки вопросы, которые акцентируют внимание на наиболее важных, ключевых положениях темы. В процессе выполнения самопроверки необходимо избегать пользования учебником или конспектом. Желание обратиться к учебнику или конспекту показывает недостаточное усвоение материала темы.

Консультации

При изучении теоретического материала или при решении задач у студента могут возникнуть вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается. В такой ситуации студенту следует обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации. При этом необходимо точно указать вопрос, учебник и место в учебнике, где рассмотрен затрудняющий студента вопрос. Если непреодолимые затруднения возникли при решении задачи, то следует указать характер затруднения, привести план решения.

Контрольная работа

В процессе изучения курса студент должен выполнить одну контрольную работу, которая проходит рецензирование. По полученным результатам студент может сделать выводы о степени усвоения им соответствующего раздела курса, внести коррективы в процесс последующей самостоятельной работы по изучению теоретического материала.

К выполнению контрольной работы следует приступать после тщательного разбора имеющихся в учебнике и сборниках задач решений с ответами. В дополнение к предложенным задачам сборников в данном пособии рассмотрены некоторые примеры.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно, так как в противном случае рецензирование работы как диалог общения преподавателя – рецензента и студента с целью оказания последнему методической помощи не достигнет цели.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять, поскольку без их предъявления студент не допускается к сдаче экзамена.

Лекции, практические занятия

Во время экзаменационных сессий для студентов - заочников читаются лекции, проводятся занятия. На лекциях и практических занятиях проводится обзор наиболее важных разделов курса, могут рассматриваться отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освященные в рекомендуемых учебных пособиях.

Зачеты и экзамены

К зачету допускаются студенты, выполнившие контрольную работу (работы должны быть зачтены преподавателем-рецензентом). Экзамен проводится в письменной форме. Студенту предстоит ответить на вопросы экзаменационного билета. Как правило, экзаменационный билет содержит один теоретический вопрос и три практических задания. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела: решение задач должно выполняться без ошибок и уверенно. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявленными программой.

2. Методические указания к изучению дисциплины

Целью освоения дисциплины (модуля) «Дифференциальные и разностные уравнения» является знакомство студентов с соответствующими разделами математического анализа, необходимыми при изучении курсов экономического профиля, привития навыков применения полученных знаний для математического моделирования экономических явлений.

Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Учебная дисциплина Б2.Б.3 «Дифференциальные и разностные уравнения» относится к базовой части Б2. математического и естественнонаучного цикла. Изучение дисциплины базируется на следующих дисциплинах: «Линейная алгебра», «Математический анализ».

Для успешного освоения дисциплины должны быть сформированы компетенции ПК-19, ПК-20 на пороговом уровне.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы следующие знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами:

<u>Б2.Б.4 Линейная алгебра</u>

Знания: основные идеи и конструкции линейной алгебры, которые применяются при изучении процессов, протекающих в экономике, финансах и бизнесе;

Умения: пользоваться методами линейной алгебры для формализации и решения прикладных задач;

Навыки: навыки применения основных алгоритмов линейной алгебры;

<u>Б2.Б.1 Математический анализ</u>

Знания: основные понятия теории математического анализа;
общую структуру математического анализа, как раздела математики;
границы применимости аппарата математического анализа при моделировании экономических процессов.

Умения: грамотно применить изученный математический аппарат при изучении экономических дисциплин, при решении прикладных задач экономического содержания.

Навыки: навыки применения дифференциального и интегрального исчисления в учебной деятельности и научной работе.

Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения» будут использоваться в дальнейшем при освоении дисциплин: «Исследование операций», «Имитационное моделирование»,«Рынки ИКТ и организация продаж», большая часть спецкурсов по кафедрам финансов и экономической теории.

Требования к результатам освоения содержания дисциплины

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВПО по данному направлению:

профессиональных (ПК):

- использовать основные методы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности для теоретического и экспериментального исследования (ПК-19);
- использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования (ПК-20);

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: точные формулировки основных понятий, уметь интерпретировать их на простых модельных примерах; свободно использовать дифференциальные и разностные уравнения в записи математических соотношений и моделировании экономических зависимостей;

- общие методы решения дифференциальных и разностных уравнений и систем таких уравнений;
- общие теоремы о структуре множества решений линейных уравнений и систем линейных уравнений (как дифференциальных, так и разностных);
- иметь представление об устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости по Ляпунову.

Уметь: находить как действительную, так и комплексную фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального и разностного уравнения с постоянными коэффициентами для случая комплексных и кратных корней характеристического уравнения;

- приводить матрицу линейной системы с постоянными коэффициентами произвольного порядка к жордановой форме;

- находить частное решение неоднородного линейного дифференциального и разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

Владеть: навыками решения по алгоритму дифференциальных и разностных уравнений и систем таких уравнений;

- навыками исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений и конечно-разностных уравнений;
- навыками работы с разделами учебной и научной литературы, связанными с применением обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений и систем.

3. Методические указания к выполнению контрольной работы

Контрольные работы, как вид учебных занятий, являются основной формой текущего контроля успеваемости и качества подготовки студентов и имеют целью проверить ход и степень усвоения учебного материала по наиболее важным темам изучаемой математической дисциплины.

Контрольные работы выполняются в виде письменных ответов на вопросы, решения примеров и задач. Содержание заданий на контрольную работу и порядок ее проведения устанавливаются кафедрой

Уровень сложности примеров (задач) рассчитан на сред-него, систематически работающего студента и позволяет уверенно применять теоретические знания при их решении.

<u>При подготовке к контрольным работам необходимо:</u>

- повторить теоретический материал отработанных лекций, алгоритм и методы решения примеров и задач, выполненных на практических занятиях;
- ознакомиться со структурой и решением типовых задач согласно «нулевому» варианту задания на контрольную работу;
- получить консультацию у ведущего преподавателя по неусвоенным вопросам;
- использовать рекомендованную литературу при самостоятельном освоении учебного материала.

<u>При выполнении контрольных работ необходимо:</u>

- переписать дословно условие задачи (примеры) и сделать общепринятую символическую запись указанных величин;
- предварительные расчеты проводить в черновиках, соблюдая правила математики;

- выписать нужные формулы и определить, что в них известно, а что – неизвестно; определить также требуемый метод решения;

- расчеты вести с предельной аккуратностью и тщательностью.

- проверить правильность хода решения и результатов вычислений;

- уметь правильно пользоваться разрешенными таблицами (схемами) и данными алгоритмами;

- ответы на поставленные вопросы при необходимости пояснить графиками, рисунками, которые должны быть аккуратно оформлены;

- общепринятые обозначения, математические символы писать в соответствии с принятыми стандартами, буквы латинского и греческого алфавитов писать правильно, а сделанные исправления должны быть четкими и понятными.

При оценке результатов выполнения контрольной работы учитываются следующие критерии:

- полнота, правильность и рациональность методов решения примеров (задач);

- степень самостоятельности выполнения контрольной работы;

- соблюдения установленных требований преподавателя;

- аккуратность, точность и четкость символических обозначений и оформления графиков

4. Контрольные задания

Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл. Методы вычисления

Определение: Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)*, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Любая непрерывная функция *f(x)* имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Определение: Совокупность *F(x)+C* всех первообразных для функции *f(x)* называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; 2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$;

3. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; 4. $\int d\left(f(x)\right) = f(x) + C$;

5. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$; 6. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование предполагает использование при нахождении неопределенных интегралов таблицы интегралов

Таблица интегралов

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2} \cdot \ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + C$$

$$\int a^{kx+b} dx = \frac{a^{kx+b}}{k \cdot \ln a} + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Рассмотрим нахождение интегралов непосредственным методом.

Пример 1: Найти неопределенный интеграл:
$\int\left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx$.

Решение: $\int\left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right)dx =$

$$= \int 5\cos xdx + \int 2dx - \int 3x^2 dx + \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{4}{x^2+1}dx =$$

$$= 5\int \cos xdx + 2\int dx - 3\int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= 5\sin x + 2x - 3\frac{x^3}{3} + \ln|x| - 4\cdot arctgx + C =$$
$$= 5\sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4\cdot arctgx + C.$$

Пример 2: Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{x^2-2}{x^2}dx$.

Решение: $\int \frac{x^2-2}{x^2}dx = \int \frac{x^2}{x^2}dx - \int \frac{2}{x^2}dx = \int dx - 2\int x^{-2}dx =$

$$= x - 2\frac{x^{-1}}{-1} + C = x + \frac{2}{x} + C.$$

Пример 3: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2dx}{x^2+1}$

Решение: $\int \frac{x^2dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1-1)dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1)dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} =$

$$= \int dx - arctgx + C = x - arctgx + C$$

Метод подстановки в неопределенном интеграле (метод замены переменной)

Этот метод заключается в том, что заменяют переменную x на $\varphi(t)$,где $\varphi(t)$-непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)dt$ и получают $\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

При этом получают искомую функцию, выраженную через переменную *t*. Для возвращения к переменной *x* необходимо заменить *t* значением $t = \psi(x)$, которое находится из соотно-шения $x = \varphi(t)$.

Рассмотрим нахождение интегралов методом подстановки.

Пример 1: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Решение: $\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \begin{vmatrix} \ln x = t; \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C =$

$$= -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

Пример 2: Найти неопределенный интеграл $\int ctgxdx$

Решение: $\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \begin{vmatrix} \sin x = t; \\ dt = \cos dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$

$$= \ln|\sin x| + C$$

Пример 3: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$

Решение: $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} = \begin{vmatrix} e^x = t \\ dt = e^x dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tgt + C = tge^x + C$

Пример 4: Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{4+25x^2}$

Решение: $\int \frac{dx}{4+25x^2} = \int \frac{dx}{2^2+(5x)^2} = \begin{vmatrix} 5x = t \\ dt = 5dx \\ dx = \frac{1}{5}dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{1}{5}dt}{2^2+t^2} =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{10} arctg \frac{5x}{2} + C$.

Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок на n частей точками $a < x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка.

Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$$

Определение: Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$

Простейшие свойства определенного интеграла

1)Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4)Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$

5)Отрезок интегрирования можно разделить на части*:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

с-точка, лежащая между *a* и *b.*

6) Если $f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)$.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$, в том случае , когда можно найти соответствующую первообразную $F(x)$, служит формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Рассмотрим нахождение простейших определенных интегралов.

Пример 1: Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение: $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$

Пример 2: Вычислить определенный интеграл: $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$.

Решение: $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx =$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^9 = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\right)\Bigg|_1^9 = \left(\frac{2}{3}9\sqrt{9} - 2\sqrt{9}\right) - \left(\frac{2}{3}1\sqrt{1} - 2\sqrt{1}\right) =$$

$$= 12 + \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ преобразуется с помощью подстановки $t=\varphi(x)$ или $x=\psi(t)$ в определенный интеграл относительно новой переменной t. При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами t_1 и t_2, которые находятся из исходной подстановки.

Из первой подстановки новые пределы интегрирования вычисляются непосредственно: $t_1=\varphi(a),\quad t_2=\varphi(b)$.

Из второй подстановки новые пределы интегрирования находятся путем решения уравнений $a=\psi(t_1),\quad b=\psi(t_2)$.

Таким образом, имеем

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)dt$$

Пример 1: Вычислить определенный интеграл методом замены переменной $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos^2 xdx$

Решение: $$\int_0^{\pi/2}\sin x\cos^2 xdx=\left|\begin{matrix} t=\cos x, & t_1=\cos 0=1 \\ dt=-\sin xdx, & t_2=\cos(\pi/2)=0 \\ \sin xdx=-dt & \end{matrix}\right|=-\int_1^0 t^2dt=-\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^0$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot(0^3-1^3)=\frac{1}{3}.$$

Пример 2: Вычислить определенный интеграл: $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Решение: $$\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{matrix} x=t^2 & t_1=\sqrt{1}=1 \\ dx=2tdt & t_2=\sqrt{4}=2\end{matrix}\right|=\int_1^2\frac{2tdt}{t+1}=$$

$$=2\int_1^2\frac{(t+1)-1}{t+1}dt=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2(t-\ln(t+1))\Big|_1^2=$$

$$=2(2-\ln 3)-2(1-\ln 2)=2+2\ln\frac{2}{3}.$$

Литература: [1] стр 247-264, 267-284, задания № 8.1-8.95, стр. 252, 9.1-9.14, стр. 278; [3] стр. 169-184, 195-200.

Вопросы для самопроверки:

1.В чем заключается смысл действия, обратного дифференцированию?

2.Дать определение первообразной функции

3.Чем отличаются друг от друга любые две первообразные данной функции $f(x)$?

4.Как проверить, правильно ли найдена первообразная данной функции $f(x)$?

5.Дать определение неопределенного интеграла.

6.Перечислить свойства неопределенного интеграла

7.Дать определение определенного интеграла.

8.Перечислить свойства определенного интеграла.

9.Запишите формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.

10.В чем отличия методов замены переменной в определенном и неопределенном интегралах?

Дифференциальные уравнения

Определение: Уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы различных порядков, называется дифференциальным уравнением.

$F(x, y, y', y'', ...) = 0$.

Определение: Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

(Например, $y' sinx + ytgx = 1$ - первого порядка;

$\frac{d^2y}{dx^2} = x^3$ - второго порядка.

Определение: Функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, называется решением этого уравнения. Решение дифференциального уравнения, содержащее столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, называется общим решением этого уравнения.

Для уравнения 1-го порядка: $y = \varphi(x, C)$

2-го порядка: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$

Определение: Функции, получаемые из общего решения при различных числовых значениях произвольнх постоянных, называются частными решениями этого уравнения.

Определение: Задача на нахождение частного решения дифференциального уравнения при заданных начальных условиях называется задачей Коши.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение: Дифференциальное уравнение с разделяющи-мися переменными имеет вид

$$M_1(x)\cdot N_1(y))dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy=0.$$

Алгоритм решения:

1)Поделим все члены уравнения на $N_1(y)\cdot M_2(x)$, получим:

$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0$, здесь переменные разделены.

2)Интегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C,$$

после чего находим общее решение данного дифференциального уравнения в виде $C=y(x)$

Пример: Найти общее решение дифференциального уравнения: $cos^2y\cdot ctgxdx + sin^2x\, tgydy=0.$

Решение:

Разделим на $cos^2y\cdot sin^2y$

$\frac{ctgx}{\sin^2 x}dx+\frac{tgy}{\cos^2 y}dy=0$, переменные разделены.

Проинтегрируем обе части полученного равенства.

$$\int \frac{ctgx}{\sin^2 x}dx+\int \frac{tgy}{\cos^2 y}dy=0$$

Интегралы находим методом подстановки.

$$\int\frac{cos\, x}{sin^3\, x}dx \quad + \quad \int \frac{sin\, y}{cos^3\, y}dy=0$$

$$\left.\begin{array}{l} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} v=\cos y \\ dv=-\sin y \end{array}\right|$$

$$\int\frac{dt}{t^3} - \int\frac{dv}{v^3}=0$$

$$\frac{t^{-2}}{-2}-\frac{v^{-2}}{-2}=C \qquad \text{или} \qquad -\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2v^2}=C$$

Произведя обратную подстановку, получим:

$$-\frac{1}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2\cos^2 x}=C \quad \text{или} \quad -\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=C$$

Отсюда,

$$\frac{-\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=C$$

Ответ: $\frac{1-2\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=C$ - общее решение уравнения.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение: Однородной функцией переменных x и y называется функция, все члены которой имеют одинаковую степень.

Например, $f(x,y)=2x^2-5xy$, $f(x,y)=x^2y+xy^2$ - однородные функции второй и третьей степени соответственно.

Определение: Уравнение вида $f(x,y)=\varphi(x,y)$, где $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ - однородные функции одной и той же степени, называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющими переменными подстановкой, где $u=u(x)-$ новая искомая функция.

Пример 1: Найти общее решение уравнения
$(x^2+y^2)dx-xydy=0$.

Решение: Положим $y=ux$. Дифференцируя равенство $y = ux$, получим $dy=xdu+udx$. Подставляя выражения в уравнение, получим: $(x^2+u^2x^2)dx-xux(xdu+udx)=0$

$x^2dx+u^2x^2dx-x^3udu-x^2u^2dx=0$

Разделим переменные в полученном уравнении.

$x^2dx=x^3udu$; $udu=\frac{dx}{x}$

Интегрируем, $\int udu=\int\frac{dx}{x}$. Отсюда, $\frac{u^2}{2}=ln|x|+C$.

Сделаем обратную замену: $u=\frac{y}{x}$, получим $\frac{y^2}{2x^2}=ln|x|+C$.

Ответ: $\frac{y^2}{2x^2}=ln|x|+C$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение: Уравнение вида $\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Уравнения такого вида сводятся к двум уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y=uv$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ - некоторые функции, зависящие от x.

Алгоритм решения:

1)Вводится подстановка $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

2)Исходное уравнение принимает вид:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x).$$

3)Группируются слагаемые при *u*.

$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$.

4)Выражение в скобках приравнивается к нулю:

$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными, решая его, находим $v = v(x)$.

5)Полученное значение v подставляется в выражение:

$v\frac{du}{dx} = Q(x)$.

Решив уравнение с разделяющимися переменными, получим функцию $u = u(x,C)$.

6)Общее решение уравнения запишется в виде:

$y = u(x,C) \cdot v(x)$.

Пример 1: Найти общее решение уравнения

$y' - ytgx = \sin x$.

Решение: Обозначим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Уравнение примет вид $u'v + uv' - uvtgx = \sin x$.

Вынесем во втором и третьем слагаемом общий множитель за скобки, получим $u'v + u(v' - vtgx) = \sin x$.

Выражение в скобках приравняем к нулю $v' - vtgx = 0$

Перепишем в виде $\frac{dv}{dx} = vtgx$

Умножая обе части уравнения на $\frac{dx}{v}$, получим $\frac{dv}{v} = tgxdx$,

интегрируем $\int \frac{dv}{v} = \int tgxdx$

находим $\ln|v| = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$, применим замену $\left| \begin{matrix} \cos x = t \\ dt = -\sin xdx \end{matrix} \right|$

получим $\ln|v| = -\int \frac{dt}{t}$,

откуда $\ln|v| = -\ln|t|$ или $\ln|v| = -\ln|\cos x|$, $\ln|v| = -\ln|\cos x|^{-1}$.

Пропотенцируем обе части равенства $v = \frac{1}{cosx}$.

Найденную функцию v подставим в выражение $u'v = sin(x)$ и решим полученное уравнение $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sin x$

$$du = sinx \cdot cos \cdot xdx \text{ или } du = \frac{1}{2}\sin 2xdx$$

Интегрируем $\int du = \frac{1}{2}\int \sin 2xdx$,

Получим $u = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Зная функции u и v , можно записать ответ.

Ответ: Общее решение уравнения $y = \frac{1}{cosx} \cdot (-\frac{1}{4}\cos 2x + C)$.

Пример 2: Найти частное решение дифференциального уравнения $xy' - 3y = x^4 e^x$, если $y = e$ при $x = 1$.

Решение: Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Отсюда, $xu'v + xuv' - 3uv = x^4 e^x$.

Вынесем u за скобки: $xu'v + u(xv' - 3v) = x^4 e^x$.

Приравняв скобку к 0 , получим: $xv' - 3v = 0$.

Отсюда, $x\frac{dv}{dx} - 3v = 0$, $\frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x}$.

Интегрируем $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3dx}{x}$,

$ln|v| = 3\,ln|x|$, $ln|v| = ln|x|^3$, $v = x^3$.

Подставив $v = x^3$ в выражение $xu'v = x^4 e^x$, получим уравнение относительно функции u и решим его.

$xu'x^3 = x^4 e^x$, $u' = e^x$, $\frac{du}{dx} = e^x$, .

Проинтегрируем $\int du = \int e^x dx$. Функция $u = e^x + C$.

Запишем общее решение уравнения : $y = (e^x + C) \cdot x^3$.

Частное решение найдем из условия $y = e$ при $x = 1$.

$e = (e^1 + C) \cdot 1^3$, $e + C = e$, $C = 0$.

Частное решение заданного уравнения имеет вид: $y = e^x \cdot x^3$.

Ответ: $y = x^3 e^x$ - частное решение уравнения.

Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае имеют вид: $F(x, y, y', y'') = 0$.

Дифференциальные уравнения вида $y'' = f(x)$ решаются двукратным интегрированием.

Полагая $y' = z$, имеем $y'' = z'$ или $z' = f(x)$, $\frac{dz}{dx} = f(x)$, $dz = f(x)dx$.

Интегрируя $\int dz = \int f(x)dx$, получим $z = F(x) + C_1$.

Возвращаясь к функции y , имеем $\frac{dy}{dx} = F(x) + C_1$

$$dy = (F(x) + C_1)dx \ , \qquad \int dy = \int (F(x) + C_1)dx \, .$$

$y = \Phi(x) + C_1 x + C_2$ - это есть общее решение уравнения $y'' = f(x)$.

Пример 1: Найти общее решение уравнения $y'' = 1 - x^2$.

Решение: Пусть $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'$.

После подстановки имеем $\frac{dz}{dx} = 1 - x^2$ или $dz = (1 - x^2)dx$.

Интегрируя обе части равенства, получим $z = x - \frac{x^3}{3} + C_1$.

Вернувшись к функции y , получаем уравнение $\frac{dy}{dx} = x - \frac{x^3}{3} + C_1$.

Интегрируя его $\int dy = \int (x - \frac{x^3}{3} + C_1)dx$, получим $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2$ -это есть общее решение уравнения.

Ответ: $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение: Уравнения вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q– постоянные величины, называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для отыскания общего решения такого уравнения составляется характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$,

которое решается как квадратное уравнение. При его составлении в исходном уравнении производные функции y заменяются соответствующей степенью переменной k, причем сама функция y заменяется единицей.

Общее решение исходного дифференциального уравнения строится в зависимости от характера корней k_1 и k_2.

Возможны три случая:

1) k_1 и k_2 – действительные и различные, тогда

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) k_1 и k_2 – действительные и равные, тогда $k_1 = k_2 = k$ и

$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$;

3) k_1 и k_2 – комплексно-сопряженные: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$,

тогда $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Пример1: Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 5y' - 6y = 0.$$

Решение: Заменим данное уравнение характеристическим:

$k^2 - 5k - 6 = 0$.

решаем его, получаем $D = (-5)^2 - 4 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49$.

$k_1 = \frac{5-7}{2} = -1$, $k_2 = \frac{5+7}{2} = 6$.

Как видно, корни действительные и различные , поэтому общее решение можно записать в виде $y = C_1 e^{-1x} + C_2 e^{6x}$.

Ответ: $y = C_1 e^{-1x} + C_2 e^{6x}$.

Пример 2: Решить дифференциальное уравнение $y'' + 9y = 0$.

Решение: Заменим данное уравнение характеристическим

$k^2 + 9 = 0$, найдем корни , $k^2 = -9$, значит $k_{1,2} = \pm 3i$.

Отсюда действительная часть комплексного числа $\alpha = 0$, мнимая часть $\beta = 3$, следовательно общее решение имеет вид:

$y = e^{0 \cdot x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Ответ: $y = e^{0 \cdot x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

Пример 3: Решить дифференциальное уравнение

$y'' + 6y' + 25y = 0$.

Решение: Заменим данное уравнение характеристическим:

$k^2 + 6k + 25 = 0$.

Решая его, получаем $D = 36 - 4 \cdot 25 = 36 - 100 = -64$;

$k_1 = \frac{-6-8i}{2} = -3 - 4i$, $k_2 = \frac{-6+8i}{2} = -3 + 4i;$

получили комплексно - сопряженные корни, где $\alpha = -3$ и $\beta = 4$. Тогда общее решение запишется в виде $y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Ответ: $y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$

Пример 4: Решить дифференциальное уравнение

$y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение: Заменим данное уравнение характеристическим:
$k^2 + 4k + 4 = 0$.
Решая его, получаем $D = 4^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$;
$k_1 = k_2 = \frac{-4}{2} = -2$,
получили два одинаковых действительных корня, тогда
общее решение уравнения запишется в виде $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$.
Ответ: $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$.

Литература: [1] стр.316-326, 330-334, 335-344, задания № 10.7-10.39, стр. 326, № 10.54-10.73, стр. 335, № 10.84-10.102, стр. 345; [4] стр.417-422, 435,443-445.

Вопросы для самопроверки:

1.Как можно определить порядок дифференциального уравнения?

2.Сколько постоянных интегрирования имеет дифферен-циальное уравнение первого порядка? Третьего порядка?

3.Как проверить правильность решения дифференциального уравнения?

4.В чем заключается задача Коши?

5.В какой последовательности решают дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными?

6.Приведите алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

7.Привести пример дифференциального уравнения второго порядка.

8.Сколько начальных условий должно быть задано при нахождении частного решения дифференциального. уравнения второго порядка?

9.Что называется характеристическим уравнением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

10.Запишите решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами для случая когда корни характеристического уравнения а) действительные и различные; б) комплексные.

Задания контрольной работы

Задание 1: Найти неопределенные интегралы и вычислить определенный интеграл:

Вариант 1:

а) $\int (3x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{4-x^2})dx$ б) $\int \frac{\sin x dx}{(1+3\cos x)^2}$ в) $\int_0^1 (2x^3+1)^4 \cdot x^2 dx$

Вариант 2:

а) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} + x^5 - \frac{3}{9+x^2})dx$ б) $\int \frac{dx}{(x-2)^7}$ в) $\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{2\cdot\sqrt[3]{x^4-8}\cdot x^3}{3}dx$

Вариант 3:

а) $\int (\frac{3}{4+x^2} - 2x + \cos 2x)dx$ б) $\int \frac{3x^2 dx}{2x^3+5}$ в) $\int_0^1 (5x^3+2)^4 \cdot x^2 dx$

Вариант 4:

а) $\int (4x^3 - \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}})dx$ б) $\int x^3 \cdot \sqrt{2x^4-1}dx$ в) $\int_0^{\pi/2} 12^{\sin x} \cdot \cos x dx$

Вариант 5:

а) $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ б) $\int e^{2\sin x} \cdot \cos x dx$ в) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{x dx}{\cos^2 x^2}$

Вариант 6:

а) $\int (2\sin 6x - \frac{1}{x} + e^{5x})dx$ б) $\int 2^{x^5} \cdot x^4 dx$ в) $\int_0^3 \frac{1}{(1+2x)^9}dx$

Вариант 7:

а) $\int (x^4 + \frac{2}{\sin^2 x} - 3\cos 2x)dx$ б) $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$ в) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$

Вариант 8:

а) $\int (3e^{2x} - \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$ б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{(1+\sin x)^3}}$ в) $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\sin^2 2x}$

Вариант 9:

а) $\int (\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + 2x + \frac{3}{x})dx$ б) $\int tgx dx$ в) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

Вариант 10:

а) $\int (5e^{2x} - \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} + 3)dx$ б) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$ в) $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Вариант 11:

а) $\int (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} - \cos 3x)dx$ б) $\int \frac{\ln x dx}{x}$ в) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

Вариант 12:

а) $\int \left(\frac{5x\sqrt[3]{x}+7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{4+x^2}\right)dx$ б) $\int e^{x^3+1}\cdot x^2dx$ в) $\int_0^{\pi} \sin^5 x\cos xdx$

Вариант 13:

а) $\int \left(\cos 2x-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$ б) $\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ в) $\int_2^3 \frac{x^2dx}{x^3-1}$

Вариант 14:

а) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+4e^{2x}\right)dx$ б) $\int x^2\sin x^3dx$ в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$

Вариант 15:

а) $\int \left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}+5\cos 4x\right)dx$ б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ в) $\int_3^6 \left(2-\frac{x}{3}\right)^5 dx$

Вариант 16:

а) $\int \frac{2-4\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$ б) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{(1+\sin x)^3}}$ в) $\int_0^{\pi} \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$

Вариант 17:

а) $\int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$ б) $\int \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$ в) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$

Вариант 18:

а) $\int \left(4x^3+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ б) $\int \sqrt{1-3x}dx$ в) $\int_2^3 \frac{dx}{(x+3)^4}$

Вариант 19:

а) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}-\sqrt[3]{x}+2e^{5x}\right)dx$ б) $\int \sqrt[3]{2x+4}dx$ в) $\int_2^3 \frac{dx}{(2x+1)^3}$

Вариант 20:

а) $\int \left(2+\cos 3x-\frac{1}{9+x^2}-\sqrt[3]{x^2}\right)dx$ б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx$ в) $\int_0^2 x^3(2+x^4)^2dx$

Вариант 21:

а) $\int \left(\frac{4}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2-9}\right)dx$ б) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$ в) $\int_0^1 \frac{xdx}{9+x^2}$

Вариант 22:

а) $\int \left(7-3x+x^3-\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$ б) $\int \frac{\sin xdx}{(1-2\cos x)^2}$ в) $\int_0^3 (2+x)^5dx$

Вариант 23:

а) $\int (1+\cos 6x+2e^{3x})dx$ б) $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}dx$ в) $\int_0^1 x^2(2x^3-3)^3dx$

Вариант 24:

а) $\int (\frac{1}{x^5} - 4\sin x + 2\cdot\sqrt[3]{x})dx$ б) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-5}}dx$ в) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{\cos x}\sin xdx$

Вариант 25:

а) $\int (2\sin 6x - 2^x - \frac{1}{x})dx$ б) $\int \frac{x^2}{(x^3-3)^3}dx$ в) $\int\limits_0^1 e^{x^3+1}\cdot x^2 dx$

Вариант 26:

а) $\int (3x - \frac{1}{9+x^2} + e^{5x})dx$ б) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{(\sin x+1)^3}}$ в) $\int\limits_0^{-2} \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$

Вариант 27:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}-x}{x^2}dx$ б) $\int \cos^2 x\sin xdx$ в) $\int\limits_0^{-1/2} e^{-2x}dx$

Вариант 28:

а) $\int (x^3 - \frac{1}{4+x^2} + \frac{2}{\cos^2 x})dx$ б) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1-\cos x}}$ в) $\int\limits_0^1 (2x^3-1)^4\cdot x^2 dx$

Вариант 29:

а) $\int \frac{\sqrt[5]{x^2}+\sqrt{x}-x}{x}dx$ б) $\int \sqrt{2\sin x+1}\cdot\cos xdx$ в) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x-1}$

Вариант 30:

а) $\int (4x^3 - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sin^2 x})dx$ б) $\int e^{\sin x}\cos xdx$ в) $\int\limits_{\sqrt{2}}^3 \frac{x}{x^2-1}dx$

Задание 2: Решить дифференциальные уравнения:

Вариант 1: а) $\sqrt{9+y^2}dx - ydy = x^2ydy$

б) $y' + ytgx = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 0{,}5$ в) $y'' - 4y' - 12y = 0$

Вариант 2 : а) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 3xy^2dx$

б) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 1{,}5$ в) $y'' + 2y' + y = 0$

Вариант 3: а) $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$

б) $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ в) $y'' + 4y' + 5y = 0$

Вариант 4: а) $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0$

б) $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$ в) $y'' - 5y' + 4y = 0$

Вариант 5: а) $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$

б) $y' + \frac{y}{x} = xe^x, \quad y(1) = e$ в) $y'' + y' - 2y = 0$

Вариант 6: а) $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0$

б) $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, \quad y(0)=1$ в) $y'' + 4y = 0$

Вариант 7: а) $y\ln y + xy' = 0$

б) $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y(\pi/2)=1$ в) $y'' + y = 0$

Вариант 8: а) $\sqrt{4+y^2} + \sqrt{1-x^2}\cdot y\cdot y' = 0$

б) $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1)=1$ в) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Вариант 9: а) $(1+e^x)\cdot y\cdot y' = e^x$

б) $y' - \frac{y}{x-2} = x(x-2), \quad y(3)=1$ в) $y'' - y' = 0$

Вариант 10: а) $y(1+\ln y) + xy' = 0$

б) $xy' - y = x^2, \quad y(1)=4$ в) $y'' - 2y' = 0$

Вариант 11: а) $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2 ydy$

б) $xy' - y = x\sqrt{x}, \quad y(0)=1$ в) $y'' + 4y' + 4y = 0$

Вариант 12: а) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$

б) $y' + y = e^x, \quad y(0)=1$ в) $y'' + 16y = 0$

Вариант 13: а) $x\sqrt{1+y^2} - yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

б) $y' - \frac{y}{x} = x^3, \quad y(1)=0$ в) $y'' - 4y = 0$

Вариант 14: а) $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$

б) $y' - \frac{y}{x+1} = e^x\cdot(x+1), \quad y(0)=1$ в) $y'' + 4y' - 5y = 0$

Вариант 15: а) $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$

б) $y' - \frac{y}{x-3} = x^2 - 3x, \quad y(0)=1$ в) $y'' + y' - 2y = 0$

Вариант 16: а) $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$

б) $y' - \frac{y}{x} = x^5, \quad y(1)=0$ в) $y'' - 6y' + 9y = 0$

Вариант 17: а) $\sqrt{16+y^2}dx - ydy = x^2ydy$

б) $y' + y\,ctgx = \sin^2 x, \quad y(\pi/4) = 0{,}5$ в) $y'' + 4y' - 12y = 0$

Вариант 18 : а) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 3xy^2dx$

б) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 1{,}5$ в) $y'' + 2y' + y = 0$

Вариант 19: а) $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$

б) $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ в) $y'' + 4y' + 5y = 0$

Вариант 20: а) $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0$

б) $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$ в) $y'' - 5y' + 4y = 0$

Вариант 21: а) $2(xy + y)dx = x^2 dy$

б) $x^3 y' + 3x^2 y = 2, \quad y(1) = 1$ в) $y'' + 2y' + 2y = 0$

Вариант 22: а) $y' \cdot \sqrt{1+x^2} = x$

б) $xy' - 2y = x^3 e^x, \quad y(0) = e$ в) $y'' + 3y' + 2y = 0$

Вариант 23: а) $4xydx = (x^2 + 1)dy$

б) $y' + 4y - 2x = 0, \quad y(1) = 0$ в) $y'' + y' - 6y = 0$

Вариант 24: а) $(1 - x^2)dy = xydx$

б) $(1+x^2)y' - xy = 2x, \quad y(0) = -1$ в) $y'' + 3y' = 0$

Вариант 25: а) $(1+x)ydx = (y-1)xdy$

б) $y' - \frac{y}{x+2} = x(x+2), \quad y(0) = 2$ в) $y'' - 4y' + 5y = 0$

Вариант 26: а) $(xy + x)\frac{dx}{dy} = 1$

б) $xy' + y = x + 1, \quad y(0) = 0$ в) $y'' - y' - 2y = 0$

Вариант 27: а) $(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0$

б) $y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = -2$ в) $y'' + 4y' + 29y = 0$

Вариант 28: а) $(1-y)dx + (x+1)dy = 0$

б) $x^2 y' - 2xy = 3, \quad y(1) = -1$ в) $y'' + 4y' + 8y = 0$

Вариант 29: а) $(1+y^2)xdx - (1+x^2)ydy = 0$

б) $xy' - y = -x, \quad y(1) = 5$ в) $y'' + 25y = 0$

Вариант 30: а) $4xdx - 4ydy = 2x^2 ydy - 5xy^2 dx$

б) $y' - \frac{y}{x-1} = e^x \cdot (x-1), \quad y(0) = 1$ в) $y'' - 4y' = 0$

5. Требования к оформлению контрольной работы

1. Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами синего или черного цвета. Необходимо оставить поля шириной 4-5 см для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради должны быть четко написаны фамилия и инициалы студента, его учебный шифр, название дисциплины, номер контрольной работы, номер варианта. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и личную подпись.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в контрольных заданиях, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
4. Задачи и их решения следует располагать в порядке возрастания номеров, указанных в контрольных заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи необходимо полностью записать ее условие.
6. Решения задач должны быть изложены подробно с необходимыми пояснениями по ходу решения.
7. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все ошибки, недочеты и выполнить рекомендации рецензента.
8. В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных выше правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются.

Приложение1

Пример оформления титульного листа контрольной работы

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра «Математика»

Контрольная работа по дисциплине

МАТЕМАТИКА

Выполнил: ____
(Фамилия И.О.)
студент _____ курса ________ направление______________________
(срок обучения)

группа________ № зачетной книжки ______________________________

Подпись: ____

Ставрополь
20_

Приложение2

Перечень контрольных вопросов для проверки знаний по дисциплине

1. Понятие о первообразной функции одной переменной. Теорема о двух первообразных.
2. Понятие о неопределенном интеграле. Свойства неопределенного интеграла.
3. Геометрическое изображение неопределенного интеграла. Таблица интегралов.
4. Методы непосредственного интегрирования (по таблице, разложением, подведением функции под знак дифференциала).
5. Метод интегрирования подведением функции под знак дифференциала и его частные случаи.
6. Интегрирование функции одной переменной методом подстановки.
7. Вывод формулы интегрирования по частям.
8. Интегрирование тригонометрических функций.
9. Интегрирование иррациональных функций.

10. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.
11. Свойства определенного интеграла.
12. Формула Ньютона-Лейбница.
13. Вычисление определенного интеграла методом подстановки.
14. Вычисление определенного интеграла по частям.
15. Основные понятия о дифференциальных уравнениях.
16. Дифференциальные уравнения первого порядка (основные понятия).
17. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Общее и частное решение.
18. Дифференциальные уравнения первого порядка, их решение.
19. Геометрический смысл дифференциальных уравнений и их решений.
20. Интегрирование некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка:

а) с разделёнными переменными;
б) с разделяющимися переменными;
в) однородные;
г) линейные;
д) Бернулли;
е) в полных дифференциалах.

21. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
22. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков (в частности, второго порядка):

а) линейная зависимость и независимость функций;

б) вронскиан, необходимое и достаточное условие линейной зависимости функций;
в) определитель Вронского решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка;
г) теорема о структуре общего решения.

23. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка:

а) характеристическое уравнение;
б) общее решение при значениях $k_1 \neq k_2$ и $k_1 = k_2$ (действительные корни);
в) общее решение при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения.

24. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка: теорема о структуре общего решения, теорема о суперпозиции решений.
25. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
26. Нахождение частного решения для правой части специального вида методом неопределенных коэффициентов.
27. Обобщение результатов на линейные уравнения n-го порядка.
28. Метод вариации произвольных постоянных.
29. Системы дифференциальных уравнений первого порядка.
30. Устойчивость решений дифференциальных уравнений.
31. Критерий устойчивости решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
32. Основные определения теории устойчивости по Ляпунову.
33. Асимптотическая устойчивость.
34. Точки равновесия.
35. Разностные (рекуррентные) уравнения первого порядка.
36. Общие понятия для рекуррентного уравнения первого порядка в нормальной форме:

а) решение уравнения,
б) начальные условия,
в) задача Коши,
г) решение рекуррентного уравнения подстановкой.

37. Линейное уравнение первого порядка:

а) арифметическая и геометрическая прогрессии,
б) частичные суммы и произведения.

38. Разностные (рекуррентные) уравнения второго порядка.
39. Линейные разностные (рекуррентные) уравнения.
40. Методы решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
41. Приложения к исследованию экономических моделей.